

文章编号: 1001-0920(2012)11-1639-05

基于 H-EMD 的形状上下文特征形状匹配方法

郑丹晨, 韩 敏

(大连理工大学 电子信息与电气工程学部, 辽宁 大连 116023)

摘要: 为了快速有效利用推土机距离(EMD)模型计算直方图间的交叉相似度, 提出一种基于直方图的 EMD(H-EMD)模型. 将原始模型对应的线性规划问题中变量数目进行约减, 降低了直方图相似度计算的复杂度. 利用 H-EMD 模型计算形状上下文特征间的相似度, 进而对基于形状上下文形状匹配方法进行改进. 通过对不同的数据仿真结果进行比较, H-EMD 模型在匹配时间上更具优势, 同时, 改进的形状匹配方法能有效实现形状识别和检索.

关键词: 直方图匹配; 推土机距离; 基于直方图的推土机距离; 形状上下文特征; 形状匹配

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Shape context based on H-EMD algorithm for shape matching

ZHENG Dan-chen, HAN Min

(Faculty of Electronic Information and Electrical Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China.

Correspondent: HAN Min, E-mail: minhan@dlut.edu.cn)

Abstract: Histogram-based earth mover's distance(EMD) (H-EMD) as an extension of EMD model is proposed for computing the cross-bin dissimilarity between histograms. For H-EMD model, the complexity of computing the cross-bin dissimilarity is reduced by eliminating the number of variables in linear program. On this basis, H-EMD is further adopted for computing the dissimilarity of shape context, and the shape matching method based on shape context descriptor is improved. H-EMD provides outperformance in computational complexity, and the experimental results show that the shape recognition can be effectively achieved by using the improved shape matching method.

Key words: histogram matching; EMD; H-EMD; shape context; shape matching

1 引言

直方图是一种标准的数据压缩存储形式, 能够很好地描述数据信息的统计学特征^[1]. 在计算机视觉领域, 图像的颜色信息、纹理特征信息以及局部特征等都可以利用直方图进行描述. 直方图相似度是匹配过程中反映其相似程度的一项重要指标, 其主要包括两大类: 顺序相似度和交叉相似度^[2]. 顺序相似度由于具有运算简单、迅速等优点而被较多地用于匹配过程; 顺序相似度主要包括 L_1 距离、 L_2 距离、 χ^2 统计和 KL 分歧等, 但其忽略了栅格的空间关系, 因此计算结果不能很好地反映直方图之间的距离.

推土机距离(EMD)模型源于最优运输问题, 其充分利用了特征分布的紧凑性和灵活性, 具有较好的抗噪性和鲁棒性^[2]. 但 EMD 模型对应的是一个线性规划问题, 其求解过程会耗费大量的计算时间.

Ling 等^[3]对 EMD 方法进行改进, 提出了 EMD- L_1 模型, 但其在大量的低维直方图匹配过程中并不能实现快速的计算.

形状上下文特征(SC)是 Belongie 等^[4]提出的一种形状特征描述方法, 已经应用于医学研究、行为分析和目标识别等领域^[5-7]. 但是传统上下文特征匹配过程中采用的方法是 χ^2 统计, 作为一种顺序相似度, 它不能很好地反映直方图分布的相似程度, 没有充分体现形状上下文特征的优势.

针对以上问题, 本文首先提出了基于直方图的 EMD 模型(H-EMD), 结合直方图的结构对线性规划中变量数目进行约减, 降低其计算复杂度, 并进行了相应的定理证明. 将 H-EMD 模型引入利用形状上下文特征匹配过程以替代 χ^2 统计, 可提高形状上下文特征的匹配精度, 最终实现有效的形状检索和识别.

收稿日期: 2011-06-20; 修回日期: 2011-09-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61074096).

作者简介: 郑丹晨(1983-), 男, 博士生, 从事模式识别、计算机视觉的研究; 韩敏(1959-), 女, 教授, 博士生导师, 从事神经网络、模式识别等研究.

2 基于 EMD 的直方图的匹配

2.1 EMD 模型

首先给出 EMD 模型的定义. 已知两组不同的特征聚类集合分别为 $U = \{(u_i, w(u_i)) : 1 \leq i \leq m\}$ 和 $V = \{(v_j, w(v_j)) : 1 \leq j \leq n\}$, 两个集合中包含 m 和 n 个各聚类中心. 将 u_i 至 v_j 的转移权重和转移变量分别定义为 $D = \{d_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ 和 $F = \{f_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$. 进一步, 可得到如下线性规划问题:

$$E(U, V) = \min_{F=\{f_{ij}\}} \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} f_{ij}}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}}.$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^n f_{ij} \leq w(u_i), 1 \leq i \leq m; \\ \sum_{i=1}^m f_{ij} \leq w(v_j), 1 \leq j \leq n; \\ f_{ij} \geq 0, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n; \\ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} = \min\left(\sum_{i=1}^m w(u_i), \sum_{j=1}^n w(v_j)\right). \end{cases} \quad (1)$$

将 EMD 表示为如图 1 所示的货物运输问题模型, U 和 V 分别对应供给和需求, D 对应单位货物运输费用. EMD 的求解等价于计算将 U 运输至 V 的最小运输费用.

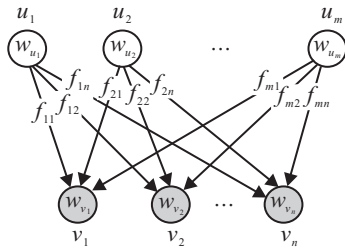


图 1 EMD 对应的运输问题模型

2.2 H-EMD 模型

利用 EMD 模型进行直方图匹配时, 聚类中心 u_i 和 v_j 分别对应直方图各栅格, $w(u_i)$ 和 $w(v_j)$ 对应直方图栅格下数值, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. 由于直方图结构是固定的, 定义 $H = \{h(i) : 1 \leq i \leq N\}$ 和 $K = \{k(j) : 1 \leq j \leq N\}$, 分别对应 U 和 V . 根据式 (1), 直方图匹配可表示为如下的线性规划形式:

$$E(H, K) = \min_{F=\{f_{ij}\}} \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} f_{ij}}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij}}.$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^N f_{ij} \leq h(i), 1 \leq i \leq N; \\ \sum_{i=1}^N f_{ij} \leq k(j), 1 \leq j \leq N; \\ f_{ij} \geq 0, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N; \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} = \min(\sigma_h, \sigma_k). \end{cases} \quad (2)$$

其中: $\sum_{i=1}^N h(i) = \sigma_h, \sum_{j=1}^N k(j) = \sigma_k$. 对式 (2) 进行分析

和简化, 可得到 H-EMD 模型, 其对应的表达式为

$$E_H(H, K) = \min_{F=\{f_{ij}\}} \frac{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_{ij} f_{ij}}{\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{ij}}.$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j \in J} f_{ij} \leq h(i) - k(i), i \in I; \\ \sum_{i \in I} f_{ij} \leq k(j) - h(j), j \in J; \\ f_{ij} \geq 0, i \in I, j \in J; \\ \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} f_{ij} = \min(\sigma_h, \sigma_k). \end{cases} \quad (3)$$

其中

$$I = \{i : 1 \leq i \leq N, h(i) > k(i)\},$$

$$J = \{j : 1 \leq j \leq N, h(j) < k(j)\},$$

$$\sum_{i=1}^N h(i) = \sigma_h, \sum_{j=1}^N k(j) = \sigma_k.$$

显然, 式 (3) 对应的仍是一个线性规划问题. 首先证明式 (3) 与 (2) 具有相同的最优解, 即 $E(H, K) = E_H(H, K)$; 然后分析式 (3) 与 (2) 的计算复杂度.

定理 1 已知 EMD 模型对应线性规划 (2) 的最优可行解为 $F = \{f_{ij} : 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N\}$, $f_{LL} < \min(h(L), k(L)), 1 \leq L \leq N$, 则存在最优可行解为 $F^* = \{f_{ij}^* : 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N\}$, $f_{LL}^* = \min(h(L), k(L))$.

证明 构造 $\Delta F = \{\Delta f_{ij} : 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq N\}$, 使其满足条件 $\Delta f_{LL} = -\sum_{i \neq L} \Delta f_{iL} = -\sum_{j \neq L} \Delta f_{Lj} =$

$\sum_{i \neq L} \sum_{j \neq L} \Delta f_{ij}$, 且

$$\begin{cases} \Delta f_{iL} \leq 0, \Delta f_{Lj} \leq 0, \Delta f_{ij} \geq 0, i \neq L, j \neq L; \\ f_{iL} \geq |\Delta f_{iL}|, f_{Lj} \geq |\Delta f_{Lj}|, i \neq L, j \neq L; \\ \Delta f_{LL} = \min(h(L), k(L)) - f_{LL}. \end{cases} \quad (4)$$

则可得到 $F^*, f_{ij}^* = f_{ij} + \Delta f_{ij}$, 使其为式 (2) 的可行解. 这里仅需证明 F^* 为式 (2) 的最优可行解.

$$\text{定义 } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N f_{ij}^* = \min(\sigma_h, \sigma_k) = \sigma,$$

则可得

$$E(H, K) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} f_{ij}.$$

定义 $E^*(H, K)$, 使得

$$E^*(H, K) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} f_{ij}^*.$$

假设 F^* 对应的不是最优可行解, 则有 $E^*(H, K) > E(H, K)$. 由于相同索引对应的聚类中心在相同位置上, 有 $d_{LL} = 0$. 进一步, 计算

$$E^*(H, K) - E(H, K) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N d_{ij} \Delta f_{ij} = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1, i \neq L}^N \sum_{j=1, j \neq L}^N (d_{ij} - d_{iL} - d_{Lj}) \Delta f_{ij}. \quad (5)$$

因 $d_{ij} - d_{iL} - d_{Lj} \leq 0, \Delta f_{ij} \geq 0$, 故 $E^*(H, K) - E(H, K) \leq 0$, 与假设矛盾, 因此 F^* 一定是最优解. \square

对定理 1 加以推广, L 分别取 $1 \sim N$ 时, 式(2)可转化为式(3). 在实际匹配问题中, 直方图是一种排列紧密的特征描述方式, 因此通常存在 $h(g) > 0, k(g) > 0$, 且 $h(g) \neq k(g)$ 的情形. 可以看出, 简化后的模型对应着一个规模更小、变量数目更少的 EMD 模型, 所以求解速度将得到较大的提升.

利用 EMD 模型进行直方图匹配示意如图 2(a) 所示, 其中 H 和 K 分别对应于两组直方图. 不同方格表示直方图的不同栅格, 白色区域表示零值, 黑色区域对应的数值大于浅灰色区域对应的数值. H-EMD 模型匹配示意如图 2(b) 所示. 其中: $\Delta = \{\delta(g) : \delta(g) = h(g) - k(g), 1 \leq g \leq N\}$, 深灰色区域表示 $\delta(g) < 0$. 其可以视为将直方图中 δ^+ 权重搬移至 δ^- , 这里 $\delta^+ =$

$\{\delta(g) : \delta(g) > 0, 1 \leq g \leq N\}, \delta^- = \{\delta(g) : \delta(g) < 0, 1 \leq g \leq N\}$. 可以看出, H-EMD 相比于 EMD, 变量数目明显减少.

3 基于 H-EMD 的形状上下文特征匹配

形状上下文特征是利用目标轮廓有限采样点的集合对形状进行表示, 将采样点集合视为 $P = \{p_1, \dots, p_\lambda\}$, λ 表示采样点的数目. 第 i 个采样点 p_i 作为参考坐标原点, 建立对数极坐标映射表示剩余的 $\lambda - 1$ 个采样点的分布, 可以得到直方图 $H_i = \{h_i(k) : 1 \leq k \leq K\}$. 其中

$$h_i(k) = \#\{q \neq p_i : (q - p_i) \in \text{bin}(k)\}, \quad (6)$$

q 为余下的采样点; $k = 1, \dots, K, K$ 为整个直方图栅格划分数目; 直方图 h_i 即为形状上下文特征.

将式(6)表示为二维直方图的形式, 可得

$$H_i = \{h_i(k) : 1 \leq k \leq K\} = \{h_i(m, n) : (m, n) \in D\}. \quad (7)$$

其中: $D = \{(m, n) : 1 \leq m \leq M, 1 \leq n \leq N\}$, M 和 N 表示对数极坐标系下分别将 $\log r$ 和 θ 进行 M 等分和 N 等分. 由于形状上下文特征是在对数极坐标系下构造的直方图, 不同的 $\log r$ 等级下空间结构和对应的采样点数目差异很大, 沿距离方向不便于进行交叉相似度的计算; 同时, 为了降低直方图匹配的复杂度, 减少匹配时间, 将直方图按照不同的 $\log r$ 等级归一化为

$$\bar{h}_i(k) = \bar{h}_i(m, n) = \frac{h_i(m, n)}{\sum_{n=1}^N h_i(m, n)}. \quad (8)$$

进一步, 定义直方图 $\bar{H}_{i,m} = \{\bar{h}_i(m, n) : 1 \leq n \leq N\}$.

假设 p_i 和 q_j 分别对应两个采样集合 P 和 Q 上的两个采样点, 利用 H-EMD 代替 χ^2 统计匹配损失函数, 可以得到采样点之间的匹配损失函数为

$$c(i, j) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_H(\bar{H}_{i,m}, \bar{H}_{j,m}). \quad (9)$$

由于 H-EMD 算法依然是解决线性规划问题, 相比于一般的顺序相似度计算仍具有较高的复杂度, 本文将利用分割匹配的方法减少采样点的匹配次数. 首先, 以采样点中心为参考点建立极坐标系, 对 $\theta \in [0, 2\pi)$ 进行 L 等分, 分别将各采样点划分至 L 个栅格内. 对于采样点 q_j , 若 $q_j \in \text{bin}(l)$, 则定义 $\phi(q_j) = l, 1 \leq l \leq L$. q_j 仅与集合 P_j 中的点进行匹配, $P_j = \{O_1 \cup O_2 \cup O_3\}$. 其中

$$O_1 = \left\{ \begin{array}{l} p : \phi(q_j) - 1 \leq \phi(p) \leq \phi(q_j) + 1, \\ \text{or } 2 \leq \phi(q_j) \leq L - 1 \end{array} \right\};$$

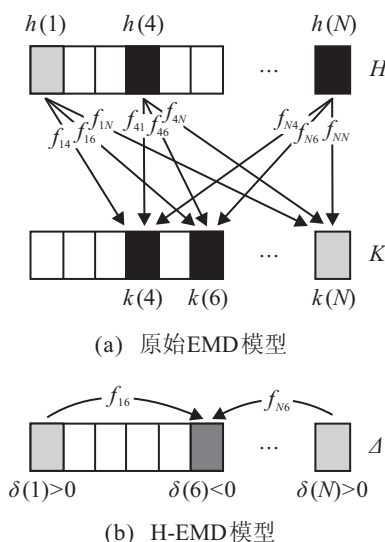


图 2 基于直方图的货物运输问题模型

$$O_2 = \left\{ \begin{array}{l} p : 1 \leq \phi(p) \leq \phi(q_j) + 1, \\ \text{or } \phi(p) = L, \phi(q_j) = 1 \end{array} \right\};$$

$$O_3 = \left\{ \begin{array}{l} p : \phi(q_j) - 1 \leq \phi(q_j) \leq L, \\ \text{or } \phi(p_i) = 1, \phi(q_j) = L \end{array} \right\}.$$

于是 P 中与 q_j 最匹配的采样点可表示为

$$p_{\psi(j)} = \arg \min_{p_i \in P_j} (c(i, j)). \quad (10)$$

进一步,可以得到 P 与 Q 的匹配结果为

$$C(P, Q) = \frac{1}{\lambda} \sum_{p_i \in P} \min_{q_j \in Q_i} (c(i, j)) + \frac{1}{\lambda} \sum_{q_j \in Q} \min_{p_i \in P_j} (c(i, j)). \quad (11)$$

因为形状上下文特征不具有旋转不变性,所以本文采用了一种循环移位匹配的方法进行形状上下文特征的匹配.对目标进行 S 次旋转(每次旋转 $2\pi/S$),每次旋转得到采样点集合 P^s ,分别计算 S 次损失函数,选择一个最优的参数 s ,其计算公式为

$$s = \arg \min_{1 \leq s \leq S} C(P^s, Q). \quad (12)$$

P^s 对应的直方图矩阵可以通过循环移位进行计算^[8],进而避免反复计算采样点对应的直方图矩阵.整个匹配过程的具体算法流程如图 3 所示.

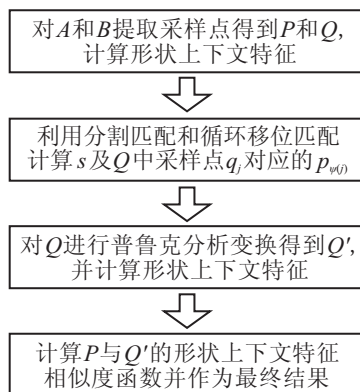


图 3 基于形状上下文特征的形状匹配流程

4 仿真分析

为了验证本文所提出 H-EMD 算法的快速性,以及与形状上下文特征结合进行形状匹配的有效性,分别针对不同组的数据进行仿真分析,将不同方法下形状识别检索精度和不同 EMD 算法匹配时间进行比较.

首先对 Kimia-25 形状数据^[9]和 Kimia-216 形状数据^[10]进行仿真分析. Kimia-25 数据库中包含 6 个类别共 25 个样本, Kimia-216 形状库中包含 18 个类别各 12 个样本.在两组仿真实验中,设置形状上下文特征中栅格参数为 $M = 5, N = 12$,采样点数目 $\lambda = 100$,匹配过程参数 $S = L = 12$.分别利用 L_2 距离、 χ^2 统计和本文提出的 H-EMD 模型进行形状检索. Kimia-25 数据的测试结果如表 1 所示,其中列出了最

邻近的 1~3 组形状的检索结果. Kimia-216 数据的测试结果如表 2 所示,其中列出了最近邻 1~11 组形状的检索结果.

表 1 Kimia-25 数据在不同方法下检索结果比较

方法	1st	2nd	3rd
MDS+SC+DP ^[11]	23	20	19
IDSC+DP ^[11]	25	24	25
CPDH+EMD ^[8]	25	24	24
Sharvit ^[9]	23	21	20
SC+ L_2	24	23	20
SC+ χ^2	25	24	22
SC+H-EMD	25	25	24

表 2 Kimia-216 数据在不同方法下检索结果比较

方法	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
SC+ L_2	213	212	208	206	197	197
SC+ χ^2	215	214	214	209	207	205
SC+H-EMD	216	216	216	211	213	204
方法	7th	8th	9th	10th	11th	全部
SC+ L_2	186	181	182	161	135	2078
SC+ χ^2	203	191	187	173	143	2161
SC+H-EMD	198	193	191	179	159	2196

由表 1 和表 2 可以看出, SC 结合 H-EMD (SC+H-EMD), 相比于 SC 结合 L_2 距离 (SC+ L_2) 和 χ^2 统计 (SC+ χ^2), 具有更高的形状检索精度. 表 1 同时列出了其他形状匹配方法对 Kimia-25 数据进行仿真的结果. 可以看出, 本文方法具有最好的检索结果.

为了验证本文方法应用于真实数据的有效性,对 Swedish Leaf 数据^[12]进行仿真分析. Swedish Leaf 数据库中包含 15 个树叶的类别各 75 个树叶样本. 实验中从各类别中选择 25 个样本作为训练样本, 剩余的 50 个样本作为测试样本. 设置形状上下文特征中栅格参数为 $M = 5, N = 12$, 采样点数目 $\lambda = 80$, 匹配过程参数 $S = L = 12$. 利用 SC+H-EMD 进行形状识别的结果如表 3 所示, 其中选择最近邻分类结果作为形状识别的结果. 从表 3 中可以看出, SC+H-EMD 具有最好的形状识别精度.

表 3 Swedish Leaf 数据在不同方法下识别结果比较

方法	识别精度/%
文献 ^[12]	82
Fourier ^[11]	89.6
SC+DP ^[11]	88.12
MDS+SC+DP ^[11]	95.33
IDSC+DP ^[11]	94.13
SC+H-EMD	95.33

为了比较 H-EMD 模型在计算时间上的优势, 分别利用单纯形法对原始 EMD 模型和 H-EMD 模型的计算时间进行分析, 同时给出了文献 [3] 中 EMD- L_1 模型的计算时间. 分别利用 Matlab 与 VC++ 混合编程, 计算机配置 Pentium(R) Dual-Core 2.93 GHz, 2 G 内

存. 在计算过程中, 直方图均随机生成, 栅格之间选择 L_1 距离, 多次计算并求取平均结果如图 4 所示.

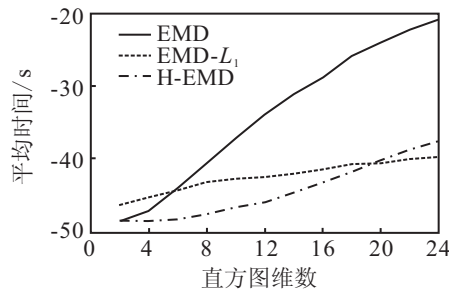


图 4 直方图匹配的平均时间

可以看出, 在 $N \leq 20$ 的情况下, H-EMD 算法具有最好的效果. 虽然低维直方图匹配计算时间很少, 但实际特征匹配过程中往往包含大量直方图相似度计算, 如形状匹配过程中, 形状上下文特征匹配次数为 10^4 以上, 因此, 降低时间复杂度具有非常重要的意义.

表 4 列出了利用 SC + EMD, SC + H-EMD 和 SC + EMD- L_2 进行形状匹配的平均时间, 可以看出, H-EMD 具有最好的效果.

表 4 不同模型下的形状上下文特征匹配时间 s

方法	EMD	EMD- L_1	H-EMD
平均时间	0.1467	0.9714	0.0790

5 结 论

本文结合直方图空间结构对 EMD 模型进行改进, 提出了 H-EMD 模型, 能够快速计算基于 EMD 的直方图间相似度匹配结果. 将 H-EMD 方法与形状上下文特征进行形状识别, 仿真结果表明了本文所提出的方法具有良好的形状识别精度和较短的匹配时间.

参考文献(References)

- [1] Ma Y, Gu X, Wang Y. Histogram similarity measure using variable bin size distance[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2010, 114(8): 981-989.
- [2] Rubner Y, Tomasi C, Guibas L J. The earth mover's distance as a metric for image retrieval[J]. Int J of Computer Vision, 2000, 40(2): 99-121.
- [3] Ling H, Okada K. An efficient earth mover's distance algorithm for robust histogram comparison[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(5): 840-853.
- [4] Belongie S, Malik J, Puzicha J. Shape matching and object recognition using shape contexts[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24(4): 509-522.
- [5] Shi Y, Thompson P M, de Zubicaray G I, et al. Direct mapping of hippocampal surfaces with intrinsic shape context[J]. NeuroImage, 2007, 37(3): 792-807.
- [6] Mori G, Malik J. Recovering 3D human body configurations using shape contexts[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2006, 28(7): 1052-1062.
- [7] Amores J, Sebe N, Radeva P. Context-based object-class recognition and retrieval by generalized correlograms[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(10): 1818-1833.
- [8] Shu X, Wu X. A novel contour descriptor for 2D shape matching and its application to image retrieval[J]. Image and Vision Computing, 2011, 29(4): 286-294.
- [9] Sharvit D, Chan J, Tek H, et al. Symmetry-based indexing of image databases[J]. J of Visual Communication and Image Representation, 1998, 9(4): 366-380.
- [10] Sebastian T B, Klein P N, Kimia B B. Recognition of shapes by editing their shock graphs[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2004, 26(5): 550-571.
- [11] Ling H, Jacobs D W. Shape classification using the inner-distance[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2007, 29(2): 286-299.
- [12] Soederkvist O. The main algorithm research on financial time series data mining[D]. Linköping: Linköping University of Sweden, 2001.
- [8] Bell J E, McMullen P R. Ant colony optimization techniques for the vehicle routing problem[J]. Advanced Engineering Informatics, 2004, 18(1): 41-48.
- [9] Gajpal Y, Abad P L. Multi-ant colony system(MACS) for a vehicle routing problem with backhauls[J]. European J of Operational Research, 2009, 196(1): 102-117.
- [10] Chen C H, Ting C J. An improved ant colony system algorithm for the vehicle routing problem[J]. J of the Chinese Institute of Industrial Engineer, 2006, 23(2): 115-126.
- [11] Juan A A, Faulin J, Ruiz R, et al. The SR-GCWS hybrid algorithm for solving the capacitated vehicle routing problem[J]. Applied Soft Computing, 2010, 10(1): 215-224.
- [12] <http://www.Branchandcut.org/VRP/data/>.

(上接第 1638 页)