

文章编号: 1001-0920(2012)11-1676-05

基于特征方程幅相特性的时滞线性系统状态反馈镇定

曾启杰, 章云, 唐斌, 陈贞丰

(广东工业大学 自动化学院, 广州 510006)

摘要: 研究具有输入时滞的线性时不变(LTI)系统的状态反馈控制镇定问题. 由于时滞的引入, 闭环系统特征方程变成一个超越方程. 从时滞系统的特征根求解出发, 从特征方程的实部和虚部系数中提取两个与系统矩阵和反馈矩阵相关的向量, 其幅值和相角关系正好反映了特征根轨迹穿越虚轴的情况, 且得到的判据将时滞参数与系统其他参数进行了分离, 可方便地应用于镇定控制器的设计. 最后通过仿真实例表明了该算法的正确性和有效性.

关键词: 线性系统; 镇定; 时滞; 特征方程

中图分类号: TP273

文献标志码: A

State feedback stabilization of LTI systems with input time delay based on amplitude and phase property of characteristic equation

ZENG Qi-jie, ZHANG Yun, TANG Bin, CHEN Zhen-feng

(Faculty of Automation, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China. Correspondent: ZENG Qi-jie, E-mail: jie2000@gdut.edu.cn)

Abstract: This paper investigates the state feedback stabilization of linear time-invariant(LTI) systems with input time delay. The existence of time delay transforms the closed-loop characteristic equation into a transcendental equation. By investigating the eigenvalues of the time-delay system, two vectors related to the system parameters and the feedback gain respectively can be obtained from the real part and the imaginary part of the transcendental equation. The amplitude and phase relations of these two vectors indicate the crossing situation of the root locus on the imaginary axis. Furthermore, the time delay is dependent on the system parameters and the feedback gain explicitly in this criterion, so that the state feedback stability controller can be designed more expediently. Finally, numerical examples illustrate the correctness and effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: linear systems; stabilization; time delay; characteristic equation

1 引言

在实际的控制过程中, 时滞现象普遍存在, 如执行机构、传感器和传输网络都可能引起时滞, 这种类型的时滞可归为输入时滞. 时滞常常是造成系统性能下降甚至不稳定的一个重要原因. 时滞的存在使系统的闭环特征方程成为超越方程, 造成系统的稳定性分析和控制器设计变得困难. 因而, 许多学者不断寻求各种方法来解时滞系统的稳定性问题^[1-5].

采用 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理是时滞系统稳定性分析的一类常用方法^[6-7], 如何构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函以及如何处理泛函的导数是该方法的关键. 一方面, 对由于引入时滞而构成的

非线性系统构造其 Lyapunov 函数往往具有很大困难; 另一方面, 使用各种不等式^[7]来处理泛函的导数, 也为结果带来了一定的保守性.

直接分析超越特征方程根的分布是时滞系统稳定性分析的另一类主要方法. 这类方法主要通过求解系统特征方程准确获得系统的稳定性判据. 由于超越特征方程求解困难, 一些学者通过对超越特征方程中的时滞项的逼近来得到近似的结果^[8-11]. 另外, 实际系统在时滞为零时常常是稳定的; 随着时滞的增加, 系统特征根轨迹会朝着虚轴移动. 因此, 求出首次穿越虚轴的临界稳定时滞 d^* 是非常有意义的^[12-17]. 文献 [12] 给出了一种辅助多项式方法求解时滞 d^* , 但

收稿日期: 2011-05-17; 修回日期: 2011-09-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(U0735003, 60974047, 61104105); 广东省自然科学基金项目(8351009001000002, 9451009001002702).

作者简介: 曾启杰(1977—), 男, 讲师, 博士生, 从事网络控制、智能控制等研究; 章云(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 从事智能控制、网络控制等研究.

对于高维情况, 该方法的计算量仍然很大; [13-14] 给出了穿越后不稳定特征根在虚轴右侧的矩形区域; [15] 给出了计算虚轴上闭环特征根的方法; [16] 研究了特征根穿越虚轴的趋势; [17] 用稳定穿越集的方法研究了多时滞线性系统的稳定性.

上述方法主要集中于稳定性的分析方面, 得到的稳定性判据的计算仍较复杂. 另一方面, 如果能在保证时滞为零时系统具有期望的动态性能的条件下, 设计出具有最大临界稳定时滞 d^* 的镇定控制器, 无疑更具工程实际意义.

本文从时滞系统的特征根的求解出发, 从特征方程的实部和虚部系数中提取出两个分别仅与系统矩阵和反馈矩阵相关的向量. 这两个向量的幅值和相角关系正好反映了特征根轨迹穿越虚轴的情况, 且得到的判据将 d 与其他参数显式地分离, 可方便地应用于镇定控制器的设计.

2 问题描述

控制对象和控制律为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ u(t) &= Kx(t-d). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ 和 $K \in R^{m \times n}$ 为相应维数的常数矩阵; d 为时滞常量.

令 $A_d = BK$, 系统 (1) 可描述为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-d). \quad (2)$$

不失一般性, 假设 (A, B) 是能控的, 且当 $d = 0$ 时系统 (1) 是渐近稳定的.

系统 (1) 的特征方程为

$$\det(sI_n - A - A_d e^{-ds}) = 0. \quad (3)$$

定义 1 已知系统 (2) 的系数矩阵 (A, A_d) , 如果存在实数 d^* , 使得当 $d \in [0, d^*)$ 时, 系统 (2) 是渐近稳定的, 且当 $d = d^*$ 时系统临界稳定, 则 d^* 为系统的临界稳定时滞.

不难得知, 特征根轨迹连续地依赖时滞参数 d 的变化, 如果系统由于时滞导致不稳定, 则一定存在 d^* , 使得当 $d \in [0, d^*)$ 时系统 (2) 仍然是渐近稳定的, 即特征根仍在复平面的左半开平面内. 若 $d^* = +\infty$, 则系统的稳定性与时滞的大小无关.

从特征方程可以看出, d^* 完全取决于 (A, A_d) 的取值. 因此, 时滞系统稳定性分析的关键问题是找到 d^* 和 (A, A_d) 之间的关系, 并且能在此关系中直接简便地求出 d^* .

3 系统稳定性

先考虑单输入情形, 即 $m = 1$. 由于假定 (A, B)

是能控的, 系统 (2) 一定可写为能控标准形式. 不失一般性, 设

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ K &= -[k_0 \ k_1 \ \cdots \ k_{n-1}], \\ A_d = BK &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -k_0 & -k_1 & \cdots & -k_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4)$$

设虚轴上的特征根为 $s = j\omega$, 且 $e^{-j\omega d} = \cos(\omega d) - j \sin(\omega d)$, 系统 (2) 的特征方程可写为

$$\sum_{i=0}^n (a_i + k_i(\cos(\omega d) - j \sin(\omega d)))(j\omega)^i = 0. \quad (5)$$

其中: $a_n = 1, k_n = 0$.

由式 (5) 可以看出, 如果存在关于 ω 的实数解, 则系统特征根轨迹必然存在与虚轴的交点.

分别使式 (5) 的实部和虚部等于零, 可得

$$\begin{cases} \bar{a}^T \beta + \bar{k}^T \beta \cos(\omega d) + \bar{k}^T \gamma \sin(\omega d) = 0, \\ \bar{a}^T \gamma - \bar{k}^T \beta \sin(\omega d) + \bar{k}^T \gamma \cos(\omega d) = 0. \end{cases}$$

写成向量的形式, 即

$$\begin{bmatrix} \bar{a}^T \beta \\ \bar{a}^T \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi - \omega d) & -\sin(\pi - \omega d) \\ \sin(\pi - \omega d) & \cos(\pi - \omega d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{k}^T \beta \\ \bar{k}^T \gamma \end{bmatrix}. \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta &= \text{col}\{\beta_0 \ \beta_1 \ \cdots \ \beta_n\}, \quad \gamma = \text{col}\{\gamma_0 \ \gamma_1 \ \cdots \ \gamma_n\}, \\ \bar{a} &= \text{col}\{a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_n\}, \quad \bar{k} = \text{col}\{k_0 \ k_1 \ \cdots \ k_n\}. \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} \beta_i &= \begin{cases} (-1)^{\frac{i}{2}} \omega^i, & i \text{ 为偶数}; \\ 0, & i \text{ 为奇数}. \end{cases} \\ \gamma_i &= \begin{cases} 0, & i \text{ 为偶数}; \\ (-1)^{\frac{i-1}{2}} \omega^i, & i \text{ 为奇数}. \end{cases} \\ & \quad i = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

令 $A_\omega = \text{col}\{\bar{a}^T \beta \ \bar{a}^T \gamma\}$, $K_\omega = \text{col}\{\bar{k}^T \beta \ \bar{k}^T \gamma\}$, 则式 (6) 成立的充要条件为同时满足下式的幅值和相角条件:

$$\begin{cases} |A_\omega| = |K_\omega|; \\ \cos((\pi - \omega d) + 2\zeta\pi) = \frac{(A_\omega, K_\omega)}{|A_\omega| \cdot |K_\omega|}, \quad \zeta \in Z. \end{cases} \quad (7)$$

其中 Z 为整数集.

定义

$$\psi = \frac{(A_\omega, K_\omega)}{|A_\omega| \cdot |K_\omega|}, \theta = \angle A_\omega - \angle K_\omega, \theta \in (-\pi, \pi],$$

其中 $\angle A_\omega$ 和 $\angle K_\omega$ 分别是向量 A_ω 和 K_ω 的相角. 可将式 (7) 改写为

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_a(\omega) - F_k(\omega) = |A_\omega|^2 - |K_\omega|^2 = 0; \quad (8) \\ d &= D(\omega) = \\ &\begin{cases} (1/\omega)[(2\zeta + 1)\pi + \arccos \psi], & \theta \in (-\pi, 0]; \\ (1/\omega)[(2\zeta + 1)\pi - \arccos \psi], & \theta \in (0, \pi]; \end{cases} \quad (9) \\ &\zeta \in Z. \end{aligned}$$

其中 $F_a(\omega)$ 和 $F_k(\omega)$ 均为关于 ω 的偶函数.

从式 (8) 可知, $F_a(\omega) = |A_\omega|^2$ 只依赖系统矩阵 A , $F_k(\omega) = |K_\omega|^2$ 只依赖反馈阵 K . 多项式方程 (8) 的次数为 $2n$, 因此其实数根的个数最多为 $2n$ 个. 考虑特征根关于实轴对称的性质, 则根轨迹穿越虚轴的频率个数为 \bar{n} ($\bar{n} \leq n$). 当确定虚轴上的穿越频率后, ζ 取不同整数, 由式 (9) 可求得所有虚轴穿越点的时滞大小. 从定义 1 可知, $d^* = \min\{d\}$ 且 $d^* > 0$, 因此取 $\zeta = 0$ 即可得到 d^* .

若多项式方程 (8) 无实数解, 则特征根轨迹不穿越虚轴, 系统 (2) 的稳定性与时滞的大小无关.

由式 (8), (9) 两个向量 A_ω 和 K_ω 的关系可得以下定理.

定理 1 给定系统 (2), 且当 $d = 0$ 时系统是渐近稳定的, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\bar{n}} | \bar{n} \leq n\}$ 为方程 $F(\omega) = 0$ 的实数解集, 则有如下判据:

1) 如果 $\Omega \neq \emptyset$, 则当 $d \in [0, d^*]$ 时, 系统 (2) 渐近稳定, 其中 $d^* = \min_{\omega \in \Omega} \{D(\omega)|_{\zeta=0}\}$.

2) 如果 $\Omega = \emptyset$, 则系统 (2) 的稳定性与时滞的大小无关, 即 $d^* = +\infty$.

4 镇定控制器的设计

4.1 单输入系统

对于单输入系统, 如果不考虑时滞 d , 则可采用极点配置方法设计反馈增益 K . 若希望配置到 n 个期望极点位置上, 将得到唯一的反馈增益 K , 这样可根据定理 1 得到在这种状态反馈控制下的临界稳定时滞 d^* . 事实上, 为了保证系统的动态性能, 只需要将闭环极点配置到一定的区域即可, 这样还可以进一步选择反馈增益 K 以得到更好的 d^* [18].

若期望将闭环系统极点配置在复平面上的区域 S 内, S 为圆心在 $(-q, 0)$ 且半径为 r 的圆盘. 其中: $r > 0, q > 0$ 为给定的常数, 则要求 K 满足如下约束:

引理 1 令 $\widehat{A} = A + BK$, 其特征值均在区域 S 中的充分必要条件是存在一个对称正定矩阵 H , 使如下矩阵不等式成立[19]:

$$\begin{bmatrix} -rH & qH + \widehat{A}H \\ qH + H\widehat{A}^T & -rH \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

其他形状区域约束可参见文献 [19]. 如果目标区域 S 是多个区域的交集, 则需同时满足相应的多个矩阵不等式的约束. 根据矩阵不等式性质, 可将约束矩阵的各阶顺序主子式分别列出并转化为约束函数不等式, 记作

$$g_j(k, h) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (11)$$

其中: $k = (k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ 为反馈系数; $h = (h_1, h_2, \dots, h_{n(n+1)/2})$ 为对称阵 H 的独立变元; p 为转化后约束不等式的个数, 如区域 S 为 $2n$ 个. 因此, 可将控制器设计归为如下约束优化问题:

$$\max d^* = \max_k \{ \min_{\omega} \{ D(k, \omega) |_{\zeta=0} \} \}, \quad (12)$$

其中 k 满足式 (8) 和 (11) 的约束.

为了解决式 (12) 的优化问题, 下面给出一种基于内点罚函数法的优化算法[20].

定义增广向量 $\bar{x} \triangleq (k, h)$, 设优化目标函数

$$f(\bar{x}) \triangleq -D(\bar{x}) + \delta G(\bar{x}), \quad (13)$$

其中 $G(\bar{x}) = \sum_{i=1}^p g_i(k, h)$, 则当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 无约束问题 $\min f(\bar{x})$ 的最优解可近似为约束问题 (12) 的最优解.

算法 1 对于单输入状态反馈时滞控制系统 (1), 满足当 $d = 0$ 时闭环系统极点在指定区域 S 中, 且系统的临界稳定时滞 d^* 最大的控制器的设计步骤如下:

Step 1: 令 $d = 0$, 使用极点配置法选取一组闭环极点在区域 S 中的初始状态反馈系数 $k^{(0)}$; 求解 $k = k^{(0)}$ 时满足式 (10) 的正定对称矩阵 H 得到 $h^{(0)}$; 初始化参数 δ_0 , 缩小系数 $\rho \in (0, 1)$, 阈值 ε_1 和 ε_2 ; 置 $j := 0$.

Step 2: 求多项式方程 $F(k^{(j)}, \omega) = 0$ 的实数解集 $\Omega^{(j)} = \{\omega_1^{(j)}, \omega_2^{(j)}, \dots, \omega_{\bar{n}}^{(j)} | \bar{n} \leq n\}$. 令 $\omega^{(j)} = \omega_\eta^{(j)}$, 其中 $\omega_\eta^{(j)}$ ($1 \leq \eta \leq \bar{n}$) 满足 $\min \{ D(k^{(j)}, \omega^{(j)}) |_{\zeta=0} \}$. 如果 $\Omega^{(j)} = \emptyset$, 则停止计算, $k^{(j)}$ 即为所求的反馈系数.

Step 3: 将 $\omega = \omega_\eta^{(j)}$ 代入 $D(k, \omega)|_{\zeta=0}$, 以 $\bar{x}^{(j)} = (k^{(j)}, h^{(j)})$ 为初始点, 求解以下优化问题:

$$\min f(\bar{x}) = -D(\bar{x}) + \delta_j G(\bar{x}).$$

以梯度法为例, 计算搜索方向 $\Delta \bar{x}^{(j)} = -\nabla f(\bar{x}^{(j)})$, 其中 $\nabla f(\bar{x}^{(j)})$ 为函数 f 的梯度. 令 $\bar{x}^{(j+1)} = \bar{x}^{(j)} + \lambda \Delta \bar{x}^{(j)}$, 其中 λ 为合适的步长. 若 $\|\Delta \bar{x}^{(j)}\| < \varepsilon_2$, 则转 Step 4; 否则令 $\delta_{j+1} = \delta_j, j := j + 1$, 转 Step 2.

Step 4: 若 $\delta_j G(\bar{x}^{(j)}) < \varepsilon_1$, 则停止计算, $k^{(j)}$ 即为所求的反馈系数; 否则, 令 $\delta_{j+1} = \rho \delta_j, j := j + 1$, 转 Step 2.

4.2 多输入系统

对于多输入系统, 可通过设计解耦反馈增益阵 K , 将其分解为多个单输入子系统, 再进行稳定性分析和控制器的设计.

若 (A, B) 完全能控, 则多输入系统可写为 Wonham 能控标准形. 设 A, B 和 K 的分块形式为

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} A_{11} & & 0 \\ A_{21} & A_{22} & \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{ll} \end{bmatrix}, \\
 B &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & B_{12} \\ & b_2 & B_{22} \\ & & \vdots \\ 0 & & b_l & B_{l2} \end{bmatrix}, \\
 K &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1l} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2l} \end{bmatrix}, \\
 b_p &= \text{col}\{ \underbrace{0 \ \cdots \ 0 \ 1}_{\mu_p} \}, \quad p = 1, 2, \dots, l,
 \end{aligned} \tag{14}$$

其中对角线上的分块矩阵 $A_{pp}(p = 1, 2, \dots, l)$ 的形式与式 (4) 中的系统矩阵 A 相同, $\mu_p = \text{rank}(A_{pp}), p = 1, 2, \dots, l$.

$$\begin{aligned}
 \text{令} \\
 \begin{bmatrix} b_1 & 0 & B_{12} \\ & b_2 & B_{22} \\ & & \vdots \\ 0 & & b_p & B_{p2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K}_{1p} \\ K_{2p} \end{bmatrix} = \\
 \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ k_{p1} & \cdots & k_{p\mu_p} \end{bmatrix} = K_{pp}, \quad p = 1, 2, \dots, l. \tag{15}
 \end{aligned}$$

其中: \bar{K}_{1p} 为矩阵 K_{1p} 的前 p 行, 矩阵 K_{pp} 的形式与式 (4) 中矩阵 A_d 相同.

这时, 多输入系统被分解为 l 个能控标准型的单输入子系统 $(A_{pp}, K_{pp}), p = 1, 2, \dots, l$, 可采用式 (13) 的优化方法设计 K_{pp} , 最后通过式 (15) 求得解耦的反馈增益矩阵 K . 此外, 式 (15) 只对 \bar{K}_{1p} 和 K_{2p} 有约束, 设计的控制律具有一定的自由度.

5 仿真实例

例 1 考虑如下三阶系统:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t), \\
 u(t) &= Kx(t-d).
 \end{aligned}$$

设计 $d = 0$ 时的闭环系统极点位于圆盘区域 S : 以 $q = -6 + j0$ 为圆心, $r = 2$ 为半径, 如图 1 所示, 且 d^* 最大的状态反馈控制器.

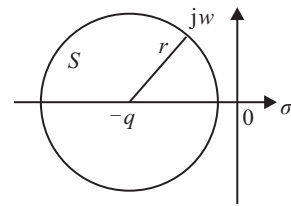


图 1 极点配置区域

按 Wonham 能控标准形, 系统可分解为两个维数分别为 $\mu_1 = 1$ 和 $\mu_2 = 2$ 的子系统. 选取 $d = 0$ 时极点在区域 S 内的初始反馈系数: $k_1^{(0)} = -7, k_2^{(0)} = [-25.04 \ -10]$. 使用算法 1 对两个单输入子系统分别计算可得 $k_1 = -5, k_2 = [-24.959 \ -9.502], d_1^* = 0.2795, d_2^* = 0.1332$. 因此, 系统的临界稳定时滞为 $d^* = \min\{d_1^*, d_2^*\} = 0.1332$.

由式 (15) 可得

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 0 \\ -24.959 & 24.959 & -9.502 \end{bmatrix}.$$

采用文献 [21] 中不考虑时滞的区域极点配置法, 得到状态反馈控制器为

$$K = \begin{bmatrix} -0.140 & -6.313 & -0.024 \\ -28.56 & 28.56 & -10.69 \end{bmatrix}.$$

使用 Matlab 的 LMI 工具箱函数 msfsyn, 求得无时滞时极点在区域 S 内的控制器为

$$K = \begin{bmatrix} -3.000 & -4.000 & -0.500 \\ -30.574 & 30.574 & -11.106 \end{bmatrix}.$$

图 2~图 4 分别显示了当 $d = 0.13$ 时, 分别采用

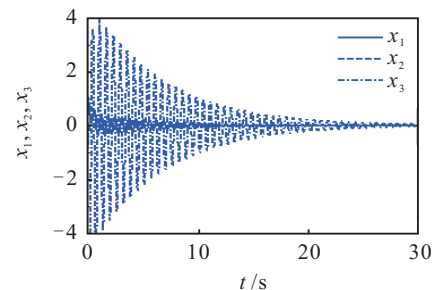


图 2 本文设计控制器的状态响应

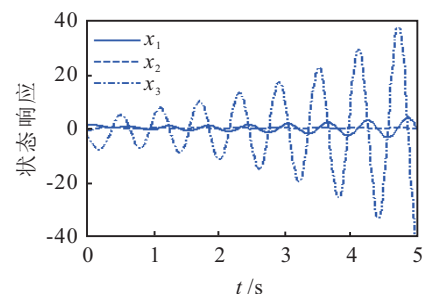


图 3 文献 [21] 所得控制器的状态响应

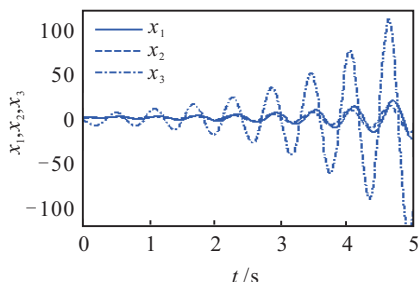


图4 LMI工具箱所得控制器的状态响应

本文算法, 文献 [21] 以及 LMI 工具箱所得控制器的系统状态响应曲线. 由图 2~图 4 可知, 本文所得控制器仍然能使系统稳定, 而文献 [21] 和 LMI 工具箱所得控制器无法保证系统稳定.

6 结论

本文对一类具有输入时滞的 LTI 系统状态反馈镇定问题进行了分析, 从超越特征方程的实部和虚部提取两个二维向量. 这两个向量的幅值和相角关系正好反映了系统根轨迹穿越虚轴的情况, 且两个向量仅分别与系统矩阵和反馈矩阵相关. 在此基础上, 结合极点配置法, 给出了一种既可以保持给定的闭环系统控制性能, 又能满足稳定时滞区间最大的算法. 最后, 用数值算例验证了本文所提出方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] 秦元勋, 刘永清, 王联. 带有时滞的动力系统的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 1989: 91-108.
(Qin Y X, Liu Y Q, Wang L. Stability of delay dynamics systems[M]. Beijing: Science Press, 1989: 91-108.)
- [2] Kharitonov V. Robust stability analysis of time delay systems: A survey[C]. Proc of IFAC Systems Structure Control. Nantes, 1998: 1-12.
- [3] Richard J P. Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems[J]. Automatica, 2003, 39(10): 1667-1694.
- [4] 张冬梅, 俞立. 线性时滞系统稳定性分析综述[J]. 控制与决策, 2008, 23(8): 841-849.
(Zhang D M, Yu L. Survey on the stability analysis of linear time-delay systems[J]. Control and Decision, 2008, 23(8): 841-849.)
- [5] Chesi G. LMI Techniques for optimization over polynomials in control: A survey[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(6): 2500-2510.
- [6] Zhang Y S, Peet M, Gu K Q. Reducing the complexity of the sum-of-squares test for stability of delayed linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(1): 229-234.

- [7] Park P, Ko J W, Jeong C. Reciprocally convex approach to stability of systems with time-varying delays[J]. Automatica, 2011, 47(1): 235-238.
- [8] Ohta Y, Kojima A. Formulas for Hankel singular values and vectors for a class of input delay systems[J]. Automatica, 1999, 35(3): 201-215.
- [9] Yoon M G, Lee B H. A new approximation method for time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(7): 1008-1012.
- [10] Batlle C, Miralles A. On the approximation of delay elements by feedback[J]. Automatica, 2000, 36(5): 659-664.
- [11] Souza F O, Oliveira M C, Palhares R M. Stability independent of delay using rational functions[J]. Automatica, 2009, 45(9): 2128-2133.
- [12] Chiasson J. A method for computing the interval of delay values for which a differential-delay system is stable[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems, 1988, 33(8): 1176-1178.
- [13] Mori T, Kokame H. Stability of $x(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$ [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(4): 460-462.
- [14] Su J H, Fong I K, Tseng C L. Stability analysis of linear systems with time delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(6): 1341-1344.
- [15] Olgac N, Sipahi R. An exact method for the stability analysis of time-delayed linear time-invariant(LTI) systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(5): 793-797.
- [16] Jarlebring E, Michiels W. Invariance properties in the root sensitivity of time-delay systems with double imaginary roots[J]. Automatica, 2010, 46(6): 1112-1115.
- [17] Gu K Q, Nagnhaeian M. Stability crossing set for systems with three delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2011, 56(1): 11-26.
- [18] Mao W J, Chu J. D-stability and D-stabilization of linear discrete time-delay systems with polytopic uncertainties[J]. Automatica, 2009, 45(3): 842-846.
- [19] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 94-104.
(Yu L. Robust control — Linear matrix inequality approach[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 94-104.)
- [20] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 393-404.
(Chen B L. Optimization theory and algorithms[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 393-404.)
- [21] Furuta K, Kim S B. Pole assignment in a specified disk[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(5): 423-427.