文章编号:1003－207(2014)03－0034－08

服务水平保证下应急抢修点选址模型及求解算法研究

余 鹏,隽志才

(上海交通大学安泰经济与管理学院,上海 200052)

摘 要:本文研究了一类故障率低但重要性较高设备的应急抢修点选址问题。设备的故障发生过程和从应急抢修点到故障设备的通行时间是随机的,每个设备被分配给一个应急抢修点进行抢修,并且整个应急抢修系统的服务水平要大于给定标准。本文以应急抢修点总开设成本最小作为目标,同时考虑了设备覆盖约束、抢修分配关系约束和抢修系统服务水平约束,在合理的假设下证明设备发生故障且应急抢修小组迟到的总次数服从泊松分布,最终将应急抢修点选址问题描述为一个 0－1 整数规划模型。通过对模型中的覆盖约束和抢修系统服务水平约束进行松弛,设计了相应的拉格朗日启发式算法。最后通过对大量随机算例进行计算,证明了该模型和算法的有效性。

关键词:应急抢修点;设施选址;服务水平保证;拉格朗日松弛法

中图分类号:C931.1; O221.4 **文献标识码:**A

1 引言

应急设施选址问题是研究如何将应急服务设施布置到合适的地点,以便在一定时间要求下到达紧急服务需求点提供服务的问题,研究应急选址问题对有效处理突发事件、维护社会或企业稳定运营具有重要意义。Brotcorne 等[1]以救护车选址为背景,系统回顾了 2003 年之前应急设施选址模型的发展。总的来说,描述应急选址问题的模型主要源自两个基础模型,一个是经典的集覆盖模型(Set Covering Problem,SCP),另一个是最大覆盖模型(Maximal Covering Location Problem, MCLP)。

LSCM 和 MCLP 都是确定型模型,在后续文献中大多考虑了应急设施选址问题中的不确定因素。当对不确定因素的概率分布信息掌握不太充分时,如在研究应对各类自然灾害或城市突发性事件的应急设施选址问题中,一般采用 minimax 选址模型[2]或情景规划方法[3],这一类模型适用于应对极端事件的应急设施选址。当应急设施总量受限而不能满足所有应急需求时,一般采用最大期望覆盖模型为基础进行研究。如 Alsalloum 等[4]考虑通行时间的不确定性将覆盖参数由 0－1 参量扩展为概率值,使用最大期望覆盖模型研究了应急车辆选址问题,Gendreau 等[5]考虑了需求的不确定性研究了基于最大期望覆盖的应急车辆再分配问题,Ingolfsson 等[6]在响应延误时间和通行时间均为随机的前提下,使用最大期望覆盖模型研究了救护车最优选址问题,他们的研究中均未同时考虑来自通行时间和应急需求的不确定性。另外,还可以采用在目标函数中增加惩罚成本来让应急需求尽可能得到满足[7],但不一定能保证应急需求的整体满足程度达到预定的标准。当应急服务需求对象的重要程度较高时,每个应急需求点的需求应在一定程度上得到满足。Ball 等[8]在研究应急车辆最优选址问题时,在保证每个需求点的需求得到满足的概率大于某一标准的约束下,求得最优选址方案使得选址成本最小。Beraldi 等[9]对 Ball 等[8]的研究进行了扩展,他们考虑了应急设施出现拥堵的情况,在保证每个应急设施不发生拥堵的概率大于某一标准的约束下,使得选址成本最小,Beraldi[9]和 Ball[8]的研究能保证单个需求得到一定程度的满足,但不一定能保证作为整体的应急需求得到满足的程度。此外,一些学者还应用多目标规划方法研究了应急设施选址问题。如陈志宗等[10]同时考虑了超额覆盖最大化和加权距离最小等多个目标,研究了为应对重大突发事件发生的应急救援设施选址问题。张玲等[11]采

收稿日期:2011－10－21; **修订日期:**2013－01－04
基金项目:国家自然科学基金资助项目(50978163)
作者简介:余鹏(1975－),男(汉族),湖北人,上海交通大学安泰经济管理学院博士生,研究方向:物流管理、运输系统规划与管理.

用情景分析方法，同时考虑应急资源供应比率最大和总期望运输时间最短两个目标研究了应急资源布局问题，这些多目标选址模型也未能考虑整个需求总体得到满足的程度。

上述文献在考虑覆盖系数时，要么没有考虑通行时间的随机性而将覆盖系数定义为 0－1 参数，要么将覆盖系数定义为概率值。将覆盖系数定义为概率值不便于决策者进行决策，Heung-Suk 等[12]根据按时到达需求点的概率将覆盖系数定义为 0－1 参数，将随机通行时间与经典集覆盖模型结合在一起，但他的研究仅考虑了应急设施对需求点的覆盖关系。Nozick[13]在研究有覆盖限制的固定费率选址模型（Fixed Charge Facility Location Problem, FCLP）时，研究了被覆盖的总需求数量有保证时的无约束固定费率选址模型，但他的研究中未考虑来自需求的不确定性。Beraldi 等[14]把对医疗服务的需求点作为一个整体，考虑了总体需求得到一定程度满足时的应急医疗设施选址问题，但他的文章中未考虑通行时间的不确定性，而是根据通行距离来确定应急设施对应急需求的覆盖关系。

本文同时考虑设备发生故障和应急抢修点到故障设备通行时间两种不确定因素，并将应急抢修点对故障设备提供抢修的总体服务质量作为整体考虑，保证整个应急抢修系统的服务水平大于给定标准，制定使总开设成本最小的应急抢修点选址方案。最后以大量随机生成的算例进行计算分析，证明所提出模型和算法的合理性，为设备维护管理部门进行应急抢修点选址提供了依据。

2　问题描述

本文所研究的问题是，假设共有 n 个设备分布在 n 个不同的地点，这些设备是公司运营或提供大规模公共服务所必须的关键设备，如大型楼宇中央空调或地铁站设备。这类设备的故障率较低，但一旦发生故障会给公司或社会带来较大损失。设备维护单位要在其中一部分设备所在地设置应急抢修点，当设备发生故障后，位于应急抢修点的抢修小组能在事先规定的时间内到达故障设备所在地进行抢修，并能保证整个应急抢修系统的服务水平不低于预先制定的标准。

设备随机发生故障，若应急抢修点所在地的设备发生故障，则抢修小组直接对该设备进行抢修；若该抢修点所负责维护的其它设备发生故障，抢修小组乘坐抢修车辆通过地面道路交通到达故障设备所在地进行抢修。因地面道路交通通行时间受天气、交通事故等诸多不确定性因素的影响，因此从应急抢修点到设备所在地的通行时间是随机变量。本文所研究的应急抢修点选址问题是在战略层面从较长时间尺度上来研究这一类应急抢修系统的选址规律，因此可以通过对同类或类似系统观察估计出以上随机变量的分布规律。

本文所研究的应急抢修系统需要满足以下几点要求：

(1) 从应急抢修点到其负责维护设备的通行时间小于设定标准的概率要大于某一给定值。当应急抢修点到某设备的通行时间满足此条件时，可由该应急抢修点负责该设备的应急抢修，也称该设备被该应急抢修点所覆盖。当抢修小组从应急抢修点到其负责维护的设备所用时间小于设定标准时，称为按时到达，否则称为迟到。

(2)每个设备必须且只能分配给一个应急抢修点进行维护。因为该类设备发生故障后会带来较大的经济损失或社会影响，因此必须将每个设备分配给满足上述条件(1)的应急抢修点进行维护。同时为了便于工作调度和对维护小组进行绩效考核，每个设备只能由一个应急抢修点负责维护。

(3)在一个运营年度内，设备发生故障且负责其维护的应急抢修小组迟到总次数小于给定标准次数的概率要大于某一给定值。这样可以保证整个应急抢修部门的服务水平以较大的概率大于某一给定的标准，也间接保证了设备正常运行的可靠性。

仅满足前两点要求的选址方案不一定满足第(3)点要求，不能保证维护系统的整体服务水平。本文研究的目标是选择合适的应急抢修点选址方案，在保证以上要求得到满足的前提下，使得应急抢修点总开设成本最小。

3　模型建立

3.1　模型假设

为建立数学模型描述以上问题，本文进行如下假设：

(1)各设备所在地之间的路径通行时间服从对数正态分布。抢修小组从应急抢修点所在地到达故障设备所在地，所经过的路径为事前选定的地面交通路网中两地之间的最短路径。早期的研究认为地面交通路网上车辆通行速度服从正态分布，从而路径通行时间也近似服从正态分布，而后期的研究认为对数正态分布更能描述通行时间分布偏斜、长尾

的特点[6,15]。陈琨[16]等对北京市浮动车采集系统的数据进行分析,证实了路径通行时间服从对数正态分布。本文假设任意两设备之间的路径通行时间服从对数正态分布,根据对数正态分布的性质,作为通行时间的倒数,通行速度也服从对数正态分布。

(2)任一设备发生故障的过程是泊松过程,且任意两个设备的故障发生过程相互独立。设备发生故障后,为迅速恢复运营,对故障部件的维修基本采用换件修。而且当设备、部件的维修次数较少时,可以认为该设备在维修后和维修前具有相同的失效率[17],因此可以假设任一设备发生故障的次数是一个奇次泊松过程,则在一个运营年度内任一设备发生故障的次数服从泊松分布。同时因为任意两个设备之间不存在关联因素,可以假设任意两个设备的故障发生次数相互独立。

(3)在较短的时间段内,不会出现两个及两个以上设备发生故障。因为这些设备对大规模公共服务或公司运营至关重要,因此在设计上已经保证了该类设备具有较低的故障率。除了应急抢修外,维护人员还会进行日常维护,因此这类设备的年故障率较低,在较短的时间段内出现多个设备发生故障的概率很小,因此可以认为不存在多个设备等待应急抢修服务的排队现象。

(4)设备发生故障和负责对该设备抢修的抢修小组迟到这两个事件相互独立。设备发生故障不会影响抢修小组到故障设备所在地的通行时间,因此可以认为这两个事件相互独立。

3.2 变量及参数定义

$N=\{1,2,...,n\}$ 是设备所在地(以下称为“需求点”)集合,也是应急抢修点的备选点(以下称为“备选点”)集合。x_i ($i\in N$)是应急抢修点(以下称为“抢修点”)选址决策变量,如果在第 i 个备选点设置一个抢修点,则 $x_i=1$,否则 $x_i=0$ 。y_{ij} ($i,j\in N$)是维护分配关系决策变量,如果由位于备选点 i 的抢修点负责对需求点 j 进行抢修,则 $y_{ij}=1$,否则 $y_{ij}=0$ 。

c_i 是在备选点 i 设置一个抢修点的开设费用,主要包括办公室装修费、应急抢修车辆购置改装费、维护工具购置费等。a_{ij} 是覆盖系数,定义为:

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & if \quad Prob\{t_{ij}\le t_c\}\ge p_{c1}\\ 0 & if \quad Prob\{t_{ij}\le t_c\}< p_{c1}\end{cases}\quad i,j\in N$$

t_{ij} 是从备选点 i 到需求点 j 的通行时间,$E(t_{ij})$ 是 t_{ij} 的期望值。因为可能存在单行道及交通流量不对称等因素的影响,$E(t_{ij})$ 与 $E(t_{ji})$ 不一定相等。t_c 是设定的时间标准,当从抢修点到需求点的通行时间大于 t_c 时,称该抢修小组迟到;当通行时间小于等于 t_c 时,称该抢修小组按时到达。p_{c1} 是设定的概率水平,当从备选点 i 到需求点 j 按时到达的概率大于等于 p_{c1} ,称备选点 i 覆盖需求点 j ,显然任何备选点必能覆盖其所在的需求点,即必定会有 $a_{ii}=1$ 。

l_j 是在一个运营年度内,需求点 j 的设备发生故障且负责对该需求点进行抢修的抢修小组迟到的次数。l_c 是由维护管理部门规定的当需求点发生故障且抢修小组迟到的最大次数,在一个运营年度内当需求点发生故障且各抢修点的抢修小组迟到次数之和小于 l_c 时,称该维护单位的服务水平达标。p_{c2} 是由维护系统管理部门规定的概率水平,设备维护单位服务水平达标的概率应大于 p_{c2} 。

3.3 服务水平保证的应急抢修点选址模型建立

根据对所研究问题的描述和变量定义,该应急抢修点选址问题的数学模型描述如下:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \tag{1}$$

$$s.t. \quad y_{ij}\le a_{ij}x_i \quad i,j\in N \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_{ij}=1 \quad j\in N \tag{3}$$

$$P\{\sum_{j=1}^{n} l_j\le l_c\}\ge p_{c2} \tag{4}$$

$$x_i\in\{0,1\},y_{ij}\in\{0,1\} \tag{5}$$

式(1)是目标函数,表示最小化应急抢修点总开设成本。式(2)表示只有当某备选点与需求点存在覆盖关系,且在该备选点设立了抢修点,才能对该需求点进行抢修,该约束共有 n^2 个。式(3)表示负责对每个需求点进行抢修的抢修点有且仅有 1 个,该约束共有 n 个。式(4)是当需求点发生故障且抢修小组迟到的总次数约束,表示在一个运营年度内,需求点发生故障且抢修小组迟到的总次数之和小于 l_c 的概率要大于 p_{c2} ,保证了整个应急抢修部门的服务水平,该约束共有 1 个。式(5)是 0-1 变量约束。l_j 是关于 y_{ij} 的函数,式(4)是关于 y_{ij} 的非线性不等式,通过以下讨论可以将该非线性约束转化为等价的线性约束。

命题 1 在一个运营年度内,需求点发生故障且抢修点的抢修小组到达该需求点的迟到总数 $\sum_{j=1}^{n} l_j$ 服从泊松分布。

证明 从备选点 i 到需求点 j 的迟到概率为 $p_{ij}=P\{t_{ij}>t_c\}$,根据式(3),从负责对其抢修的抢修

点出发到需求点 j 的迟到概率为：$p_{lj} = \sum_{i=1}^{n} y_{ij} p_{ij}$。在一个运营年度内，需求点 j 发生故障的次数服从泊松分布，其年故障率为 λ_j。根据泊松分布的性质[18]，在一个运营年度内，需求点 j 发生故障且抢修小组迟到的次数 l_j 服从故障率为 $p_{lj}\lambda_j$ 的泊松分布。当从各需求点到各备选点的通行时间 t_{ij} 相互独立时，根据假设 1 和假设 2，任意两个需求点 j 和 k 在一个运营年度内，$l_j + l_k$ 服从年故障率为 $p_{lj}\lambda_j + p_{lk}\lambda_k$ 的泊松分布；当通行时间 t_{ij} 之间的相关程度不高时，通过数值仿真实验可验证上述结论近似成立。则可以认为 $\sum_{j=1}^{n} l_j$ 服从年故障率为 $\sum_{j=1}^{n} p_{lj}\lambda_j$ 的泊松分布。

根据命题 1，约束(4)可以转变为：

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ij} p_{ij}\lambda_j\right)\sum_{k=0}^{l_c}\left\{\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ij} p_{ij}\lambda_j\right)^k / k!\right\} \geq p_{c2} \tag{6}$$

命题 2　需求点发生故障且抢修小组迟到总次数的约束(4)可以转化为关于 y_{ij} 的线性不等式。

证明　令 $\lambda = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} y_{ij} p_{ij}\lambda_j$。则式(6)的左边可以表示为 $f(\lambda) = \exp(-\lambda)\sum_{k=0}^{l_c}(\lambda^k/k!)$，对 f 求关于 λ 的一阶导数，得到 $f'(\lambda) = -\exp(-\lambda)\lambda^{l_c}/l_c! < 0$，即 $f(\lambda)$ 是关于 λ 的单调递减函数。则式(6)等价于 $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\sum_{i=1}^{n} y_{ij} p_{ij} \leq \lambda_c$，其中 λ_c 是方程 $f(\lambda) = p_{c2}$ 的解。

则约束(4)可以进一步转变为：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j y_{ij} p_{ij} \leq \lambda_c \tag{7}$$

从式(7)可以看出，该式综合考虑了通行时间与故障发生次数的不确定性，保证整个应急抢修系统在一个运营年度内，需求点发生故障且抢修小组迟到总次数小于规定次数的概率大于给定值，从而保证了整个应急抢修系统的服务水平。

因此原问题可以表示为线性 0－1 规划模型，该模型一定存在最优解。在每个备选点开设一个抢修点，且每个抢修点仅负责对其所在地的需求点抢修，即对于 $\forall i \in N$，令 $x_i = 1$，$y_{ii} = 1$，对于 $\forall i \neq j$，令 $y_{ij} = 0$。这样得到的平凡解一定满足所有约束，是原问题的一个可行解，则该 0－1 规划模型一定存在最优解。

4　模型求解算法

不考虑约束(7)时，该模型属于集覆盖问题(Set Covering Problem，SCP)。集覆盖问题是经典 NP 难问题，因此该模型也是 NP 难问题。普通的分支定界、割平面法的求解效率并不高，拉格朗日松弛法是求解此类问题的一种有效算法。Fisher[19－20] 详细描述了用拉格朗日松弛法和次梯度法求解复杂整数规划的求解框架，基于拉格朗日松弛法的拉格朗日启发式算法也被广泛用于各种选址问题的求解，Daskin[21－22]、Nozick[13]、Zhu Zhanguo[23] 等人的研究表明拉格朗日启发式算法是求解复杂选址问题的有效算法。针对本文提出的模型，我们设计了相应的拉格朗日启发式算法。

4.1　求解松弛问题

松弛约束(3)和约束(7)，整理后得到松弛问题为：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\left(c_i x_i + \sum_{j=1}^{n}(\mu_0 p_{ij}\lambda_j/\lambda_c - \mu_j a_{ij}) y_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n}\mu_j - \mu_0 \tag{8}$$

$$s.t. \quad y_{ij} \leq a_{ij} x_i \quad i,j \in N \tag{9}$$

$$x_i \in \{0,1\}, y_{ij} \in \{0,1\} \tag{10}$$

其中，μ_j 和 μ_0 分别是与约束(3)和约束(7)对应的拉格朗日乘子。在松弛约束(3)时，是采用该约束的变形形式 $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_{ij} = 1$，显然该式与约束(3)等价。与式(3)比较起来，该式在松弛问题的目标函数和拉格朗日乘子的步长中考虑了覆盖系数 a_{ij} 对分配变量 y_{ij} 的影响，可以得到原问题更为紧凑的下界。在放松约束(7)时，本文采用与 Nozick[13] 类似的处理方法，将该不等式约束的两边同时除以 λ_c，这样是为了平衡约束(3)和(7)对拉格朗日乘子步长更新的影响。

在式(9)和式(10)的约束下，对于给定的 μ_0 和 μ_j，问题(8)很容易求解，在用拉格朗日松弛法求解 FCLP 和 p 中值问题的研究中对类似问题的求解方法有详细描述[21－22]。对于给定的拉格朗日乘子 μ_0、μ_j，松弛问题的具体求解步骤如下：

(1)确定变量 x_i 的值。计算 $\gamma_i = c_i + \sum_{j=1}^{n}\min\{0, (\mu_0 p_{ij}\lambda_j/\lambda_c - \mu_j a_{ij})\}$ ($i \in N$)。如果 $\gamma_i < 0$ 则 $x_i = 1$，否则 $x_i = 0$。

(2)确定变量 y_{ij} 的值。如果 $x_i = 1$ 且 $\mu_0 p_{ij}\lambda_j/\lambda_c - \mu_j a_{ij} < 0$，则 $y_{ij} = 1$，否则 $y_{ij} = 0$。

(3)计算松弛问题的最优目标函数值。对于给定的 μ_0 和 μ_j，松弛问题的最优目标函数值为：

$$z(\mu) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i x_i + \sum_{j=1}^{n}\mu_j - \mu_0$$

这是原问题最优目标函数值的下界 LB 。

4.2 启发式算法求解原问题

在每次迭代中求得与相应拉格朗日乘子对应的松弛问题的最优解，得到原问题最优目标函数值的下界。然后以该松弛问题最优解的选址方案 x_i 为基础，通过启发式算法修补得到原问题的可行解，从而得到原问题最优目标函数值的上界。如果松弛问题的最优解是原问题的可行解，那么该解也是原问题的最优解。

(1)根据松弛问题最优解对应的选址方案 x_i（$i \in N$），求得分配变量 y_{ij}（$i,j \in N$）。根据给定的选址方案 x_i（$i \in N$），将各需求点分配给到达该需求点期望通行时间最短、能覆盖该需求点且已开设的抢修点进行抢修，如存在多个满足上述条件的抢修点时，从其中任选一个。显然对于给定的选址方案 x_i（$i \in N$），这样求得的 y_{ij}（$i,j \in N$）满足约束(2)，并且让约束(7)左边的值最小。对于根据松弛问题最优解对应的选址方案按上述方法求得 y_{ij}（$i,j \in N$），由于存在分配系数 a_{ij} 的限制，可能会存在某些需求点没有被分配给任何抢修点的情况，即此时求得的 y_{ij}（$i,j \in N$）不一定满足约束(3)。

(2)修补松弛问题最优解对应的选址方案 x_i（$i \in N$）和经过步骤(1)求得的 y_{ij}（$i,j \in N$），使之满足约束(3)。①找出所有未被分配的需求点 $J^1 = \{j : \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 0, j \in N\}$，计算所有备选点对未被分配需求点的覆盖次数之和 $nc_i = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \times 1_{J^1})$（$i \in N$），其中当 $j \in J^1$ 时 $1_{J^1} = 1$，否则 $1_{J^1} = 0$。②找出对未被分配的需求点覆盖次数大于零的备选点 $I^1 = \{i : nc_i > 0, i \in N\}$，计算 I^1 中备选点对所有需求点的覆盖次数之和 $tnc_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$（$i \in I^1$）。③计算 I^1 中的备选点对约束(7)中不等式左边可能的贡献值 $lf_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_{ij} \lambda_j$（$i \in I^1$），及其平均值 $avgf_i = lf_i / tnc_i$（$i \in I^1$）。④计算备选应急抢修点的平均开设成本 $avgc_i = c_i / nc_i$（$i \in I^1$），则备选应急点的综合评分 $sg_i = avgc_i \times \exp(avgf_i)$（$i \in I^1$），在 sg 值最小的位置开设一个应急抢修点。⑤根据增设应急抢修点后的 $\{x_i\}$，按 1)中的方法计算分配变量 $\{y_{ij}\}$。⑥重复以上步骤①—⑤，直至所有需求点都被分配给已开设的抢修点，即 $J^1 = \varnothing$。

(3)对步骤(2)得到的解进行修补，使之满足约束(7)。①计算 $fv_j = \sum_{i=1}^{n} y_{ij} p_{ij} \lambda_j$（$j \in N$），并计算 $tfv = \sum_{j=1}^{n} fv_j$。②如果 $tfv \le \lambda_c$，则所得到的解已满足约束(7)。如果 $tfv > \lambda_c$，计算每个可能的分配关系对约束(7)左边的贡献值 $\delta_{ij} = p_{ij}\lambda_{ij} - fv_j$（$i,j \in N$），以及每个备选点对约束(7)左边的贡献值 $\gamma_i = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} \times 1_{J_i^2})$（$i \in N$），其中当 $j \in J_i^2$ 时 $1_{J_i^2} = 1$，否则 $1_{J_i^2} = 0$，$J_i^2 = \{j : \delta_{ij} < 0, j \in N\}$（$i \in N$），$\gamma_i$ 表示在备选点 i 开设一个抢修点时对约束(7)左边的减少值。③确定集合 $I^2 = \{i : \gamma_i \le \lambda_c - tfv, i \in N\}$，$I^2$ 表示新开设一个抢修点后得到的解能满足约束(7)的备选点集合。如果 $I^2 \neq \varnothing$，则在 I^2 中开设成本最小的备选点开设一个抢修点；如果 $I^2 = \varnothing$，则在 γ_i / c_i（$i \in N$）值最小的备选点开设一个抢修点。④根据增设应急抢修点后的 $\{x_i\}$，按 1)中的方法计算分配变量 $\{y_{ij}\}$。⑤重复以上步骤①—④，直至 $tfv \le \lambda_c$。

(4)删除抢修点开设方案中的冗余抢修点。经过以上步骤(1)—(3)得到的解为原问题的可行解，按抢修点开设成本从大到小的顺序，对每个已开设的抢修点依次检查删除该抢修点后得到的解是否仍是原问题的可行解，如仍为原问题可行解则此抢修点是冗余抢修点，在选址方案中关闭此抢修点。

计算经过以上步骤(1)—(4)所得到的可行解对应的原问题目标函数值，即得到原问题最优目标函数值的上界 UB 。

4.3 更新拉格朗日乘子

(1)用 LB 和 UB 更新原问题最优目标函数值到当前为止的最好上下界 LB^* 和 UB^* 。如果 UB^* 被更新，将步长系数 β^t 恢复为初始值。如果下界连续 K 次未得到更新，令 $\beta^t = \beta^{t-1}/2$ 。

(2)计算松弛的约束条件所对应的次梯度。$g_j = 1 - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_{ij}$，$g_0 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} p_{ij} \lambda_j / \lambda_c - 1$ 。

(3)计算改进的次梯度。这里采用 Wang[24]提出的改进次梯度来改善算法的效率，根据此方法计算改进的次梯度为：

$$g'_j = \begin{cases} 0 & \text{如果 } g_j = 0 \text{ 且 } \mu_j = 0 \\ g_j & \text{其它} \end{cases} \quad j \in N \tag{11}$$

$$g'_0 = \begin{cases} 0 & \text{如果 } g_0 \le 0 \text{ 且 } \mu_0 = 0 \\ g_0 & \text{其它} \end{cases} \tag{12}$$

(4)计算修正后次梯度的加权值 wg，其中 θ 是权重因子。

$$wg_j^t = (wg_j^{t-1}\theta + g_j^t)/(1+\theta) \quad j \in N \tag{13}$$

$$wg_0^t = (wg_0^{t-1}\theta + g_0^t)/(1+\theta) \tag{14}$$

(5)计算步长 $step$ 。

$$step^t = \frac{\beta^t(UB^* - LB)}{\sum_{j=1}^{n}(g'_j)^2 + (g'_0)^2} \tag{15}$$

(6)计算更新的拉格朗日乘子。

$$\mu_j^{t+1} = \max\{0, \mu_j^t + wg_j^t step^t\} \quad j \in N \tag{16}$$

$$\mu_0^{t+1} = \max\{0, \mu_0^t + wg_0^t step^t\} \tag{17}$$

4.4　算法终止条件及拉格朗日乘子初始化

当满足以下条件之一时，终止算法。a) $t > t_{max}$ ，t_{max} 是最大迭代次数；b) $(UB^* - LB^*)/LB^* \leq \in$ ，$\in$ 是给定的最好上下界相对误差阈值；c) $\beta^t \leq \beta_{min}$ ，β_{min} 是给定的步长系数的最小极限值。

拉格朗日松弛法的计算效果对拉格朗日乘子的初始值比较敏感。通过对上文提出的算法进行计算实验，观察计算实验终止时的拉格朗日乘子取值，我们发现以 $\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i/n$ ，$\mu_i = \mu_0/10$ 作为拉格朗日乘子初始值时，算法对本文模型的求解效果较好。

5　算例分析

为验证算法的有效性，本节用大量随机生成的算例对算法进行测试。按问题规模大小 n 将问题分为 3 大类，每类问题随机生成 10 个算例，再根据时间阈值 t_c 和最大失效迟到总次数 l_c 的不同取值组合对算例进行计算。在算例中，所有需求点的位置随机分布在(0，10^5 米)×(0，10^5 米)的平面上，任意两个需求点的距离为平面上的欧式距离。抢修点开设成本 c_i 取自均值为 30、均方差为 3 的正态分布。需求点设备的年均故障率 λ_j 取自均值为 4、方差为 1 的正态分布。不同需求点之间的平均通行速度取 25km/hr，通行时间的均方差与均值的比值为 0.1。确定某需求点是否能被某抢修点覆盖的概率阈值 $p_{c1} = 0.95$ ，最大故障迟到总次数的概率阈值 $p_{c2} = 0.99$ 。

拉格朗日启发式算法中的各参数取值如表 1 所示。

表 1　拉格朗日启发式算法参数取值

参数	取值
上下界之间相对误差下界：ϵ	0.0001
最大迭代次数：$t_{\max}$	2000
步长系数初始值：β^0	2
步长系数 β 的下界：$\beta_{\min}$	0.0001
β 减半前下界未得到改善的最大次数：K	30
次梯度加权因子：θ	0.3

将第 4 部分中提出的算法用 MATLAB2009b 编程，运行所用电脑 CPU 为 intel T6570 2.10GHz，内存为 2G，随机生成算例的计算结果如表 2 所示。表 2 中的问题规模 n 是需要抢修的需求点数量，也是备选点数量。上下界相对误差平均值是 10 个随机算例计算得到的 $(UB^* - LB^*)/LB^*$ 的平均值，上下界相对误差最大值是 10 个随机算例计算得到的 $(UB^* - LB^*)/LB^*$ 的最大值，平均迭代时间是计算 10 个随机算例所占用 CPU 时间的平均值。

表 2　拉格朗日启发式算法对随机生成算例的计算结果

问题规模 n	时间阈值 t_c（分钟）	l_c（次）	上下界相对误差平均值(%)	最大上下界相对误差(%)	平均迭代步数	平均迭代时间（秒）
100	20	0	0.45	1.30	2000	4.1
100	20	1	0.50	1.21	2000	3.8
100	20	2	0.70	1.30	2000	3.7
100	30	0	0.96	3.69	2000	3.6
100	30	1	0.59	1.33	2000	3.2
100	30	2	0.90	2.29	2000	3.3
200	20	0	0.22	0.56	2000	11.5
200	20	1	0.33	0.82	1820	10.4
200	20	2	0.31	0.85	1824	10.6
200	30	0	0.93	1.48	2000	12.9
200	30	1	0.80	2.07	2000	11.6
200	30	2	1.09	1.72	2000	11.6
300	20	0	0.52	0.95	2000	75.6
300	20	1	0.66	1.59	2000	56.2
300	20	2	0.62	1.27	2000	49.7
300	30	0	1.51	2.96	2000	85.1
300	30	1	1.47	2.76	2000	75.3
300	30	2	1.41	2.52	2000	67.1

用此拉格朗日启发式算法求解了 3 类、18 组共 180 个算例。从表 2 中可以看出，所有的 18 组算例计算得到的上下界相对误差平均值都小于 2%，最大的上下界相对误差平均值为 1.51%。在 180 个算例计算结果中，仅有 1 个算例的上下界相对误差为 3.69%，其它算例的上下界相对误差均在 3%以下。在其它参数保持不变的前提下，当确定时间阈值 t_c 从 20 变为 30 时，上下界相对误差平均值有变大的趋势。在绝大多数算例中算法均在到达最大迭代步数限制时终止，随着问题规模增大 CPU 占用时间的平均值有明显增加。表 2 中的数据表明，本文给出的拉格朗日启发式算法能有效地求解所提出的模型。

6　结语

本文根据设备应急抢修管理的特点，综合考虑

了通行时间和设备故障发生的随机性，构建了应急抢修系统整体服务水平有保证的应急抢修点选址模型。本模型以应急抢修点总开设成本最小化为目标，约束条件中考虑了覆盖关系约束、设备分配约束和整体服务水平约束，通过证明模型中整体服务水平的度量指标服从泊松过程，从而将原模型转化为一个线性 0－1 规划模型。并针对本文提出的模型，设计了一个拉格朗日启发式算法对模型进行求解，能够得到原问题的满意解。通过对大量随机生成的算例进行计算，表明该算法能求得的问题可行解非常接近于最优解，这说明本文提出的拉格朗日启发式算法在求解此模型时能得到较为满意的结果。

在本文的研究中未考虑应急抢修点的能力限制，增加应急抢修点能力限制后会大大增加模型的求解难度，但能更好地描述现实问题，这可以作为下一步研究的改进方向。

参考文献：

[1] Brotcorne L，Laporte G，Semet F. Ambulance location and relocation models[J]. European Journal of Operational Research，2003，147(3)：451－463.

[2] Berman O，Drezner Z，Wang Jiamin，et al. The minimax and maximin location problems on a network with uniform distributed weights [J]. IIE Transactions，2003，35(11)：1017－1025.

[3] Chang M S，Tseng Y L，Chen Jingwen. A scenario planning approach for the flood emergency logistics preparation problem under uncertainty[J]. Transportation Re- search Part E：logistics and Transpor- tation Review，2007，43(6)：737－754.

[4] Alsalloum O I，Rand G K. Extensions to emergency vehicle location models[J]. Computers & Operations Research，2006，33(9)：2725－2743.

[5] Gendreau M，Laporte G，Semet F. The maximal expected coverage relocation problem for emergency vehicles [J]. Jour- nal of the Operational Research Society，2005，57(1)：22－28.

[6] Ingolfsson A，Budge S，Erkut E. Optimal ambulance location with random delays and travel times[J]. Health Care Management Science，2008，11(3)：262－274.

[7] Rawls C G，Turnquist M A. Preposi- tioning of emergency supplies for dis- aster response[J]. Transportation Re- search Part B：Methodological，2010，44(4)，521－534.

[8] Ball M O，Lin Fengling. A reliability model applied to emergency service vehicle location[J]. Operations Research，1993，41(1)：18－36.

[9] Beraldi P，Bruni M E. A probabilistic model applied to emergency service vehicle location[J]. European Journal of Operational Research，2009，196(1)：323－－331.

[10] 陈志宗，尤建新．重大突发事件应急救援设施选址的多目标决策模型[J]. 管理科学，2006，19(4)：10－14.

[11] 张玲，黄钧．基于场景分析的应急资源布局模型研究[J]. 中国管理科学，2008，16(10)，164－167.

[12] Heung-Suk H. A stochastic set-covering location model for both ameliorating and deteriorating items[J]. Computers & In- dustrial Engineering，2004，46(2)：313－319.

[13] Nozick L K. The fixed charge facility location problem with coverage restric- tions [J]. Transportation Research Part E：Logistics and Transportation Review，2001，37(4)：281－296.

[14] Beraldi P，Bruni M E，Conforti D. Designing robust emergency medical ser- vice via stochastic programming [J]. European Journal of Operational Research，2004，158(1)：183－193.

[15] Lecluyse C，Van Woensel T，Peremans H. Vehicle routing with stochastic time-dependent travel times[J]. 4OR：A Quarterly Journal of Operations Research，2009，7(4)：363－－377.

[16] 陈琨，于雷．基于对数正态和分布的路径行程时间可靠性模型[J]. 北京交通大学学报，2009，33(3)：35－39.

[17] 贺国芳，孙芳．现场可修系统的可靠性数据处理[J]. 北京航天航空大学学报，1995，21(4)：66－71.

[18] Ross S M. 应用随机过程—概率模型导论[M]. 北京：人民邮电出版社，2007.

[19] Fisher M L. The Lagrangian relaxation method for solving integer programming problems[J]. Management science，1981，20(1)：1－18.

[20] Fisher M L. An applications oriented guide to Lagrangian relaxation[J]. In- terfaces，1985，20(1)：10－21.

[21] Daskin M S. Network and discrete loca- tion：models，algorithms，and applica- tions[M]. New York：Wiley，1995.

[22] Snyder L V，Daskin M S. Reliability models for facility location：The expect- ed failure cost case[J]. Transportation Science，2005，39(3)：400－416.

[23] Zhu Zhanguo，Chu Fang，Sun Linyan. The capacitated plant location problem with customers and suppliers matching[J]. Transportation Research Part E：Logistics and Transportation Review，2010，46(3)：469－480.

[24] Wang S H. An improved stepsize of the subgradient algorithm for solving the lagrangian relaxation problem [J]. Computers & Electrical Engineering, 2003, 29 (1): 245－249.

Service Level Guaranteed Emergency Repair Station Location Model and Solution

YU Peng, JUAN Zhi-cai

(Antai College of Economics & Management, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200052, Chian)

Abstract: The problem of emergency repair station location for a kind of valuable equipments with low failure rate is investigated in this paper. Considering this problem, equipment failure frequencies and the travel time from emergency station to equipment are stochastic, and each equipment should be assigned to an emergency repair station, and the service level of entire emergency repair system should be above some standard level. The distribution of the total times of emergency repair teams be late when equipment be failed has been derived under several assumptions. The problem of emergency repair station location is characterized as 0－1 integer programming model, with minimization the whole setup cost of emergency repair stations as objective function, and equipments been covered, emergency repair assignment relation, entire system's service level as constraints. A lagrangian relaxation heuristic algorithm is proposed to solve the model by relaxing several constraints. The effective of the model and algorithm has been proved by calculating a large number of random examples.

Key words: emergency repair station; facility location; service level guarantee; lagrangian relaxation