

# 基于小波变换与偏微分方程的图像分解及边缘检测

张力娜<sup>1,2</sup>, 李小林<sup>2\*</sup>

(1. 咸阳师范学院 数学与信息科学学院, 陕西 咸阳 712000; 2. 咸阳师范学院 图形图像处理研究所, 陕西 咸阳 712000)

(\* 通信作者电子邮箱 ricky\_lxl@163.com)

**摘要:**针对含纹理的自然图像在图像分解时,结构图像的边缘信息容易被当作纹理分解到纹理图像中,致使结构图像的边缘不清晰,检测到的边缘不准确,提出了基于小波分解的偏微分方程(PDE)图像分解及边缘检测模型。首先利用小波变换阈值提取部分纹理信息,再利用改进的保边缘的偏微分方程图像分解模型进一步分解图像并提取边缘。实验结果表明,新方法提高了图像分解的质量,纹理信息提取充分,结构图像有较好的分片光滑性和较清晰的边缘,检测到的结构边缘更准确。

**关键词:**小波变换;偏微分方程;图像分解;边缘检测;结构;纹理

**中图分类号:** TP391.41; TN911.73 **文献标志码:** A

## Image decomposition and edge detection based on wavelet transform and partial differential equation

ZHANG Lina<sup>1,2</sup>, LI Xiaolin<sup>2\*</sup>

(1. College of Mathematics and Information Science, Xianyang Normal University, Xianyang Shaanxi 712000, China;

2. Institute of Graphics and Image Processing, Xianyang Normal University, Xianyang Shaanxi 712000, China)

**Abstract:** In the decomposition of natural image containing texture, the edge information of structure image is easy to be regarded as the texture, which results in blurred edge of the structural image and inaccurate detected edge. An image decomposition and edge detection method was proposed based on wavelet transform of Partial Differential Equation (PDE). At first, wavelet transform threshold was used to extract texture information. Then the improved PDE image decomposition model was used to further decompose the image and extract the edge. The numerical experimental results show that this method improves the quality of image decomposition, makes the texture extraction through and the structure image piecewise smooth, and better protects the edge of the structure.

**Key words:** wavelet transform; Partial Differential Equation (PDE); image decomposition; edge detection; structure; texture

## 0 引言

结构图像和纹理图像是两种不同特征的图像,结构图像由分片光滑的区域及清晰的边缘组成,而纹理图像是不平滑的且有一定的空域周期性的图像。在一些图像处理中,如图像压缩<sup>[1]</sup>、目标检测<sup>[2]</sup>、图像重构<sup>[3]</sup>等,对纹理和结构常常采用不同的处理方法。而一幅自然图像往往是结构图像和纹理图像的混合,因此,将一幅图像的结构部分和纹理部分分开,能为后续的图像处理工作提供很大的便利。

Vese等<sup>[4]</sup>提出了基于偏微分方程(Partial Differential Equation, PDE)的卡通—纹理分解模型,能有效地将图像中的结构部分和纹理部分分开,但对于较复杂的图像,分解的结构图像边缘不清晰,边缘被当作纹理分解到纹理图像中,图像分解的效果不是很理想。于是,许多研究人员提出了改进方法,如:基于形态学成分分析的方法<sup>[5]</sup>,基于小波空间的图像分解变分模型<sup>[6]</sup>,基于 $H^{-1}$ 范数<sup>[7]</sup>、BMO范数<sup>[8-9]</sup>的方法,保护边缘的图像分解方法<sup>[10-11]</sup>,以及彩色图像的分解方法<sup>[12]</sup>等。文献[13]提出的耦合卡通—纹理分解及边缘检测模型,能使图像分解与边缘检测同时进行,在一定程度上保护了结构图像的边缘信息。本文在耦合卡通—纹理分解及边缘检测模型

的基础上,提出了基于小波分解的偏微分方程图像分解及边缘检测模型,首先利用小波变换阈值提取部分纹理信息,再利用改进的偏微分方程图像分解模型进一步分解,从而将一幅原图分解为结构图像和纹理图像,同时检测出结构图像的边缘信息。

## 1 耦合卡通—纹理分解及边缘检测的模型

设一幅含纹理的自然图像 $f$ , Vese等<sup>[4]</sup>提出的基于PDE的分解模型如下:

$$\inf_{u, g_1, g_2} \left\{ G_p(u, g_1, g_2) = \int |\nabla u| + \lambda \int |f - u - \partial_x g_1 - \partial_y g_2|^2 dx dy + \mu \left[ \int (\sqrt{g_1^2 + g_2^2})^p dx dy \right]^{\frac{1}{p}} \right\} \quad (1)$$

其中: $v = \text{div } \mathbf{g}, \mathbf{g} = (g_1, g_2)$ ;参数 $\lambda, \mu > 0; p \rightarrow \infty$ ;  $f$ 与 $u, v$ 的关系为 $f = u + v + w, u$ 为结构(分片光滑)图像, $v$ 为纹理图像, $w$ 则是被磨掉的噪声或部分图像信息。

在Vese等的分解模型的基础上,文献[13]提出了耦合卡通—纹理分解及边缘检测的模型:

收稿日期:2013-02-16;修回日期:2013-03-25。

基金项目:陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2011JF011);陕西省教育厅专项基金资助项目(2013JK0602)。

作者简介:张力娜(1978-),女,云南个旧人,讲师,硕士,主要研究方向:图像处理、小波分析; 李小林(1976-),男,内蒙古巴彦淖尔人,副教授,硕士,主要研究方向:图像处理、服务计算。

$$G_\varepsilon(u, g_1, g_2, b) = \int \left( b^2 |\nabla u|^2 + \frac{(b-1)^2}{\varepsilon} \right) + \alpha \int \eta(|\nabla b|) + \lambda \int |f - u - \partial_x g_1 - \partial_y g_2|^2 dx dy + \mu \int \sqrt{g_1^2 + g_2^2} dx dy \quad (2)$$

其中参数  $\alpha, \lambda, \mu, \varepsilon > 0$ 。模型中引入了一个新的能量泛函  $b$ ，它与原来的能量泛函有相同的极小化子。 $b$  为结构图像  $u$  的边缘指示函数，它标记结构图像中边缘的位置。模型中第一项  $u$  的正则项，对  $u$  的扩散就是在  $b$  的指引下进行的，在边缘的附近  $b \rightarrow 0$ ，扩散就减弱；在结构区域内部光滑的地方  $b \rightarrow 1$ ，扩散就增大。因此，模型(2)能使得图像分解与边缘检测同时进行，并在一定程度上保护了结构图像的边缘信息。

模型(2)由变分法基本原理可得 Euler-Lagrange 方程：

$$\begin{cases} u = f - \partial_x g_1 - \partial_y g_2 + \frac{1}{2\lambda} \operatorname{div}(b^2 \nabla u) \\ \mu \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = 2\lambda \left[ \frac{\partial}{\partial x}(u - f) + \partial_{xx}^2 g_1 + \partial_{xy}^2 g_2 \right] \\ \mu \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = 2\lambda \left[ \frac{\partial}{\partial y}(u - f) + \partial_{xy}^2 g_1 + \partial_{yy}^2 g_2 \right] \\ b = \frac{1 + \gamma \operatorname{div} \left[ \frac{\eta'(|\nabla b|)}{2|\nabla b|} \nabla b \right]}{\varepsilon |\nabla u|^2 + 1} \end{cases} \quad (3)$$

其中参数  $\gamma = \frac{1}{2} \alpha \varepsilon$ 。

## 2 改进的图像分解及边缘检测方法

模型(2)的方法虽然在一定程度上减少了纹理图像中包含的结构边缘，保护了结构图像的边缘信息，但是对于一些梯度模较大的纹理，有可能被识别为结构边缘保留在了结构图像中，若要提取出来，一些梯度模较小的边缘信息又会被识别为纹理，分解到纹理图像中。因此，本文借助小波分解来提高纹理信息的提取率，并改进小波系数阈值及偏微分分解模型来保护结构边缘不被提取出来，从而提高图像分解的质量。本文提出的图像分解算法流程如图 1 所示。

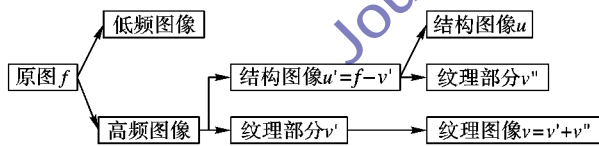


图 1 本文图像分解算法流程

### 2.1 基于小波变换阈值的纹理提取

小波变换是一种多分辨率信号分析方法，在时域和频域都具有表征信号局部特征的能力。利用小波变换可将图像分解为不同尺度和方向的分量，便于对不同信息做不同的处理，因此小波变换在纹理分析方面十分有用。本文将含纹理的原图像  $f$  经过一层小波分解，分解成一个低频分量图  $LL$  和 3 个高频分量图  $HL, LH, HH$ ，高频分量图分别表示竖直方向、水平方向和对角方向。分解后的低频分量图主要是图像的平滑部分和部分的边缘与纹理信息，而高频部分则集中了大部分的边缘与纹理信息。由于希望图像分解后得到的结构图像是片光滑且边缘清晰的图像，而纹理图像仅含纹理不含结构的边缘，因此，本文对小波分解的高频图像通过阈值来提取其中的纹理信息。

原图像  $f$  经过一层小波分解后得到的小波系数记为  $d_{1,i}$ ，其中分量图  $HL$  的小波系数为  $d_{1,1}$ ， $LH$  的小波系数为  $d_{1,2}$ ， $HH$

的小波系数为  $d_{1,3}$ 。

首先，将低频分量图  $LL$  重构得到含纹理较少的低频图像  $u_{LL}$ ，对  $u_{LL}$  利用模型<sup>[14]</sup>

$$G(u_{LL}, b') = \int \left( b'^2 |\nabla u_{LL}|^2 + \frac{(b'-1)^2}{\varepsilon} \right) + \alpha \int \eta(|\nabla b'|) + \lambda \int |f - u_{LL}|^2 dx dy \quad (4)$$

来检测结构图像的边缘信息，得到边缘指示函数  $b'$ ，当  $b' \rightarrow 0$  时为边缘，当  $b' \rightarrow 1$  时为非边缘区域，因为模型中增加了  $b'$  的正则项，所以能在一定程度上避免将纹理信息检测为结构边缘信息。

然后，根据边缘指示函数来确定高频分量图中结构边缘的位置，构造阈值函数。为确保提取的纹理中不含边缘信息，根据函数来确定边缘的位置，作如下变换，适当选取参数  $l, t > 0$ ，其中  $t \rightarrow 0$ ，令

$$\bar{b} = \begin{cases} t, & b' < l \\ 1, & b' \geq l \end{cases} \quad (5)$$

则当  $\bar{b} = t$  时，视为边缘区域；当  $\bar{b} = 1$  时，视为非边缘区域。构造阈值函数，记  $w_{1,l} = |d_{1,l}| * \bar{b}$  ( $l = 1, 2, 3$ )，为各高频分量小波系数的状态，此时在边缘及光滑的区域  $w_{1,l}$  的值较小且趋向于 0，在纹理区域  $w_{1,l}$  的值则相对较大，选取适当的阈值  $s$ ，于是得到估计的小波系数为

$$\hat{d}_{1,l} = \begin{cases} 0, & w_{1,l} < s \\ d_{1,l}, & w_{1,l} \geq s \end{cases} \quad (6)$$

其中  $l = 1, 2, 3$ 。

最后，将各高频分量估计的小波系数重构，则得到提取的纹理部分  $v'$ ，令  $u' = f - v'$  为结构图像。

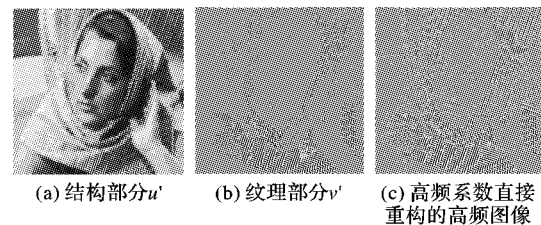


图 2 小波变换阈值分解结果示意图

### 2.2 改进的偏微分方程图像分解算法

经过一次小波变换阈值，原图像分解成了纹理部分  $v'$  和结构部分  $u'$ ，纹理部分  $v'$  中只有很少的边缘信息，而结构部分  $u'$  中保留了绝大部分的边缘信息。但是从实验结果也可以看到结构部分  $u'$  中还含有很多的纹理信息，结构区域内部不够光滑，就说明  $u'$  中纹理信息没有被完全提取出来，考虑到模型(2)的方法能够使边缘检测与图像分解同时进行，并且较好地保护边缘信息，于是本文对  $u'$  用改进的模型(2)的方法作进一步的分解。

模型(2)中第三项图像  $u$  的保真项的系数  $\lambda$  影响着  $u$  的扩散强弱，当  $\lambda$  取值较小时，扩散就强；当  $\lambda$  取值较大时，扩散就弱。为了保持区域内部较好的光滑性就需要较强的扩散；反之，要保持边缘就需要较弱的扩散。 $\mu$  为第四项参数，影响着纹理提取的程度，当  $\mu$  取值越小时，提取的纹理细节越多；而当  $\mu$  取值越大时，提取的纹理细节越少。于是，本文根据低频图像  $u_{LL}$  检测到的边缘指示函数  $b'$  选取参数  $\lambda, \mu > 0$ ，有

$$\begin{cases} \lambda(b) = \begin{cases} \lambda_1, & b' < s_1 \\ \lambda_2, & b' \geq s_1 \end{cases} \\ \mu(b) = \begin{cases} \mu_1, & b' < s_2 \\ \mu_2, & b' \geq s_2 \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$



当  $b' < s_i$  时, 视为边缘区域, 选取较大的参数值  $\lambda_1$  及  $\mu_1$ ; 而当  $b' \geq s_i$  时, 视为光滑区域, 选取较小的参数值  $\lambda_2$  及  $\mu_2$ , 从而使得在边缘处扩散较弱并且不会被当作纹理提取出来, 在结构区域内部扩散较强达到较好的光滑性, 同时纹理细节能被充分地提取。

### 2.3 本文算法步骤

步骤1 对原图像  $f$  进行小波分解, 得到低频分量图  $LL$  和 高频分量图  $HL, LH, HH$ 。

步骤2 利用重构得到的低频图像  $u_{LL}$  检测边缘指示函数  $b'$ 。

步骤3 对各高频分量  $HL, LH, HH$  进行阈值估计小波系数, 并重构得到纹理部分  $v'$ , 令  $u' = f - v'$  得到结构部分  $u'$ 。

步骤4 用改进的模型(2)将  $u'$  分解为结构图像  $u$  和 纹理部分  $v''$ , 同时检测结构图像的边缘信息  $b$ 。

步骤5 令  $v = v' + v''$ , 则得到最终的分解结果: 纹理图像  $v$ 、结构图像  $u$  及边缘  $b$ 。

## 3 数值实验结果

本文以图3所示的3幅图像为实验图像, 实验中均使用小波函数 db1 对图像进行1层分解。

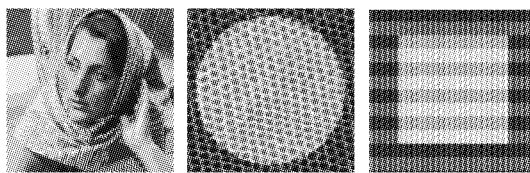


图3 原图

图4为模型(2)方法对图3(a)分解的结果, 其中参数选取为  $\alpha = 0.1, \lambda = 0.12, \mu = 0.6, \varepsilon = 0.005$ ; 图5为本文方法对图3(a)分解的结果, 式(2)及式(7)中参数选取为  $\alpha = 0.08, \lambda_1 = 0.15, \lambda_2 = 0.7, \mu_1 = 0.6, \mu_2 = 0.95, \varepsilon = 0.005$ 。比较图4与图5可以看出, 图4中结构图像  $u$  的人物的五官较模糊, 特别是眼睛部分; 而图5中结构图像  $u$  的人物的五官清晰, 结构边缘也比较清楚, 区域内部较光滑。从图4中纹理图像  $v$  可以看到不但提取了纹理信息, 还提出了较多的结构边缘信息, 有较明显的人物的五官信息, 相应的提取的结构边缘也不够准确, 边缘图像  $b$  中, 有较多的灰色的奇异信息, 而眼睛部位的边缘又比较淡; 图5中纹理图像  $v$  包含的边缘信息较少, 大部分边缘信息保留在了结构图像  $u$  中, 因此提取的结构边缘  $b$  较准确, 奇异信息较少, 眼睛部位的边缘也比较清晰。

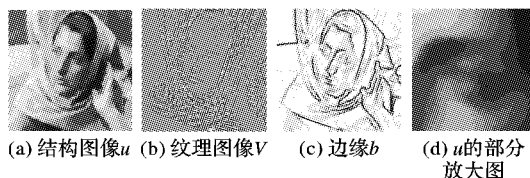


图4 模型(2)方法对图3(a)分解的结果

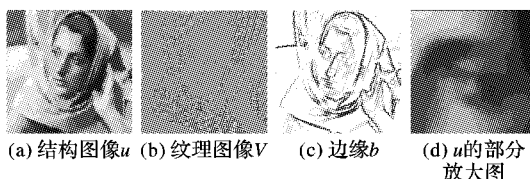


图5 本文方法对图3(a)分解的结果

图6为模型(2)方法对图3(b)分解的结果, 其中参数选取为  $\alpha = 0.01, \lambda = 0.09, \mu = 0.5, \varepsilon = 0.003$ ; 图7为本文方法对图3(b)分解的结果, 式(2)及式(7)中参数选取为  $\alpha =$

$0.01, \lambda_1 = 0.03, \lambda_2 = 0.9, \mu_1 = 0.03, \mu_2 = 0.95, \varepsilon = 0.0035$ 。比较图6与图7可以看出, 图7中本文方法分解的结构图像  $u$  的区域内部更光滑, 边缘清晰, 提取的结构边缘  $b$  较准确; 而图6中的结构图像  $u$  的区域内部还有较明显的纹理痕迹, 边缘也较模糊, 实验中若要再提高区域内的光滑性, 则边缘会更模糊, 提取的结构边缘  $b$  也会更模糊。

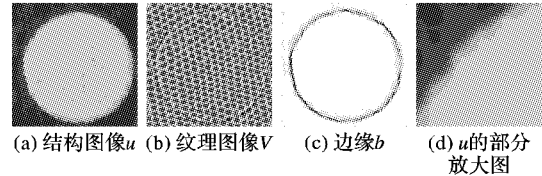


图6 模型(2)方法对图3(b)分解的结果

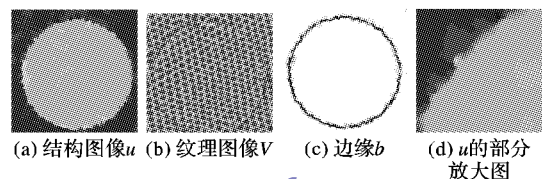


图7 本文方法对图3(b)分解的结果

图8为模型(2)方法对图3(c)分解的结果, 其中参数选取为  $\alpha = 0.01, \lambda = 0.01, \mu = 0.1, \varepsilon = 0.01$ ; 图9为本文方法对图3(c)分解的结果, 式(2)及式(7)中参数选取为  $\alpha = 0.01, \lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = 0.1, \mu_1 = 0.06, \mu_2 = 0.1, \varepsilon = 0.018$ 。比较图8与图9可以看出, 图9中本文方法分解的结构图像  $u$  有光滑的区域内部, 边缘更清晰。

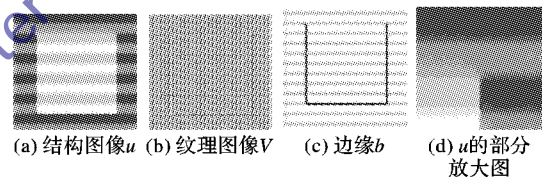


图8 模型(2)方法对图3(c)分解的结果

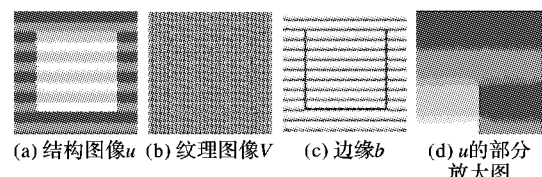


图9 本文方法对图3(c)分解的结果

## 4 结语

本文在耦合卡通—纹理分解及边缘检测模型的基础上, 提出了基于小波变换的偏微分方程图像分解及边缘检测模型, 新方法即保证了结构图像  $u$  较好的分片光滑性, 又较好地保护了结构区域的边缘, 在提取纹理信息时尽量避免提取边缘信息, 使得图像的分解更加彻底, 检测的边缘更加准确。

### 参考文献:

- [1] 张军, 黄英君, 代科学, 等. 图像分解和区域保护在 SAR 图像压缩中的应用[J]. 中国图象图形学报, 2009, 14(1): 4-7.
- [2] 王卫卫, 席灯炎, 杨臻鹏, 等. 利用结构纹理分解的海洋舰船目标检测[J]. 西安电子科技大学学报, 2012, 39(4): 132-137.
- [3] 甄小仙, 刘哲, 马聪. 结合级联字典和双层稀疏分解的图像重构[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(23): 154-156.
- [4] VESE L A, OSHER S J. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing[J]. Journal of Scientific Computing, 2003, 19(1/2/3): 553-572.

(下转第2340页)

为进一步验证此学习核函数算法的性能,从好样品集中选择一个样本  $x$ , 然后人为添加部分缺陷得到带缺陷图像  $I$ , 最后用采用上面学习到的核函数对图像  $I$  进行降噪得到复原图像  $z$ . 同时,人工选择带宽部分带宽进行实验得到相应的复原图像,然后将原图像与复原图像进行误差比较,比较数据见表 2。

表 1 不同核参数下的复原误差

带宽	误差	带宽	误差
5000	1130	20000	659
10000	679	25000	683
14755	641		

表 1 中的误差是利用公式  $\|x - z\|_2$  得到的,从表中的变化趋势来看,通过选择算法是比较有效的。这与选择核函数及参数的目标函数是一致的。

#### 4 结语

通过数值实验发现,将标准化内积矩阵作为目标来学习核函数的方法符合检测目的,可以较准确地计算出样本上的缺陷,同时也为非监督问题核函数及参数的选择确立了一个学习标准。结合最优解分布的理论分析得到的迭代算法是切实可行的,算法收敛速度比较快。学习到的核函数基本可以达到统计意义上的图像复原误差最小化。本文是利用学习组合系数来得到线性组合核函数的,下一步的研究内容是学习非线性组合核函数。

#### 参考文献:

- [1] BARTLETT P, SHAW-TAYLOR J. Generalization performance of support vector machines and other pattern classifiers [M]// Advances in Kernel Methods — Support Vector Learning. Cambridge: MIT Press, 1999: 43–54.
- [2] LANCKRIET G R G, CRISTIANINI N, BARTLETT P, et al. Learning the kernel matrix with semi-definite programming [J]. Journal of Machine Learning Research, 2004, 5(1): 27–72.
- [3] MICCHELLI C A, PONTIL M. On learning vector-valued functions [J]. Neural Computation, 2005, 17(1): 177–204.
- [4] CORTES C, MOHRI M, ROSTAMIZADEH A.  $L_2$  regularization for learning kernels [C]// UAI '09: Proceedings of the Twenty-Fifth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence. Arlington, Vir-

ginia: AUAI Press, 2009: 109–116.

- [5] CORTES C, MOHRI M, ROSTAMIZADEH A. Learning non-linear combinations of kernels [C]// NIPS 2009: Proceedings of the Twenty-Third Annual Conference on Neural Information Processing Systems. [S. l.]: NIPS Foundation, 2009: 396–404.
- [6] ARGYRIOU A, MICCHELLI C A, PONTIL M. Learning convex combinations of continuously parameterized basic kernels [C]// COLT 2005: Proceedings of the 18th Annual Conference on Learning Theory, LNCS 3559. Berlin: Springer, 2005: 338–352.
- [7] ONG C S, SMOLA A J, WILLIAMSON R C. Learning the kernel with hyperkernels [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2005, 6: 1043–1071.
- [8] SONNENBURG S, RÄTSCHE G, SCHÄFER C, et al. Large scale multiple kernel learning [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2006, 7: 1531–1565.
- [9] ZIEN A, ONG C S. Multiclass multiple kernel learning [C]// ICML 2007: Proceedings of the 24th Annual International Conference on Machine Learning. New York: ACM, 2007: 1191–1198.
- [10] RAKOTOMAMONJY A, BACH F R, CANU S, et al. SimpleMKL [J]. The Journal of Machine Learning Research, 2008, 9: 2491–2521.
- [11] SHAO J-D, RONG G, LEE J M. Learning a data-dependent kernel function for KPCA-based nonlinear process monitoring [J]. Chemical Engineering Research and Design, 2009, 87(11): 1471–1480.
- [12] CORTES C, MOHRI M, ROSTAMIZADEH A. Two-stage learning kernel algorithms [C]// ICML 2010: Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning. Haifa, Israel: Omni Press, 2010: 239–246.
- [13] KLOFT M, BREFELD U, SONNENBURG S, et al.  $L_p$ -norm multiple kernel learning [J]. Journal of Machine Learning Research, 2011, 12: 953–997.
- [14] MIKA S, SCHÖLKOPF B, SMOLA A, et al. Kernel PCA and denoising in feature spaces [C]// Proceedings of The 1998 Conference on Advances in Neural Information Processing Systems II. Cambridge: MIT Press, 1999: 536–542.
- [15] TAN Z Y, FENG Y, XU K J, et al. Calculating the pre-image using the kernel methods [J]. Advances in Information Sciences and Service Sciences, 2012, 4(22): 612–618.

(上接第 2336 页)

- [5] STARCK J L, ELAD M, DONOHO D L. Image decomposition via the combination of sparse representations and variational approach [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, 14(10): 1570–1582.
- [6] 李敏, 冯象初. 基于小波空间的图像分解变分模型 [J]. 电子学报, 2008, 36(1): 184–187.
- [7] OSHER S J, SOLE A, VESE L A. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^{-1}$  norm [J]. Multiscale Modeling and Simulation: A SIAM Interdisciplinary Journal, 2003, 1(3): 349–370.
- [8] LE T M, VESE L A. Image decomposition using total variation and  $\text{div}(BMO)^*$  [J]. Multiscale Modeling and Simulation, 2005, 4(2): 390–423.
- [9] GARNETT J B, LE T M, MEYER Y, VESE L A. Image decomposition using total variation and homogeneous besov spaces [J]. Ap-

plied and Computational Harmonic Analysis, 2007, 23(1): 25–56.

- [10] 殷海青, 江玲玲, 刘红卫. 联合纹理提取和边缘检测的新方法 [J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(4): 847–850.
- [11] 魏伟波, 潘振宽, 赵增芳. 彩色纹理图像分解的 VO 模型及其 Split Bregman 方法 [J]. 仪器仪表学报, 2012, 33(10): 2279–2285.
- [12] XU C, LI M, SUN X L. An edge-preserving variational method for image decomposition [J]. Chinese Journal of Electronics, 2013, 22(1): 109–113.
- [13] 张力娜, 冯象初, 刘晨华. 一种耦合卡通—纹理分解及边缘检测的方法 [J]. 激光与红外, 2009, 39(5): 542–545.
- [14] AMBROSIO L, TORTORELLI V. Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence [J]. Communication on Pure and Applied Mathematics, 1990, 43(8): 999–1036.