第 27 卷 第 10 期
Vol. 27 No. 10

控 制 与 决 策
Control and Decision

2012 年 10 月
Oct. 2012

文章编号: 1001-0920 (2012) 10-0000-00

修改 D-W 分解求具有需求时间窗和投机性成本的批量问题

罗治洪[1,2], 段万春[1], 唐立新[2]

(1.昆明理工大学 管理与经济学院，昆明 650093；2.东北大学 物流优化与控制研究所，沈阳 110819)

摘　要: 研究多产品具有能力约束、需求时间窗、允许延期交货和投机性成本的批量问题. 分析无能力约束凸包极点的特征, 采用修正的 Dantzig-Wolfe 分解对原问题进行等价变换. 使用列生成获得下界, 同时采用启发式分支定界寻找近优解. 对随机算例进行了测试与比较, 计算结果表明上界与下界之间的间隙非常小, 另外分析了当能力参数和订单规模变化时解的质量和计算时间.

关键词: 需求时间窗；批量；投机性成本；延期交货

中图分类号: F272.2　　　　**文献标识码:** A

Using modified D-W decomposition to solve lot sizing problem with demand time windows and speculative cost

LUO Zhi-hong[1,2], *DUAN Wan-chun*[1], *TANG Li-xin*[2]

(1. School of Management and Economics，Kunming University of Science and Technology，Kunming 650093，China; 2. The Logistics Institute，Northeastern University，Shenyang 110819，China. Correspondent：LUO Zhi-hong，E-mail：kmustlzh@163.com)

Abstract: This research concerns a deterministic multi-item lot-sizing problem with capacity constraints, demand time windows, backlogging and speculative cost. The extreme points of the uncapacitated lot size polytope are analyzed, and an equivalent mixed-integer programming formulation is developed by applying modified Dantzig-Wolfe decomposition to the original problem. The lower bound is obtained by column generation processing. Furthermore, a heuristic branch and bound algorithm is developed to find near optimal solution. Numerical experiments generated randomly are tested and compared. The result shows that the gaps between the lower and upper bounds are very small. Moreover, the solution’s quality and algorithm’s run-time are analyzed when varying the capacitated parameter and number of orders.

Key words: demand time windows；lot-size；speculative cost；backlogging

1 引　言

本文研究的批量问题具有如下特点: 1) 产品生产启动占用能力; 2) 多产品共用能力约束; 3) 客户订单具有需求时间窗, 不能早于最早交货期交货, 迟于最迟交货期交货有惩罚; 4) 具有投机性的成本结构. 如何制订生产与交货计划是制造商关心的问题. 当原材料价格较大波动时, 投机性成本结构可能让制造商提前或推迟生产以降低总成本, 受能力限制, 这种动机将受到抑制. 另外, 制造商可能面临大规模数量的订单, 如大型钢铁企业, 一个月内同种产品可能有上千订单, 一些日常用品更是如此. 订单数量很大的原因除了客户数量大外, 还有可能客户提出了多个具有不同需求时间窗的订单. 靠经验决策难以取得高质量的可行解, 研究这类基本问题的计划方法具有重要价值.

2 文献综述

经典的批量问题可以追溯到文献[1], 无能力约束下根据最优性提出多项式时间的动态规划方法, 为后续研究奠定了基础; 文献[2]首次对允许延期交货提出 $O(T^2)$ 的动态规划算法; [3] 指出已知的有效不等式足以描述这类问题的凸包; [4] 对各类批量问题进行了较全面的总结. 具有时间窗的批量问题, 主要有两类研究. 第 1 类, [5] 首次研究了无能力约束下具有需求时间窗和非投机性成本的批量问题, 对不

收稿日期: 2011-05-03；**修回日期:** 2011-12-06.

基金项目: 教育部规划基金项目 (10XJA630002)；云南省教育厅自然基金项目 (08Y0072).

作者简介: 罗治洪(1976−), 男, 讲师, 博士生, 从事组合最优化、物流与供应链管理等研究.

允许和允许延期交货, 分别提出 $O(T^2)$ 和 $O(T^3)$ 的动态规划算法; [6] 首次扩展到投机性成本的情况, 提出 $O(nT^3)$ 的伪多项式时间算法; 第 2 类, [7] 研究了订单到达和交货时间构成时间窗, 不允许提前交货, 生产只能在时间窗内进行 (如原料可用受限). 考虑客户化和非客户化两种情况, 分别提出 $O(T^4)$ 和伪多项式时间算法. 文献 [8] 对第 2 类问题扩展到有能力约束的情况, 用拉格朗日松弛求解. 可在时间窗之外生产是第 1 类问题的特点, 在允许延期交货时凸多面体性质尚不明确[9].

批量问题在具有启动时间和能力约束时是 NP-hard 的[10]. 文献 [11] 结合遗传算法与局部深度搜索求解; 文献 [12] 用拉格朗日松弛求解. 考虑时间窗则更为复杂, 其决策方法研究很少, 本文拟修正 Dantzig-Wolfe (以下简称 D-W)[13]分解, 用列生成求下界. 列生成基本原理见文献 [14-15].

3 数学模型

首先定义符号: i 表示产品种类, $i=1,2,\cdots,S$; t 为计划时间段, $t=1,2,\cdots,T$; n_i 为产品 i 的订单数. 模型参数为: d_{ik} 为产品 i 订单集中订单 k 的需求量, $k=1,2,\cdots,n_i$, 其最早交货期为 e_{ik}, 最迟交货期为 l_{ik}; cs_{it}, cp_{it} 分别为产品 i 在 t 生产的启动成本和单位可变成本; h_{it}, b_{it} 分别为单位产品 i 在 t 的库存成本和延期交货惩罚; st_{it} 为产品 i 在 t 生产的启动占用能力, vt_{it} 为单位产品 i 在 t 生产的占用能力; C_t 为时间段 t 的可用能力. 决策变量为: x_{it} 为产品 i 在 t 的产量; d_{ikt} 为订单 k 在 t 的交货量; I_{it}^+, I_{it}^- 分别为 i 在 t 的库存水平和延迟量; y_{it} 为 0-1 变量, 当产品 i 在 t 生产时 $y_{it}=1$, 否则 $y_{it}=0$. 问题 P 为:

$$\min\sum_i\sum_t(\mathrm{cp}_{it}x_{it}+\mathrm{cs}_{it}y_{it}+h_{it}I_{it}^++b_{it}I_{it}^-);\quad(1)$$

$$\sum_i(\mathrm{vt}_{it}x_{it}+\mathrm{st}_{it}y_{it})\leqslant C_t,\ \forall t;\quad(2)$$

$$x_{it}+I_{i,t-1}^+-I_{i,t-1}^--\sum_{k=1}^{n_i}d_{ikt}=I_{it}^+-I_{it}^-,\ \forall i,\ \forall t;\quad(3)$$

$$\sum_{t\in[e_{ik},l_{ik}]}d_{ikt}=d_{ik},\ k=1,2,\cdots,n_i,\ \forall i;\quad(4)$$

$$d_{ikt}\geqslant 0, t\in[e_{ik},l_{ik}],\ k=1,2,\cdots,n_i,\ \forall i;\quad(5)$$

$$d_{ikt}=0, t\notin[e_{ik},l_{ik}],\ k=1,2,\cdots,n_i,\ \forall i;\quad(6)$$

$$x_{it}\leqslant y_{it}\sum_k d_{ik},\ \forall i,\ \forall t;\quad(7)$$

$$x_{it}\geqslant 0,\ y_{it}\in\{0,1\},\ I_{it}^+,\ I_{it}^-\geqslant 0,$$
$$I_{i0}^+,\ I_{iT}^+,\ I_{i0}^-,\ I_{iT}^-=0,\ \forall i,\ \forall t.\quad(8)$$

其中: 式 (1) 为数学模型的目标, 即总成本极小化; 式 (2) 为能力限制; 式 (3) 为库存平衡; 式 (4)∼(6) 为变量限制; 式 (7) 表示连续变量与整数变量的关系. 由此可见, 订单允许延迟和拆分交货. 对订单 k, $[e_{ik},l_{ik}]$ 反映了客户对交货的宽限期. 根据式 (3), 需求由 I_{it}^- 满足时为延迟交货, 当 $\mathrm{cp}_{it}\geqslant\mathrm{cp}_{i,t+1}(t=1,2,\cdots,T-1)$ 和 $\mathrm{cp}_{it}+b_{it}\geqslant\mathrm{cp}_{i,t-1}(t=2,3,\cdots,T)$ 时, 为非投机性成本结构, 本问题没有这些要求, 所以称之为投机性成本[5-6]. 当同种产品的两个订单时间窗一致时, 可合并为一个而不影响最优解, 故每种产品合并后订单数量不超过 $T\times(T+1)/2$.

4 求解方法

4.1 求解思路

通过松弛约束 (2), 问题变为无能力约束的批量问题. 模型可等价变换为一个主问题和多个单产品无能力约束的子问题. 约束 (2) 放在主问题中成为耦合约束, 其他约束放在子问题中. 约束 (7) 和 (8) 表明凸包是封闭的, 则任一产品的可行解都可用凸包上极点的凸组合表示. 因此, 可对原问题进行 D-W 等价变换, 采用列生成方法求下界, 结合启发式分支定界求近优解.

4.2 修正 D-W 等价变换与原问题的下界

令 $X^i=\{(x_{it},y_{it},I_{it}^+,I_{it}^-,d_{ikt}):(3)-(8)\}$ 为产品 i 无能力约束的可行域. P^i 为 $\mathrm{Conv}(X_i)$ 的极点集, 由于极点的性质尚不清楚, 首先提出如下性质.

性质 1 $(x_{it}^p,y_{it}^p,I_{it}^{+p},I_{it}^{-p},d_{ikt}^p)$ 为 $\mathrm{Conv}(X^i)$ 的极点, x_{ikt} 表示时间段 t 为订单 k 的生产量, 则有

$$x_{it}^p=\begin{cases}\Big\{0,\sum d_{ik}:x_{ikt}=d_{ik}\Big\},\mathrm{if}y_{it}^p=1;\\0,\mathrm{if}y_{it}^p=0.\end{cases}$$

证明 只需证明 $y_{it}^p=1$ 的情况. 对于 $p\in P^i,\forall i$, 令 c_{ikt} 为 x_{ikt} 对应的单位成本, 即

$$c_{ikt}=\begin{cases}\mathrm{cp}_{it}+\sum\limits_{\tau=t,\cdots,e_{ik}-1}h_{i\tau},\mathrm{if}t<e_{ik};\\\mathrm{cp}_{it},\mathrm{if}t\in[e_{ik},l_{ik}];\\\mathrm{cp}_{it}+\sum\limits_{\tau=l_{ik},\cdots,t-1}b_{i\tau},\mathrm{if}t>l_{ik}.\end{cases}$$

构造如下线性规划:

$$\min\sum_t\sum_k c_{ikt}x_{ikt}.$$
$$\mathrm{s.t.}\begin{cases}\sum\limits_k x_{ikt}\leqslant\Big(\sum\limits_k d_{ik}\Big)y_{it}^p,\ \forall t;\\\sum\limits_t x_{ikt}=d_{ik},\ \forall k;\\x_{ikt}\geqslant 0,\ \forall i,\ \forall t,\ \forall k.\end{cases}$$

令 u_t 和 v_k 分别为两个约束的对偶变量, 其对偶问题为

$$\max\sum_k d_{ik}v_k+\sum_t\Big(\sum_k d_{ik}\Big)y_{it}^p u_t.$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} u_t + v_k \leqslant c_{ikt},\ \forall i,\ \forall k,\ \forall t;\\ u_t \leqslant 0,\ \forall t,\ v_k \text{ unrestricted},\ \forall k.\end{cases}$$

构造原始-对偶问题的可行解:

$$u_t^* = \begin{cases} 0,\ \text{if} y_{it}^p = 1;\\ \min\{\min\{c_{ikt} - v_k^*, \forall k\}, 0\},\ \text{if} y_{it}^p = 0.\end{cases}$$

$$v_k^* = \min\{c_{ikt} : \forall t, y_{it}^p = 1\}.$$

$$x_{ikt}^* = \begin{cases} d_{ik}, \text{if} y_{it}^p = 1 \text{ and } v_k^* = c_{ikt};\\ 0, \text{otherwise}\end{cases}$$

上述解满足互补松弛性, 是一对最优解. 当 y_{it}^p =1 时, 有

$$x_{it} = \sum_{k:v_k^* = c_{ikt}} x_{ikt} = \sum_{k:v_k^* = c_{ikt}} d_{ik}.$$

由于 c_{ikt} 在投机性成本下是任意的, 对于 $t(y_{it}^p = 1)$, 如不存在 k 满足 $v_k^* = c_{ikt}$, 则 $x_{it} = 0$. 因此, $\text{Conv}(X^i)$ 中的 x_{it} 均应具有性质 1 的表达形式. □

令 $Q^i = \{(y_{i1}, y_{i2}, \cdots, y_{iT}) : y_{it} \in \{0,1\},\ \forall t\}$ 为 i 的生产启动序列集. 对于 $q \in Q^i, \forall i$, 定义

$$Q^{iq} = \{p : p \in P^i, y_{it}^p \leqslant y_{it}^q; y_{it}^p = 1, \text{if } x_{it}^p > 0\}.$$

性质 2 任意一个可行解, 如果其生产启动时间序列为 q, 则该可行解的产量可用 Q^{iq} 中的极点对应产量的凸组合表示.

证明 当 $y_{it}^q = 0$ 时, 对于满足 $y_{it}^p = 1$ 的极点 p, 凸组合系数为 0; 当 $y_{it}^q = 1$ 时, 对于 $y_{it}^p = 1$ 的极点 p, 如果存在 τ, 且 $y_{i\tau}^p = 1$, $x_{i\tau}^p = 0$, 根据性质 1, 一定存在一个极点 p', 满足 $y_{i\tau}^{p'} = 0$, 且 $x_{it}^{p'} = x_{it}^p$. 这说明在构成可行解的凸组合中, 极点 p 的产量由可由 p' 替代 (尽管 p' 不是 q 对应可行解所需的极点, 但由于 p' 比 p 成本和能力占用更小, 子问题产生 p'). □

性质 1 说明了极点 $p \in P^i$ 的表达形式; 性质 2 表明在构建可行解时, 需要的仅是 Q^{iq} 中的极点. 因此, 可用较少的极点来进行更精练的 D-W 分解, 从而得到如下主问题 (MP):

$$\min \sum_i \sum_{q\in Q^i} \Big(\sum_t \text{cs}_{it} y_{it}^q\Big) zs_q^i + \sum_i \sum_{q\in Q^i} \sum_{v\in Q^{iq}} \Big(\sum_t \text{cp}_{it} x_{it}^v + h_{it} I_{it}^{+v} + b_{it} I_{it}^{-v}\Big) z_{qv}^i; \tag{9}$$

$$\sum_i \sum_{q\in Q^i} \Big(\text{st}_{it} y_{it}^q \text{zs}_q^i + \sum_{v\in Q^{iq}} \text{vt}_{it} x_{it}^v z_{qv}^i\Big) \leqslant C_t,\ \forall t; \tag{10}$$

$$\sum_{q\in Q^i} \text{zs}_q^i = 1,\ \forall i; \tag{11}$$

$$\sum_{v\in Q^{iq}} z_{qv}^i = \text{zs}_q^i,\ q \in Q^i,\ \forall i; \tag{12}$$

$$\text{zs}_q^i \in \{0,1\},\ z_{qv}^i \in [0,1],\ q \in Q^i,\ v \in Q^{iq}. \tag{13}$$

其中 zs_q^i 为 0-1 变量, 当 q 被选择时, $\text{zs}_q^i = 1$, 否则 $\text{zs}_q^i = 0$, $q \in Q^i$. 式 (11) 表示每种产品只能选择一个生产时间序列, z_{qv}^i 为凸组合系数; 式 (12) 表示构造可行解的凸组合约束. 将式 (12) 代入上述模型替换 zs_q^i 同时去掉 (12), 可获得原问题的下界. 极点的数量非常多是采用列生成的重要原因.

4.3 子问题

子问题应提供主问题需要的极点, 根据线性规划理论, 将检验数为负的极点加入主问题可降低目标函数的值. 令 u_t 和 v_i 分别为式 (10) 和 (11) 的对偶变量, 构造求极小化检验数的子问题 SUB_$P(i)$:

$$\min \sum_t (\text{cp}_{it} x_{it} + \text{cs}_{it} y_{it} + h_{it} I_{it}^+ + b_{it} I_{it}^-) - \sum_t (\text{vt}_{it} x_{it} + \text{st}_{it} y_{it}) u_t - \nu_i;$$

$$\text{s.t. } (x_{it}, y_{it}, I_{it}^+, I_{it}^-, d_{ikt}) \in \text{Conv}(X^i).$$

子问题可通过伪多项式时间算法[6]求解, 订单按最早交货期不减排序. 根据最优性, 当一个订单的生产时间确定, 其后的订单生产时间可以被限制在更小范围, 这里不再赘述. 当子问题的最优解为负数时, 加入主问题. 列生成迭代直到所有子问题找不到这样的极点为止, 从而获得下界.

4.4 初始列

列生成迭代需要初始列, 目前的文献中很少有这类问题的启发式求解方法, 本文采用启发式方法添加, 步骤如下:

Step 1: 根据性质 1 的证明过程, 产品 i 的订单 k 按照 c_{ikt} 由低到高将时间段排列成 $t_1, t_2, \cdots, t_T$;

Step 2: 将该订单按上述时间段内进行最大量生产, 如订单在某时间段内没有生产完, 则进入下一时间段, 直至被完全生产;

Step 3: Step 2 如果存在订单不能被完全生产, 增加虚拟的初始库存来满足, 但费用必须足够大;

Step 4: 每个订单都按 Step 1 ∼Step 3 排产.

由于不能保证初始列可行, 故增加虚拟库存, 起人工变量作用. 求出分支节点的下界后, 如果具有虚拟库存的列为正, 则可判断该节点无可行解.

4.5 分支定界

下界一般不可行. 考虑到子问题求解的时间复杂性, 完全分支可能不可取. 采用启发式分支定界寻找近优解. 1) 选择原问题的 0-1 变量 y_{it} 作为分支变量. 2) 固定变量策略: 当 $y_{it} \geqslant 0.95$ 时, y_{it} 固定为 1; 当 $y_{it} \leqslant 0.05$ 时, y_{it} 固定为 0. 3) 分支策略: 选择最靠近 0 的分支变量 y_{it}, 左支 $y_{it} = 0$, 右支 $y_{it} = 1$. 固定变量策略的含义为: y_{it} 若非常接近 1, 相信时间段 t 非

常适合生产 i; 若接近 0, 则不适合生产. 在节点上, 满足分支约束的已有列都可在迭代前加入主问题. 同时, 部分列修订加入. 如果分支变量 $y_{it}=1$, 则对于满足 $y_{it}^v=0$ 的列 v, 令 $y_{it}^v=1$, 且该列的价值系数增加 cs_{it}, 从性质 2 可知, 修订的列可能是所需极点; 另外, 如果 $y_{it}=0$, 则令子问题的固定成本 $\mathrm{cs}_{it}=+\infty$, 不改变子问题的结构和算法. 当然, 启发式分支不能保证可行解的最优性.

综上, 将列生成迭代嵌入分支节点求下界，对分支树进行启发式深度优先搜索寻找近优解, 为 Branch- and-Price 算法.

5 随机算例

5.1 算例设计

由于尚未发现在能力约束下这类问题的算例, 为了测试算法性能, 设计 6 种算例, 用 $S\times T$ 表示, 如表 1 所示.

表 1 问题设计

P	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
$S\times T$	5×10	5×20	5×30	10×10	10×20	10×30

每种算例在 CPU2.6 G, 内存 1 G 的计算机上用 IBM-OSL 软件进行 20 次计算. 随机算例产生方法为: 1) 按 $e_{ik}\sim U[1,T]$ 和 $l_{ik}\sim U[e_{ik},T]$ 产生订单的时间窗; 2) 每种产品的原始订单数量一致, 用 N 表示; 3) 为了简单表达投机性成本, 设定 b_{it} 和 h_{it} 为常数, 而 cp_{it} 随机产生, 其波动范围均大于 b_{it} 和 h_{it}.

5.2 计算结果

对计算时间 (s)、可行解质量进行比较. 可行解质量用间隙 GAP=(可行上界−下界)/下界×100% 表示. 为了评价能力参数的影响, 假定单个时间段对能力的平均需求为 C, 进行能力紧 ($C_t=1.1C$) 与松 ($C_t=1.5C$) 的对比. 同时, 为了衡量订单规模的影响, 计算时间窗密度. 假定产品 i 合并后的订单数量为 n_i, i 的时间窗密度定义为 $\rho_i=2\times n_i/(T\times(T+1))$, 该值越接近 1, 说明该种产品合并后订单数量越接近 $T\times(T+1)/2$, $\bar{\rho}$为对所有 ρ_i 取均值.

1) 计算时间. 算例的平均计算时间如表 2 所示. 由表 2 可见, 在同种问题中, 时间窗密度增加, 计算时间增加, 原因在于求解子问题用的是 $O(n_iT^3)$ 算法. 同时, 当可用能力较松时, 所需极点更少, 可行解更容易找到, 计算时间更短.

2) 解的质量. 算例的 GAP 均值如表 3 所示. 从表 3 可见, 平均间隙非常小, 说明用列生成求下界的质量很高, 同时也反映了近优解的质量. 对于同种问题, 平均时间窗密度越大, 解的质量越高, 这是因为单个订单占可用资源的比重就越小, 订单就越不容易被拆分, 在投机性成本下, 越容易多个订单集中生产形成规模经济. 另外, 可用能力增大时, 解的质量提高, 这是因为趋向于无能力约束的问题.

表 2 平均计算时间

P	N	能力紧 1.1		能力松 1.5	
		$\bar{\rho}$	计算时间/s	$\bar{\rho}$	计算时间/s
P_1	100	0.75	0.48	0.75	0.24
	1 000	1.00	0.65	1.00	0.46
P_2	100	0.34	6.95	0.33	3.51
	1 000	0.96	17.79	0.69	8.47
P_3	100	0.18	63.94	0.18	30.41
	1 000	0.81	171.35	0.81	119.21
P_4	100	0.77	0.54	0.76	0.33
	1 000	1.00	0.82	1.00	0.52
P_5	100	0.34	8.99	0.34	4.42
	1 000	0.96	20.12	0.96	11.31
P_6	100	0.18	114.55	0.18	54.68
	1 000	0.81	228.56	0.81	105.73

表 3 解的平均质量

P	N	能力紧 1.1		能力松 1.5	
		$\bar{\rho}$	GAP	$\bar{\rho}$	GAP
P_1	100	0.75	0.028 4	0.75	0.018 7
	1 000	1.00	0.009 5	1.00	0.002 6
P_2	100	0.34	0.040 3	0.33	0.014 8
	1 000	0.96	0.003 9	0.96	0.002 5
P_3	100	0.18	0.044	0.18	0.026 5
	1 000	0.81	0.003 5	0.81	0.002 4
P_4	100	0.77	0.01	0.76	0.005 1
	1 000	1.00	0.002 1	1.00	0.001 5
P_5	100	0.34	0.014	0.34	0.007 1
	1 000	0.96	0.001 7	0.96	0.001 3
P_6	100	0.18	0.024 7	0.18	0.010 2
	1 000	0.81	0.002 1	0.81	0.001 4

6 结 论

本文研究了多产品具有需求时间窗、投机性成本和能力约束的批量问题的决策方法. 通过对无能力约束单产品凸包性质的研究, 进行了更精炼的 D-W 等价变换. 本文算法表明, 列生成能提供质量很高的下界.

目前, 关于这类问题还有很多待研究的话题, 例如: 子问题在特定条件下是否具有多项式时间算法, 无能力约束的凸多面体性质, 列生成和其他方法结合以快速求解等需要进一步研究.

参考文献(References)

[1] Wagner H M, Whitin T M. Dynamic version of the economic lot size model[J]. Management Science, 1958, 5(1): 89-96.

[2] Zangwill W I. A deterministic multi-period production scheduling model with backlogging[J]. Management Science, 1966, 13(1): 105-119.

[3] Kücükyavuz S, Pochet Y. Uncapacitated lot sizing with backlogging: The convex hull[J]. Mathematical Programming, 2009, 118: 151-175.

[4] Wolsey L A. Progress with single-item lot-sizing[J]. European J of Operational Research, 1995, 86: 395-401.

[5] Lee C Y, Cetinkaya S, Wagelmans A P M. A dynamic lot-sizing model with demand time windows[J]. Management Science, 2001, 47(10): 1384-1395.

[6] Hwang H C, Jaruphongsa W. Dynamic lot-sizing model with demand time windows and speculative cost structure[J]. Operations Research Letters, 2006, 34: 251-256.

[7] Dauzère-Pérès S, Brahimi N, Najid N M, et al. Uncapacitated lot-sizing problems with Time Windows[R]. Ecole des Mines de Nantes, 2005.

[8] Brahimi N, Dauzère-Pérès S, Najid N M. Capacitated multi-item lot-sizing problems with time windows[J]. Operations Research, 2006, 54(5): 951-967.

[9] Wolsey LA. Lot-sizing with production and delivery time windows[J]. Mathematical Programming, 2006, 107:471-489.

[10] Trigeiro W, Thomas L J, McClain J O. Capacitated lot sizing with set-up times[J]. Management Science, 1989, 35(3): 353-366.

[11] 韩毅, 唐加福, 王立岩, 等. 单级有资源约束的生产批量计划问题的元算法[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2009, 30(8): 1111-1114.
(Han Y, Tang J F, Wang L Y, et al. A memetic algorithm for single level capacitated lot-sizing problems[J]. J of Northeastern University: Natural Science, 2009, 30(8): 1111-1114.)

[12] 唐立新, 杨自厚, 王梦光. CIMS 下单级单资源约束的生产批量计划问题的新算法[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(2): 213-216.
(Tang L X, Yang Z H, Wang M G. A new algorithm of the CSLLSP in CIMS[J]. Control Theory & Applications, 1999, 16(2): 213-216.)

[13] Dantzig G B, Wolfe P. Decomposition principle for linear programs[J]. Operations Research, 1960, 8: 101-111.

[14] Lübbecke M E, Desrosiers J. Selected topics in column generation[J]. Operations Research, 2005, 53(6): 1007-1023.

[15] Barnhart C, Johnson E L, Nemhauser G L, et al. Brahch-and-price: Column generation for solving huge integer programs[J]. Operations Research, 1998, 46(3): 316-329.