

## The Study on Sinusoidal High Stability Drive Technology of Cupped Wave Gyro

XIE Di, WU Xuezhong\*, SU Jianbin, TAO Yi, ZHOU Zelong, LI Hao

(College of Mechanical Engineering and Automation, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

**Abstract:** Cupped wave gyro has a very high Q factor which ranges from 20000 to 100000 generally. Consequently, only 0.3‰ of the drive signal frequency error causes the gyro mechanical sensitivity reduced by 99%. To solve this problem a high-performance sine signal generation algorithm based on direct digital frequency synthesizer is proposed. Then the root causes of frequency jitter are estimated and analyzed from statistical domains, and a kind of jitter separation method for the design of frequency source is presented. This method provides a theoretical guidance and basis for reducing the blindness of the frequency source correction and optimization. After optimized by jitter separation method, the short-term stability of frequency source improves about 20% from Allan variance. Finally, the test of time domain and frequency domain demonstrates that the final drive signal frequency stability maintains at a level of 1 mHz.

**Key words:** cupped wave gyro; high stability sine signal; jitter separation; direct digital frequency synthesizer; optimization method

EEACC:11801;11827

doi:10.3969/j.issn.1004-1699.2011.12.011

## 杯形波动陀螺高稳定度正弦驱动技术研究\*

谢 笛, 吴学忠\*, 苏剑彬, 陶 溢, 周泽龙, 李 浩

(国防科学技术大学机电工程与自动化学院, 长沙 410073)

**摘 要:** 杯形波动陀螺具有极高的 Q 值, 一般都在 20 000 以上, 因此仅仅 0.3‰ 的驱动信号频率误差都会使陀螺机械灵敏度降低 99% 以上。针对这一问题实现了一种基于直接数字频率合成的高性能正弦信号生成算法, 以此为基础从统计域的角度对引起频率源抖动的根源进行了估计分析, 并给出了一种具有针对性的抖动分离方法, 为频率源的设计提供了理论指导和依据, 降低了修正和优化频率源的盲目性。由阿伦方差可知采用抖动分离方法优化后, 频率源短期稳定度提高约为 20%。通过对设计的频率源进行一系列时域和频域测试分析, 证明最终的驱动信号频率稳定在 1 mHz 以内。

**关键词:** 杯形波动陀螺; 高稳定度正弦信号; 抖动分离; 频率直接合成; 优化方法

中图分类号: TM938.81

文献标识码: A

文章编号: 1004-1699(2011)12-1712-06

杯形波动陀螺是一种采用杯形谐振子的固体波动陀螺, 具有精度高、稳定性好、启动快、工作温度范围大、线性过载不敏感、机械部件结构简单等突出特点。在战术导弹、轻小型飞机甚至于在卫星以及航天飞机上都有极强的适用性, 具有十分广阔的应用前景<sup>[1]</sup>。

杯形波动陀螺是利用弹性波的惯性效应来检测外界输入角速度<sup>[2]</sup>。美国 Innalabs 公司和英国 Watson 公司对这种高性能杯形陀螺都开展了大量研究<sup>[3-4]</sup>, 由于种种原因却只有很少研究成果公布。陀螺杯形谐振子采用超精密加工技术制造, 高品质因数的特性决定了较小的驱动频率偏差会大幅降低

陀螺的检测灵敏度, 还会使谐振子产生正交振动, 引起陀螺输出漂移(也称为正交漂移), 从而大大降低陀螺性能。

正弦信号的产生方法多种多样, 比如迭代法, 级数近似法, CORDIC 算法等, 而直接数字频率合成法(DDS)又以精度高和数据运算量小的优点广泛应用于高精度频率源设计等领域, 然而其结构中的正弦查找表占用存储空间较大是其主要的缺陷<sup>[5]</sup>, 也限制了这种方法在陀螺测控系统这一类领域的应用。此外, 由于实际电路以及数据精度等非理想特性引入的噪声和抖动造成输出频率抖动增加, 降低了输

出频率的稳定度。

因此, 首先针对直接数字频率合成法存储空间庞大的缺陷给出了一种差分压缩算法, 相对于现有的压缩算法, 如高低查找表等, 差分压缩算法计算简单, 适用于陀螺这类高实时性测控系统。其次重点针对设计的正弦频率源频率抖动的问题, 采用了一种新的基于统计域的理论对系统中主要抖动源进行分析和估计, 衡量其对频率源的影响, 并分析了一种基于功率谱密度(PSD)的抖动分离方法。国内外的研究中关于 DDS 算法频率稳定度的优化方法基本都是从 DDS 算法架构这个角度去实现的, 优化算法实现复杂, 硬件要求很高, 软件很难实现。因此从整个系统的角度对抖动源进行分析和优化, 这种新的角度避开了复杂算法架构分析, 大大降低了优化的复杂度, 同时也能有效的提高频率源的频率稳定度。最后, 通过时域和频域测试以及记录的频率数据进行漂移分析、求解阿伦方差等验证了这种新方法对频率短期稳定度的提高, 最终的频率源性能达到了杯形波动陀螺的要求。

## 1 驱动信号频率稳定度需求分析

杯形波动陀螺也是利用了哥氏效应和二维谐振子激励受迫振动的基本原理。首先给谐振子底面相互垂直的四个压电激励电极施加激励电压信号, 从而导致电极振动, 振动传递到谐振环, 激励出四节点驻波<sup>[6]</sup>, 如图 1(a) 所示。当存在角速度输入时, 谐振子产生的驻波幅值与角速度大小呈正比关系, 由压电效应经过信号变换和处理即可得到输入角速度。

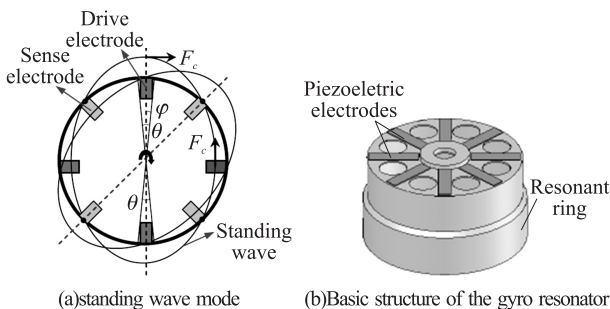


图 1 杯形陀螺谐振子示意图

为简化分析陀螺性能与驱动信号稳定度的关系, 这种解耦陀螺模型往往可以描述成简单的集中参数质量-弹簧-阻尼系统<sup>[7]</sup>。由于陀螺结构高度对称, 可近似认为其检测轴与驱动轴特性参数完全一致。于是将陀螺模型表示为两自由度理想二阶线性常微分方程组:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + kx_1 = f_x \\ m\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 + kx_2 = f_y \end{cases} \quad (1)$$

式中  $m$  为谐振子等效质量;  $x_1, x_2$  分别为对应轴的位移。

利用压电方程可推导出压电电极在频率  $\omega$ , 幅值为  $U$  的正弦电压下沿其压电电极长度方向驱动力, 可近似表示为:

$$f_x = k\epsilon d_{31} U \sin \omega t \quad (2)$$

式中  $k$  为和谐振子尺寸结构相关的常数;  $\epsilon$  材料弹性系数,  $d_{31}$  压电常数。

由哥氏力计算公式得:  $f_y = 2m\Omega \times \dot{x}_1$ , 以及方程(1)和方程(2)可以解得检测轴位移方程为:

$$x_2 = B \cos(\omega t - \varphi)$$

其中:

$$B = \frac{2\Omega m k \epsilon d_{31} U \omega}{2\omega_n^4 \{ [1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (1/Q^2)(\omega/\omega_n)^2 \}} \quad (3)$$

其中  $\Omega$  为外加角速度,  $\omega_n$  为陀螺谐振频率,  $Q$  为陀螺的品质因素。

可得陀螺仪机械灵敏度为:

$$S = \frac{B}{\Omega} = \frac{2m k \epsilon d_{31} U \omega}{2\omega_n^4 \{ [1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (1/Q^2)(\omega/\omega_n)^2 \}} \quad (4)$$

假设陀螺谐振频率为 3 000 Hz,  $Q$  值为 20 000, 理论情况下  $S_0 = 4 \times 10^8$ , 而不同稳定度的驱动信号对应不同的机械灵敏度退化率  $\eta = 1 - S/S_0$ , 如图 2 所示。

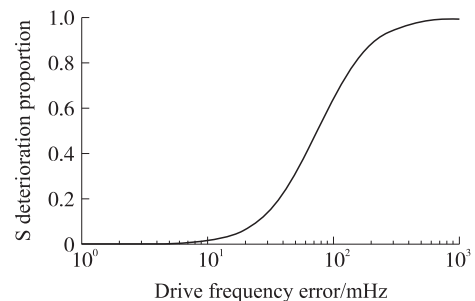


图 2 机械灵敏度与频率稳定度的关系曲线

由上图知当驱动信号频率稳定度在 5 mHz 时, 灵敏度降低了约 1%。要充分发挥陀螺性能, 驱动频率稳定度至少要大于 5 mHz, 所以将频率稳定度设定在 1 mHz, 以充分发挥陀螺性能。

## 2 系统实现及优化方法

DDS 算法输出信号的理想频率为:  $f_o = (N/2^{L_p})f_r$ , 其中  $f_r$  为参考时钟频率,  $L_p$  为相位累加器位宽,  $N$  为频率控制字; 当  $N=1$  时  $\Delta f = f_r/2^{L_p}$  则为理想 DDS 分辨率<sup>[8]</sup>, 输出信噪比表达式为<sup>[8]</sup>:  $S/N \approx 6.02k - 3.92$  (dB)。

在基于 Analog 公司 ADSP21364 数字信号处理器构建的杯形波动陀螺测控平台上, 以软件方式实现了 30 位相位累加器, 14 位相位截断位数(即正弦查找表深度)的 DDS 算法。由于 DDS 算法的基本

原理十分成熟,故不再赘述。

为克服传统 DDS 算法的缺陷和优化频率稳定度,接下来给出了查找表的压缩算法,以及系统中频率抖动的分析和分离方法。

### 2.1 查找表压缩算法

为了解决查找表(LUT)占用巨大的存储空间的缺陷,下文给出了一种简单清晰的差分压缩算法。

将所需要存储的四分之一周期的正弦值,采用一个函数  $D(P)$  来对其进行分解,于是在差分算法中查找表只需存储误差项  $f(P)$ ,从而减小了存储占用的空间,如式(5):

$$f(P) = \sin\left(\frac{\pi P}{2}\right) - D(P), 0 \leq P < 1 \quad (5)$$

最简单的采用直线逼近即取  $D(P) = P$ ,于是可以得到:

$$\max[\sin(\pi P/2) - P] \approx 0.21 \max[\sin(\pi P/2)] \quad (6)$$

因此,由于存储幅值的减小,查找表存储可以减小2位深度,但是存储空间的减小是以增加一次加法运算为代价的。在正弦相位幅度转换输出时,则必须增加一次加法运算,如式(7):

$$[\sin(\pi P/2) - P] + P \quad (7)$$

采用双三角近似的差分算法,将增加两次加法运算,而正弦查找表被压缩了3位。例如取式(8)所示的差分项。

如果采用更高阶的抛物线逼近<sup>[9]</sup>,可以为正弦查找表压缩4位有效长度。不同方法在LUT中的数据存储情况如图3所示。

$$D(P) = \begin{cases} \sin(\pi P/2) - 1.35P, & 0 \leq P < 0.5 \\ \sin(\pi P/2) - 0.55P - 0.65, & 0.5 \leq P < 1 \end{cases} \quad (8)$$

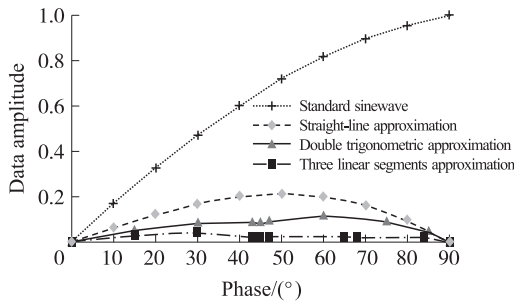


图3 不同逼近算法中查找表的存储数据幅值

这种近似算法没有复杂的计算,因此十分适合于运用于 DDS 算法中。采用三段线性差分压缩后,体积压缩4位,查表体积有原来的128 kbyte,减小为4 kbyte。

### 2.2 频率源抖动估计与分离方法

由于电路的各种噪声和非理想因素,带来的时序抖动和幅度抖动,使得实际输出的频率稳定度小

于理想情况。因而需要对频率源进行一定的优化以达到需要的性能指标。

#### 2.2.1 抖动源的机理与建模

在实际的杯形陀螺测控系统中,多重周期性抖动和多重高斯抖动是造成输出频率稳定度降低的主要原因,而这两者又分属于确定性抖动和随机抖动<sup>[10]</sup>。多重周期性抖动是由于频率参考源精度有限,信道的非理想性,以及周期性调制等众多因素引起,虽然原因复杂,但是其原理都相似。这里假设单周期性抖动也是正弦型,那么  $N$  重周期性抖动可以写为:

$$\Delta t(t) = \sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (11)$$

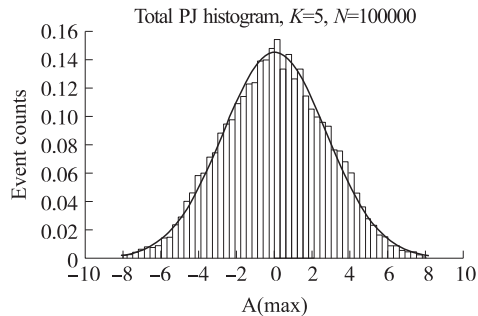
其中  $A_i, \omega_i, \varphi_i$  分别为各周期性抖动幅值,角频率和初相位。

通过上式将所有周期性抖动叠加后的时间  $\Delta t(t)$  对概率分布密度函数(PDF)进行估计:

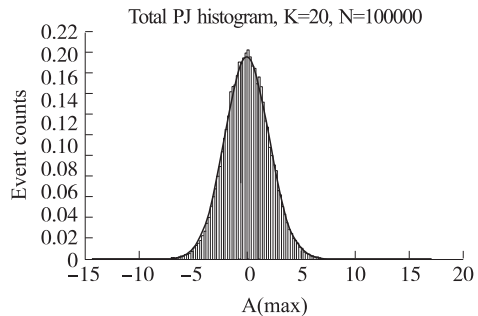
$$f_{PJ}(\Delta t) = \text{Hist}(\Delta t(t)) \quad (12)$$

式中 Hist 是建立在时间记录  $\Delta t(t)$  基础上的直方图近似函数。

总周期性抖动是依赖于众多因素,很难得出其通用特征公式,但是可以假设每个周期性抖动是独立的,其幅度,频率和相位有界分布<sup>[11]</sup>,通过蒙特卡罗仿真分析可以研究多周期抖动特征。仿真结果如图4所示<sup>[12]</sup>。



(a)5个独立的周期抖动



(b)20个独立的周期抖动,采用高斯分布曲线覆盖

图4 不同数目的周期抖动源总概率分布

多重周期性抖动的频谱是单周期抖动频谱线性叠加,所以理论上其频谱线对应多个抖动源。

多重高斯抖动通常对应于电路热噪声,闪烁噪



声以及散弹噪声以及一些高阶噪声共同作用<sup>[13]</sup>。而单高斯抖动可以描述为:

$$f_{GJ}(\Delta t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\Delta t - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

多高斯抖动是一系列高斯抖动源作用的叠加,由于高斯抖动的功率谱密度(PSD)与白噪声功率谱密度近似<sup>[14]</sup>,为分析计算方便,可以采用白噪声的功率谱来代替高斯噪声的功率谱:

$$S_{GJ}(f) = \varepsilon \quad (14)$$

采用模拟高斯抖动源,运用蒙特卡罗方法进行时域记录,并采用傅里叶变换获得其 PSD 估计,最后获得其统计域的 PDF,如图 5 所示,通过数值仿真进而说明了高斯抖动的时域,频域以及统计域 PDF 之间的关系<sup>[12]</sup>。这些抖动分量的 PDF 模型,是进行抖动分离与分析的基础和基本单元。

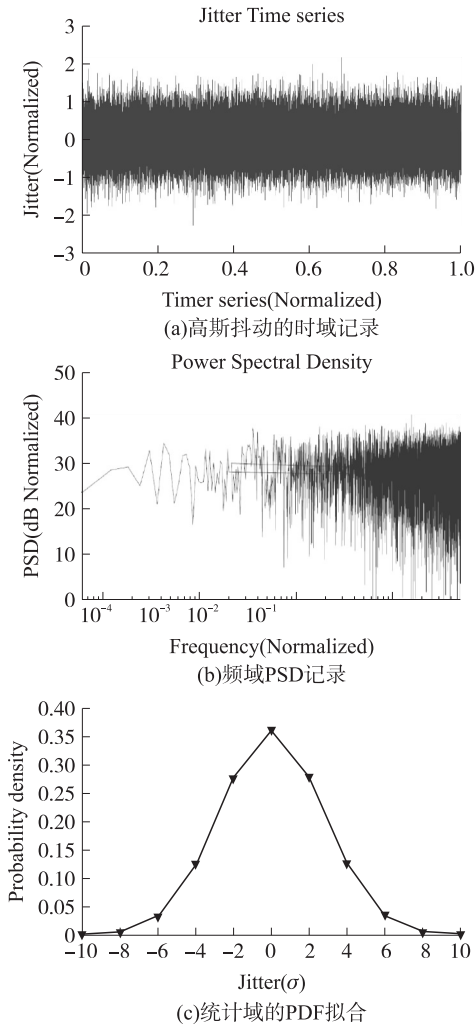


图 5 同一高斯抖动源,在  $10^6$  采样条件下

### 2.2.2 基于 PSD 的抖动分离方法

上节运用统计信号和线性系统理论定量讨论了系统中的抖动分量,针对多重周期性抖动和多重高斯抖动两个导致频率抖动的主要原因,假设其他非

理想条件下产生的抖动和噪声被忽略,进而简化周期抖动与高斯抖动的分离。

基于 PSD 函数,满足如下条件的谱线都会被识别为周期性抖动<sup>[12]</sup>:

$$S_G(f_l) \geq N\sigma_{\text{PSD}} \quad (15)$$

其中  $f_l$  表示第  $l$  个周期抖动峰的频率,  $N$  为门限量级,一般  $N \geq 3$ ,可保证 99.97% 以上的置信度,  $\sigma_{\text{PSD}}$  是 PSD 的均方根。

这样可以分离出很多周期性抖动源,但是 PSD 中没有相位信息,需要对周期性抖动的相位进行假设。由于大量的周期抖动的存在,其相位一般服从于均匀分布<sup>[14]</sup>,通过下式建立总的周期抖动的 PDF:

$$f_{PJ} = \text{Hist} \left[ \sum_{l=1}^L \Delta t_{PJl} \sin(2\pi f_l t_n + \phi_l) \right], n=1,2,\dots,N \quad (16)$$

其中  $\Delta t_{PJl}, \phi_l$  表示第  $l$  个周期抖动峰的峰值和相位。

所有被识别的周期抖动移除之后,就得到了总的高斯抖动的 PSD,而在所关心的频率范围内,可以通过下式来估计多重高斯抖动的均方根<sup>[15]</sup>:

$$\sigma = \int_{f_L}^{f_H} S_{\Delta}(f) df \quad (17)$$

这是一种可以在一定频率范围内准确估计高斯抖动均方根值的方法,通过估计得到的均方根以及分离方法,可以得出不同抖动源以及对频率稳定度的影响程度。基于 PSD 的分离方法,可以为整个陀螺测控系统中降低频率稳定度的抖动源进行修正提供准确的指导,也为稳定度指标的设计提供了一种更准确的方法。

## 3 测试

通过以上分析,在 DDS 正弦频率源软件实现代码中,针对特定抖动源进行了简单的修正优化。扫频测得陀螺谐振频率为 3 166.785 Hz。最后,对频率源性能时域测试结果如 6 所示。

通过频谱分析,可以得到优化前后信噪比无明显变化都约为 80 dB,如图 7 所示。

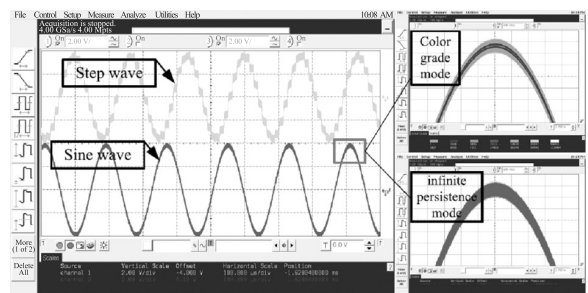


图 6 左图:浅色:DDS 结构 DAC 输出的阶梯波信号,深色曲线实为正弦信号;右图:上部和下部分别是 Agilent 示波器色彩等级模式和无限余辉模式观测的正弦信号局部图。

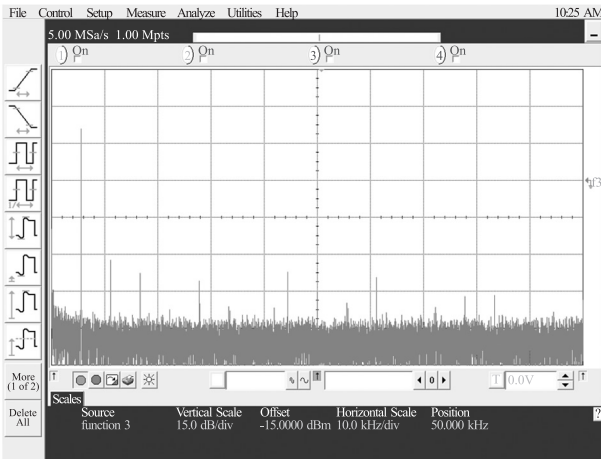


图7 输出信号频谱

中心频率都为 3.16 kHz,纵轴刻度为 15 dB/div

通过 Agilent 数字多用表 3.5 h 的测试,获得优化前后频率数据分布如图 8 所示,图 8(a)中由频率计测得的数据有大量的数据点超过目标频率 3 166.785 Hz ~3 166.786 Hz,而图 8(b)中则明显少于图 8(a),由此定性可知优化前后频率稳定度有明显提高。

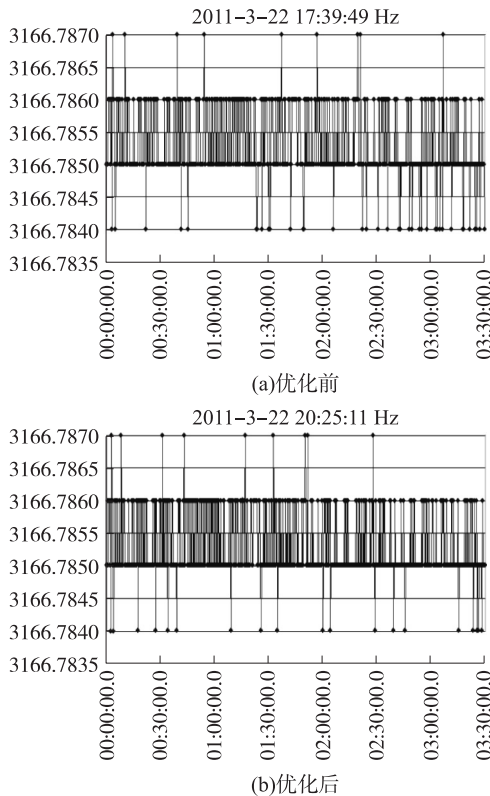


图8 优化前后频率采样记录

对 3.5 h 内记录的数据进行数值分析,得到了测试环境温度曲线,频率数据残差和频率漂移曲线,如图 9 所示。图 9 中温度曲线显示环境温度在测试时间段内非恒温,但残差曲线和频漂曲线没有出现与温度变化相同的漂移趋势,说明整个设计对小范围温度变化不敏感。

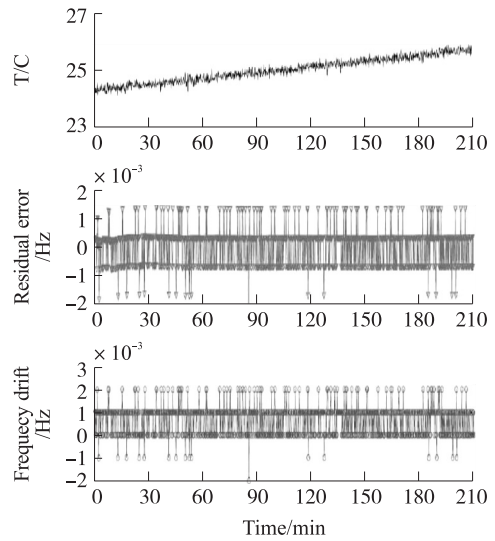


图9 系统频率漂移

随着测量时间的延长,由于大量随机变量的叠加,由中心极限定理可知,和变量最终将服从高斯分布。短期内由于调频闪烁噪声使频率源随机起伏过程并不平稳,短期内它的概率分布随时间的延续而改变的。因此频率短期稳定度用标准方差来表征就不准确,国内外常用阿伦方差代替。此外,对于采用修正后的频率稳定度的改变,在其他指标上不易体现,而在阿伦方差中可以清楚的表现出来。

国内外普遍采用每组取样数  $N=2$ , 取样周期  $T$  等于取样时间  $\tau$  的阿伦方差作为短期稳定度的定义<sup>[16]</sup>,也称为无间歇阿伦方差,如式(23)所示:

$$\sigma^2(N, T, \tau) = \frac{1}{mf_o} \sum_{k=1}^N (f_k - \bar{f}_k)^2 \quad (23)$$

对比采用修正算法前后频率源的阿伦方差,可以得到采用修正算法后短期频率稳定度提高约 20%,如图 10 所示。

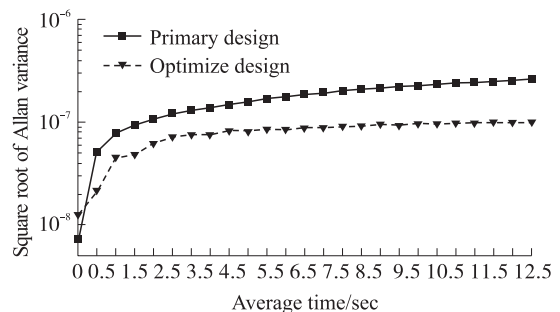


图10 抖动修正前后阿伦方差

深入对系统中抖动源的研究和分析,采用更精确的分离方法能更有效提高频率稳定度,这是值得继续深入的研究工作。

测试过程中应用到的测试系统如图 11 所示。其中 Tek TDS2012 示波器作为时域波形测试工具, Agilent 8104A 是主要的频域性能测试系统, Agilent

34410A 是测量信号频率和记录频率数据的主要工具,其记录的数据为前面试验测试中频率稳定度的定性分析和定量计算提供了依据。

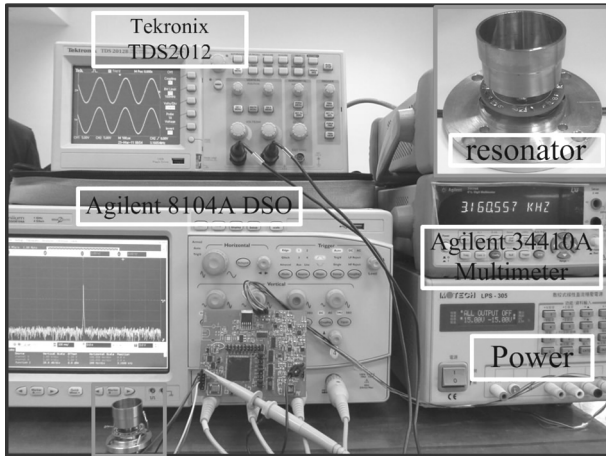


图 11 正弦频率源性能测试系统组合照片

## 4 结论

首先以 DDS 算法为基础产生了杯形波动陀螺的正弦驱动信号。

(1) 对于杯形波动陀螺,理想情况下驱动信号稳定度越高越有利于发挥其性能,根据性能需求将频率稳定度设定在 1 mHz。

(2) 采用差分压缩算法减小了 4 位查找表存储空间,一定程度弥补了 DDS 算法的缺陷。

(3) 对于周期抖动和高斯抖动为主的频率源,采用 PSD 分离算法,可以估计出二者各自对频率稳定度的影响。通过简单的修正,对频率短期稳定度有 20% 的提高,频率稳定度优于 1 mHz。

(4) 该方法适用于杯形陀螺驱动信号的分析 and 设计,也为其他类似的高 Q 值振动陀螺驱动信号分析和设计提供了参考。

## 参考文献:

- [1] Chokovani V, Umakhanov I O, Marusyk P I. The Compensated Differential CVG [ C ] // Symposium Gyro Technology, Karlsruhe, Germany, 2008. 3. 1-3. 8.
- [2] Yi Tao, Xuezhong Wu, Dingbang Xiao, et al. A Novel Cupped Solid-State Wave Gyroscope [ C ] // Proceeding of 2010 International Conference on Mechanical and Aerospace Engineering, Malaysia: IEEE, 2010: 449-453.
- [3] Chikovani V V, Okon I M, Barabashov A S. A Set of High Accuracy Low Cost Metallic Resonator CVG [ C ] // Proceedings of the IEEE/ION Position, Location And Navigation Symposium, Monterey, USA, 2008: 238-243.
- [4] Watson W. Vibrating Structure Gyro Performance Improvements [ C ] // Symposium Gyro Technology, Stuttgart, Germany, 2008: 6. 0-6. 13.
- [5] Shu-Chung Yi. A Direct Digital Frequency Synthesizer Based on ROM Free Algorithm [ J ]. Int. J. Electron. Commun., 2010, 64: 1068-1072.
- [6] TAO Yi, XI Xiang, XIAO Dingbang. Design, Analysis and Experiment of a Novel Ring Vibratory Gyroscope [ J ]. CHINESE Sensors and Actuators A: Physical. 2011, 168: 286-299.
- [7] 陈志华, 满海鸥, 肖定帮, 等. 一种评价硅微陀螺性能的电路分析方法 [ J ]. 传感技术学报, 2010, 23 ( 7 ): 931-934.
- [8] Yawgeng A Chau, Yao-Hua Chen. A High-Performance ROM-Less Direct Digital Frequency Synthesizer [ J ]. Int. J. Electron. Commun., 2011, 65: 272-274.
- [9] Amir M, Sodagar G, Roiantan L, et al. Reduced Memory Direct Digital Frequency Synthesizer Using Parabolic Initial Guess [ J ]. Analog Integrated Circuits and Signal Processing, 2003, 34: 89-96.
- [10] Kim K K. Analysis and Simulation of Jitter Sequences for Testing Serial Data Channels [ J ]. IEEE Transactions on Industrial Informatics, 2008, 4 ( 2 ): 134-143.
- [11] Menguc Oner. On the Cyclostationary Statistics of Ultra-Wideband Signals in the Presence of Timing and Frequency Jitter [ J ]. Int. J. Electron. Commun., 2008, 62: 174-184.
- [12] Mike Peng, Li Jitter. Noise and Signal Integrity at High-Speed [ M ]. Peaeson Education Inc. 2007, 103-104.
- [13] Naoki Kurosawa, Haruo Kobayashi, Hideyuki Kogure, et al. Sampling Clock Jitter Effects in Digital-to-Analogconverters [ J ]. Measurement, 2002, 31: 187-199.
- [14] Miltiadis Vasilakis, Yannis Stylianou. Spectral Jitter Modeling and Estimation [ J ]. Biomedical Signal Processing and Control, 2009, 4: 183-193.
- [15] André Alves Ferreira, Atila Madureira Bueno, José R C Piqueira. Modeling and Measuring Double-Frequency Jitter in One-Waymaster-Slave Networks [ J ]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2009, 14: 1854-1860.
- [16] 邓春林, 周凤岐, 蔡伟, 等. RLG 环形激光陀螺测试技术的设计与研究 [ J ]. 传感技术学报, 2010, 23, ( 10 ): 1435-1438.

谢 笛(1986-),男,硕士研究生,现主要从事微机械惯性传感器的研究, 232310413@qq.com;



吴学忠(1965-),男,教授,博士生导师,现主要从事精密工程与计算机控制、微机电系统与微纳器件研究。发表学术论文 50 余篇,其中被 SCI、EI 检索 20 余篇,承担国防预先研究、国家自然科学基金、国家 863 计划、军工部门 10 余项科学研究课题。

