

文章编号: 1001-0920(2012)11-1616-05

模型不确定非线性 Markov 跳变系统的滤波算法

赵顺毅, 刘 飞

(江南大学 a. 自动化研究所, b. 轻工过程先进控制教育部重点实验室, 江苏 无锡 214122)

摘要: 针对模型不确定非线性 Markov 跳变系统, 提出一种新的滤波算法. 相比于传统交互多模型粒子滤波, 该方法通过引入前一时刻的滤波误差来增强原先由于不精确模型而造成权值较小的真实粒子在滤波过程中的作用, 以此来改善算法的估计性能. 仿真结果表明, 该方法在处理含不确定模型参数的非线性 Markov 跳变系统状态估计问题时具有较好的性能.

关键词: 模型不确定性; 非线性 Markov 跳变系统; 状态估计

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Filter algorithm for nonlinear Markov jump systems with uncertain models

ZHAO Shun-yi, LIU Fei

(a. Institute of Automation, b. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry of Ministry of Education, Jiangnan University, Wuxi 214122, China. Correspondent: ZHAO Shun-yi, E-mail: shunyizhao@126.com)

Abstract: Considering the state estimation problem for the nonlinear Markov jump system with uncertain model, a novel filtering algorithm is proposed. Compared with the traditional interacting multiple particle filter method, in this method, a term of filtering error at previous time instant is introduced to increase the effect of the particles which are true but with small weights due to the inaccuracy model to improve the estimation performance in the filtering process. Simulation results show the effectiveness of this method in handling with the state estimation problem for the nonlinear Markov jump systems with uncertain model parameter.

Key words: model uncertainties; nonlinear Markov jump system; state estimation

1 引 言

Markov 跳变系统是一类由时间和离散事件共同驱动的随机混合系统. 由于其信息结构的特殊性, 近 20 年来, 此类系统被广泛应用于机动目标跟踪^[1]、信号处理^[2]以及工业故障诊断^[3]等领域. 另一方面, 在制药工业、发酵过程和石油化工等行业, 普遍缺乏在线传感器, 因此对系统状态进行估计尤为重要. 针对 Markov 跳变系统的状态估计问题, 贝叶斯理论给出了其最一般化的解. 然而, 庞大的计算量使得将最优贝叶斯估计应用于实际系统几乎不可能. 为此, 人们提出了许多次优的估计算法^[4-6], 其中交互多模型算法 (IMM)^[4]能较好地平衡计算耗费与估计精度, 被认为是目前性价比最优的算法之一. 近年来, 基于蒙特卡罗采样的粒子滤波 (PF)^[7-8]已逐渐成为处理非线性

系统滤波问题的主流技术. 其核心策略是采用一组带权值的采样点来逼近系统的后验概率密度函数, 将滤波过程中的多重积分转化为离散点的加权求和. 与此同时, 针对非线性随机混合系统, 文献 [9-11] 将粒子滤波和交互多模型算法相结合, 提出了交互多模型粒子滤波 (IMM-PF), 该滤波算法对于精确模型下非线性 Markov 跳变系统的状态估计问题具有较好的性能.

在实际应用中, 由于客观因素的不确定性及系统自身的复杂性, 工业系统的模型往往很难建立. 一般情况下, 所获取的数学模型均是对真实情况的一种近似, 带有不同程度的不确定性. 显然, 在滤波算法的设计过程中考虑模型的不确定性将会大大提高算法的估计精度与实用性. 此外, 尽管 Markov 跳变系统自身可以通过增加模态来刻画系统模型参数的变化, 然而

收稿日期: 2011-05-03; 修回日期: 2011-08-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974001); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(JUDCF11039).

作者简介: 赵顺毅(1987-), 男, 博士生, 从事非线性系统滤波和控制的研究; 刘飞(1965-), 男, 教授, 博士生导师, 从事先进控制理论与应用、过程监控等研究.

实际模型参数的所有取值并不可能完全已知, 而且在滤波算法中考虑过多的模态会严重影响算法的估计精度, 增加算法的计算消耗^[12]. 因此, 针对模型不确定非线性 Markov 跳变系统, 研究其状态估计问题十分必要.

针对上述情况, 本文提出一种不确定交互多模型粒子滤波 (UIMM-PF) 算法. 该方法保留了多模型算法的特点, 利用不同的粒子滤波器匹配于系统的不同模态; 同时, 考虑到模型参数的不确定性, 在交互过程中引入前一时刻的滤波误差, 将其与系统模态概率和模态间的转移概率相结合, 对初始粒子进行交互. 这样, 不仅解决了粒子数随时间呈指数增长的问题, 而且增强了原先由于模型误差而导致小权值粒子的作用, 以此来弥补不精确模型给算法估计性能带来的负面影响. 仿真结果表明, UIMM-PF 在处理模型不确定非线性 Markov 跳变系统的状态估计问题时, 表现出较好的估计精度以及对不确定参数较强的鲁棒性.

2 问题描述

非线性 Markov 跳变系统的状态方程和观测方程表述如下:

$$x_k = f(x_{k-1}, r_k) + w_k, \quad (1)$$

$$y_k = g(x_k, r_k) + v_k. \quad (2)$$

其中: $x_k \in R^n$, $y_k \in R^p$ 分别为系统的状态值和观测值, 定义 $Y_k = \{y_1, \dots, y_k\}$ 为直到 k 时刻的观测序列集合; w_k, v_k 分别为互不相关的系统白噪声和量测白噪声; $f(\cdot), g(\cdot)$ 为非线性函数. 系统在每一时刻的运行状态由系统模态 r_k 确定, $\{r_k, k \geq 0\}$ 是一取值于有限状态空间 $M = \{1, 2, \dots, m\}$ 的连续时间、离散状态的 Markov 链, 其模态间的转移概率定义为

$$\pi_{ij} = P_r(r_k = j | r_{k-1} = i), \quad i, j = 1, 2, \dots, m. \quad (3)$$

为便于描述, 记

$$r_k^j = P_r(r_k = j). \quad (4)$$

一般情况下, 转移概率 π_{ij} 在整个滤波过程中均假设不随时间发生变化. 值得注意的是, 由于考虑模型的不确定性, 式(1)和(2)为系统名义上的模型. 本文的目的是在已知观测序列 Y_k 与名义模型(1)和(2)的情况下, 较准确地估计出系统的状态值.

3 不确定交互多模型粒子滤波

3.1 贝叶斯估计

状态估计问题是典型的逆向问题, 贝叶斯理论给出了最一般化的解, 其核心思想是利用系统似然及先验信息来获取状态的后验概率密度函数. 对于 k 时刻状态的后验概率密度函数 $p(x_k, r_k^j | Y_k)$, 将其按贝叶斯定理展开, 有

$$p(x_k, r_k^j | Y_k) = \frac{p(y_k | x_k, r_k^j)}{a_k} p(x_k, r_k^j | Y_{k-1}). \quad (5)$$

其中: a_k 为归一化常数, $p(x_k, r_k^j | Y_{k-1})$ 为在当前信息量 Y_{k-1} 下关于系统状态的先验信息, $p(y_k | x_k, r_k^j)$ 为系统在 k 时刻的似然函数. 依据全概率法则, 系统的先验信息 $p(x_k, r_k^j | Y_{k-1})$ 可展开为

$$\begin{aligned} p(x_k, r_k^j | Y_{k-1}) &= \\ &= \int p(x_k, r_k^j, x_{k-1} | Y_{k-1}) dx_{k-1} = \\ &= \int p(x_k | r_k^j, x_{k-1}) p(r_k^j, x_{k-1} | Y_{k-1}) dx_{k-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中(同样依据全概率法则) $p(r_k^j, x_{k-1} | Y_{k-1})$ 为

$$\begin{aligned} p(r_k^j, x_{k-1} | Y_{k-1}) &= \\ &= \sum_{i=1}^m p(r_k^j, x_{k-1}, r_{k-1}^i | Y_{k-1}) = \\ &= \sum_{i=1}^m \pi_{ij} p(x_{k-1}, r_{k-1}^i | Y_{k-1}). \end{aligned} \quad (7)$$

将式(6)和(7)代入(5), 可得如下贝叶斯估计的递推表达式:

$$\begin{aligned} p(x_k, r_k^j | Y_k) &= \\ &= \frac{p(y_k | x_k, r_k^j)}{a_k} \int p(x_k | r_k^j, x_{k-1}) \times \\ &= \sum_{i=1}^m \pi_{ij} p(x_{k-1}, r_{k-1}^i | Y_{k-1}) dx_{k-1}, \\ & \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (8)$$

可以看出, 式(8)给出了系统状态后验概率密度函数从 $k-1$ 时刻到 k 时刻的递推式. 理论上, 只要依据式(8)即可求解状态的估计值. 然而, 由于其在递推过程中涉及到非线性概率密度函数的多重积分问题, 使得其递归解析解的获取几乎为不可能.

3.2 不确定交互多模型粒子算法推导分析

粒子滤波是通过蒙特卡罗方法随机采样一系列带权值的离散点来逼近后验概率密度函数, 其目的是将滤波过程中多重非线性概率密度函数积分的求解转化为粒子的加权求和. 设 $k-1$ 时刻在模态 i 下的初始粒子集为 $\{x_{k-1}^{i,n}, u_{k-1}^{i,n}\}_1^N$, 其中 N 为粒子总数, 则在 $k-1$ 时刻, 系统状态的后验概率密度函数 $p(x_{k-1}, r_{k-1}^i | Y_{k-1})$ 的粒子表达式为

$$p(x_{k-1}, r_{k-1}^i | Y_{k-1}) = \sum_{n=1}^N u_{k-1}^{i,n} \delta(x_{k-1} - x_{k-1}^{i,n}), \quad (9)$$

其中 $\delta(\cdot)$ 为狄拉克脉冲函数. 此时, 依据全概率法则, 可得模态 i 的概率为

$$\begin{aligned} P_r(r_{k-1}^i | Y_{k-1}) &= \\ &= \int p(x_{k-1}, r_{k-1}^i | Y_{k-1}) dx_{k-1} = \sum_{n=1}^N u_{k-1}^{i,n}. \end{aligned} \quad (10)$$

将式(9)代入(8),有

$$\begin{aligned} p(x_k, r_k^j | Y_k) &= \\ \frac{p(y_k | x_k, r_k^j)}{a_k} \sum_{i=1}^m \pi_{ij} \int p(x_k | r_k^j, x_{k-1}^{i,n}) \times \\ &\sum_{n=1}^N u_{k-1}^{i,n} \delta(x_{k-1} - x_{k-1}^{i,n}) dx_{k-1} = \\ \frac{p(y_k | x_k, r_k^j)}{a_k} \sum_{i=1}^m \sum_{n=1}^N u_{k-1}^{i,n} x_{k-1}^{i,n} \pi_{ij} p(x_k | r_k^j, x_{k-1}^{i,n}). \end{aligned} \quad (11)$$

可以看出, k 时刻模态 j 下状态的后验概率密度函数由 $N \times m$ 个粒子及其权值所构建. 然而, $k-1$ 时刻任意模态下的粒子数均为 N , 若按式(11)直接求取状态的估计值, 将会造成粒子数目随时间呈指数增长. 另外, 考虑到式(11)中的似然函数 $p(y_k | x_k, r_k^j)$ 及状态方程 $p(x_k | r_k^j, x_{k-1}^{i,n})$ 均是在系统模型严格已知假设下的表达式, 而本文模型(1)和(2)均为名义上模型, 并不能真实反映系统的动态, 因此, 不能直接将其结合于式(11)进行求解.

针对上述问题, 本文引入如下滤波误差项:

$$\varphi(x_{k-1}^{i,n}) = \exp[(x_{k-1}^{i,n} - \hat{x}_{k-1})^T \theta (x_{k-1}^{i,n} - \hat{x}_{k-1})]. \quad (12)$$

其中: \hat{x}_{k-1} 为 $k-1$ 时刻状态的估计值; $\theta \in [0, \infty)$ 为滤波误差项权值, 为设计参数. 可以看出, 对于初始粒子 $x_{k-1}^{i,n}$, 偏离状态估计值 \hat{x}_{k-1} 越远, 其滤波误差项 $\phi(\cdot)$ 也越大. 将 $k-1$ 时刻各模态下的初始粒子集按下式进行交互以获取 k 时刻的先验粒子:

$$x_{k-1|k-1}^{j,n} = \sum_{i=1}^m \eta_{k-1}^{ij,n} x_{k-1}^{i,n}, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (13)$$

$$\eta_{k-1}^{ij,n} = \frac{\pi_{ij} u_{k-1}^{i,n} \phi(x_{k-1}^{i,n})}{\sum_{i=1}^m \pi_{ij} u_{k-1}^{i,n} \phi(x_{k-1}^{i,n})}. \quad (14)$$

由上述过程可以看出, 经交互作用后, k 时刻任意模态下的粒子数目均固定为 N , 在牺牲部分估计精度的前提下, 很好地解决了粒子数目随时间呈指数增长的问题. 另外, 由于模型的不确定性, 会引起采样所得粒子的分布偏离真实轨迹, 即真实粒子的权值普遍偏小, 而误差粒子的权值往往较大, 使得真实粒子对最终估计值的影响被大大削弱. 尤其当模型误差较大时, 真实粒子均会被误认为误差粒子, 导致算法失效. 式(13)通过引入滤波误差项 $\phi(x_{k-1}^{i,n})$ 来增强小权值粒子在交互过程中的作用, 相当于对误差模型的一种校正, 其中权值 θ 决定校正的程度. 当 $\theta = 0$ 时, 所有粒子的滤波误差项 $\phi(\cdot)$ 均为 1, 即对当前模型不施加任何校正作用, 此时式(13)退化为传统的交互过程^[8]. 因此, 传统交互过程可以视为本文交互过程在精确模

型下的一个特例.

获取 k 时刻模态 j 下的先验粒子后, 可利用系统方程获取预测粒子, 即

$$x_{k|k-1}^{j,n} \sim p(x_k | r_k^j, x_{k-1|k-1}^{j,n}). \quad (15)$$

此时, 按下式计算粒子权值:

$$\sigma_k^{j,n} = p(y_k | x_{k|k-1}^{j,n}, r_k^j) \sum_{i=1}^m \eta_{k-1}^{ij,n}. \quad (16)$$

对其进行归一化, 可得

$$\bar{\sigma}_k^{j,n} = \sigma_k^{j,n} / \sum_{n=1}^N \sigma_k^{j,n}. \quad (17)$$

考虑粒子退化问题, 同时为获取较高的计算效率, 在每一时刻对预测粒子按其归一化后的权值进行残差重采样^[13-14], 以获取相同权值的后验粒子 $x_k^{j,n}$. 结合式(13)和系统似然来更新 k 时刻模态 j 的概率

$$u_k^{j,n} = \frac{p(y_k | x_k^{j,n}, r_k^j) \sum_{i=1}^m \pi_{ij} u_{k-1}^{i,n} \phi(x_{k-1}^{i,n})}{\sum_{j=1}^m \sum_{n=1}^N p(y_k | x_k^{j,n}, r_k^j) \sum_{i=1}^m \pi_{ij} u_{k-1}^{i,n} \phi(x_{k-1}^{i,n})}. \quad (18)$$

此时, 系统状态的后验概率密度函数的粒子表达式为

$$p(x_k, r_k^j | Y_{k-1}) = \sum_{n=1}^N u_k^{j,n} \delta(x_k - x_k^{j,n}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (19)$$

依据式(10), k 时刻模态 j 的概率为

$$P_r(r_k^j | Y_k) = \int p(x_k, r_k^j | Y_k) dx_k = \sum_{n=1}^N u_k^{j,n}. \quad (20)$$

对各个模态下的估计值进行交互, 得到 k 时刻系统状态的最终估计值为

$$\hat{x}_k = \sum_{n=1}^N \sum_{j=1}^m u_k^{j,n} x_k^{j,n}. \quad (21)$$

3.3 算法的实现

与传统的 IMM-PF 算法相比较, UIMM-PF 算法的不同之处在于利用滤波误差对系统模型进行校正. 其计算机实现的主要步骤如下:

1) 初始化. $k = 0$, 从先验分布中获取初始粒子 $x_0^{i,n} \sim p(x_0, r_0^i)$, $n = 1, 2, \dots, N$. 在初始模态完全未知的情况下, 可令 $u_0^{i,n} = 1/(m \times N)$.

2) 不确定交互. $k = k + 1$, 按式(13)和(14)计算各个模态下的先验粒子 $x_{k-1|k-1}^{j,n}$.

3) 粒子更新. 按式(15)获取预测粒子 $x_{k|k-1}^{j,n}$.

4) 残差重采样. 按式(16)和(17)计算粒子权值, 并依据残差重采样法则获取后验粒子 $x_k^{j,n}$.

5) 模型更新及输出. 按式(18)更新模型概率, 结合后验粒子, 按式(21)获取系统状态的估计值. 判断滤波是否结束(是否达到预设时间), 若否, 则返回步

骤 2).

4 仿真实验及结果分析

为说明算法的有效性, 将传统 IMM-PF 和 UIMM-PF 进行比较分析, 采用的仿真模型为^[15-16]:

$$x_k = 0.5x_{k-1} + 25x_{k-1}/(1 + x_{k-1}^2) + 8 \cos(1.2(k-1)) + \alpha_r + w_k, \quad (22)$$

$$y_k = x_k^2/20 + v_k. \quad (23)$$

其中: $w_k \sim N(0, 0.1)$, $v_k \sim N(0, 1)$ 为相互独立的高斯白噪声. 系统具有两个模态, 其真实参数分别为 $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$. 模态间的转移概率矩阵为

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.25 & 0.75 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

为了刻画系统模型的不确定性, 所有算法均采用 $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 8$ 来代替各自模态下真实的模型参数. 考虑到仿真的随机性, 定义 H 次蒙特卡罗仿真的平均均方根误差 (RMSE) 为

$$RMSE = \frac{1}{H} \frac{1}{T} \sum_{h=1}^H \sum_{k=1}^T \sqrt{(x_k^h - \hat{x}_k^h)^2}. \quad (25)$$

其中: T 为时间步长, x_k^h 为第 h 次仿真下 k 时刻的状态的真实值, \hat{x}_k^h 为第 h 次仿真下 k 时刻状态的估计值. UIMM-PF 滤波误差权值 $\theta = 0.6$, 所有算法的粒子数目固定为 $N = 100$. 仿真结果如图 1, 图 2 及表 1 所示.

图 1 比较了 IMM-PF 和 UIMM-PF 在单次仿真下

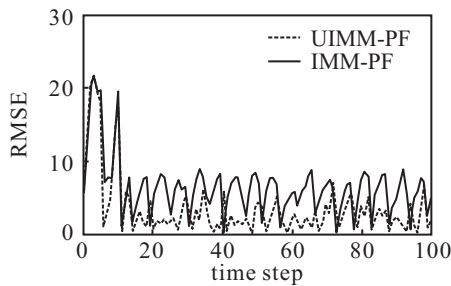


图 1 单次仿真下不同算法的 RMSE 比较

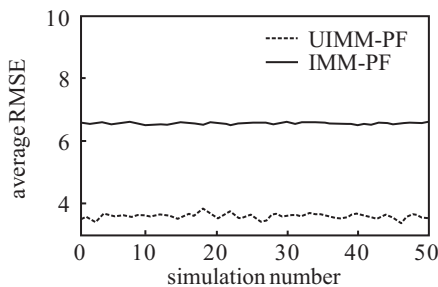


图 2 不同算法的平均 RMSE 比较

表 1 两种算法性能的比较

算法	平均 RMSE	平均在线计算时间/s
IMM-PF	6.57	0.530
UIMM-PF	3.61	0.583

各个时刻的均方根误差, 图 2 比较了 50 次仿真下两种不同算法的平均均方根误差. 结合表 1 可以看出, UIMM-PF 在滤波过程中利用滤波误差项来弥补模型误差带来的负面影响, 使其在相同粒子数目下的估计精度明显高于传统的 IMM-PF. 同时, 表 1 还比较了两种算法的在线计算时间, 可以看出 UIMM-PF 的计算时间略高于 IMM-PF, 但相比其在估计精度上的提高, 计算时间仍在合理范围之内.

由上文推导分析可知, 滤波误差权值决定着对误差模型的校正程度. 为此, 图 3 给出了 UIMM-PF 的平均均方根误差随滤波误差权值的变化曲线. 可以看出, 当权值为零时, UIMM-PF 的估计性能与 IMM-PF 相同, 与上文分析一致. 当权值逐渐增大, 即对误差模型的校正作用逐渐增强时, 算法的估计精度也随之提高. 然而, 过大的校正作用会使粒子分布完全混乱, 最终导致算法发散. 为此, 滤波误差权值的选取应视模型的不确定程度而定, 过小过大的权值均会影响算法的估计性能.

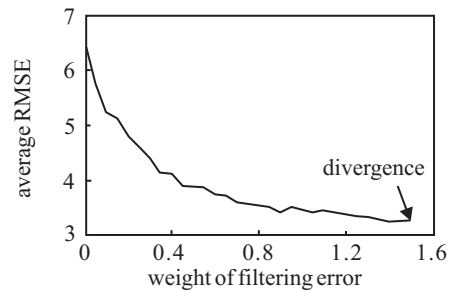


图 3 不同滤波误差与估计精度的关系

综上所述, UIMM-PF 对模型参数具有较强的鲁棒性, 在处理模型不确定非线性 Markov 跳变系统的状态估计问题时, 比 IMM-PF 更具有优越性和实用性.

5 结 论

本文提出了一种新的交互多模型粒子滤波算法. 该算法在传统交互多模型粒子滤波的基础上, 引入一带权值的滤波误差项, 在滤波过程中对粒子权值进行校正. 仿真例子表明, 该算法不仅保留了交互多模型粒子滤波的优越性, 而且对模型的不确定性也具有较强的鲁棒性, 在估计精确度及计算耗费方面均表现出较好的性能.

参考文献(References)

- [1] Mazor E, Averbuck A, Bar-Shalom Y, et al. Interacting multiple model methods in target tracking: A survey[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1998, 34(1): 103-123.
- [2] Logothetis A, Krishnamurthy V. Expectation maximization algorithms for MAP estimation of jump Markov linear

- systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 1999, 47(8): 2139-2156.
- [3] Mendel J M. Maximum-likelihood deconvolution: A journey into model-based signal processing[M]. New York: Springer-Verlag, 1990: 10-25.
- [4] Blom H, Bar-Shalom Y. The interacting multiple model algorithm for systems with Markovian switching coefficients[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(8): 780-783.
- [5] Tugnait J K. Adaptive estimation and identification for discrete systems with Markov jump parameters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27(5): 1054-1065.
- [6] Doucet A, Gordon N J, Krishnamurthy V. Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2001, 49(3): 613-624.
- [7] 胡士强, 敬忠良. 粒子滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 361-365.
(Hu S Q, Jing Z L. Overview of particle filter algorithm[J]. Control and Decision, 2005, 20(4): 361-365.)
- [8] Shao X G, Huang B, Lee J M. Constrained Bayesian state estimation — A comparative study and new particle filter based approach[J]. J of Process Control, 2010, 20(2): 143-157.
- [9] Blom H, Bloem A. Exact Bayesian and particle filtering of stochastic hybrid systems[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1): 55-69.
- [10] Moreland M R, Challa S. Maneuvering target tracking in clutter using particle filters[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41(1): 252-270.
- [11] Blom H, Bloem A. Particle filtering for stochastic hybrid systems[C]. The 43rd IEEE Conf on Decision and Control. Bahamas, 2004: 3221-3226.
- [12] Li X R, Bar-Shalom Y. Multiple-model estimation with variable structure[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(4): 478-493.
- [13] Liu J S, Chen R. Sequential Monte Carlo methods for dynamic systems[J]. J of the American Statistical Association, 1998, 93(443): 1032-1044.
- [14] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(2): 174-188.
- [15] Tafazoli S, Sun X. Hybrid system state tracking and fault detection using particle filters[J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2006, 14(6): 1078-1087.
- [16] Xue Y Z, Runolfsson T. State estimation and model detection for stochastic hybrid systems[C]. IEEE Int Symposium on Intelligent Control. San Antonio, 2008: 625-630.

(上接第1615页)

- [21] Wang D, Wang W, Shi P. Exponential H_∞ filtering for switched linear systems with interval time-varying delay[J]. Int of J of Robust and Nonlinear Control, 2009, 19(5): 532-551.
- [22] Hu K, Yuan J. Improved robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time switched systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2009, 3(3): 315-324.
- [23] Du D S. H_∞ filter for discrete-time switched systems with time-varying delays[J]. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2010, 4(4): 782-790.
- [24] Mahmoud M S. Delay-dependent H_∞ filtering of a class of switched discrete-time state delay systems[J]. Signal Processing, 2008, 88(11): 2709-2719.
- [25] Xiang Z R, Liang C Y, Chen Q W. Robust l_2-l_∞ filtering for switched systems under asynchronous switching[J]. Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2011, 16(8): 3303-3318.
- [26] Qiu J, Feng G, Yang J. New results on robust energy-to-peak filtering for discrete-time switched polytopic linear systems with time-varying delay[J]. IET Prec of Control Theory and Applications, 2008, 2(9): 795-806.
- [27] Du D S, Jiang B, Shi P, et al. H_∞ filtering of discrete-time switched systems with state delays via switched Lyapunov function approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(8): 1520-1525.
- [28] Zhang L X, Cui N G, Liu M, et al. Asynchronous filtering of discrete-time switched linear systems with average dwell time[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 2011, 58(5): 1109-1118.
- [29] Wang D, Wang W, Shi P. Design on H_∞ -filtering for discrete-time switched delay systems[J]. Int J of Systems Science, 2011, 42(12): 1965-1973.
- [30] Duan Z, Zhang J, Zhang C, et al. Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems[J]. Automatica, 2006, 42(11): 1919-1926.