

# PTT 黏弹性流体的光滑粒子动力学方法模拟<sup>1)</sup>

杨 波 欧阳洁<sup>2)</sup> 蒋 涛 许晓阳

(西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

**摘要** 运用光滑粒子流体动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 方法对基于 Phan-Thien-Tanner (PTT) 模型的黏弹性流动进行了数值模拟. 首先, 利用 SPH 方法模拟了基于 PTT 模型的平板 Poiseuille 流, 通过与文献结果的比较, 验证了 SPH 方法模拟黏弹性流动的准确性和有效性; 随后, 基于 PTT 模型对黏弹性自由表面流-液滴碰撞问题进行了 SPH 模拟, 研究了 PTT 模型中拉伸参数对碰撞过程的影响. 为了解决张力不稳定问题, 采用简化的人工应力公式. 数值结果表明, SPH 方法可有效而灵活地模拟黏弹自由表面流问题.

**关键词** SPH, 黏弹性, PTT, 自由表面, 液滴碰撞, 张力不稳定性

**中图分类号:** O373 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2011)04-0667-07

## 引 言

黏弹性流体在自然界和生产生活中普遍存在, 准确预测黏弹性流体的流变行为有着不可估量的工程应用价值. 由于黏弹性流体具有复杂的流变特性, 实验模拟和解析求解都较困难. 随着计算机和计算流体力学的发展, 数值模拟已经成为研究黏弹性流体流变特性的强有力工具.

工业加工过程往往包含了复杂的自由表面, 如挤出、注塑等成型过程. 基于网格的数值方法在处理自由表面流动问题时常会遇到很多困难, 因此通常采用一些辅助的界面捕捉方法, 如 MAC<sup>[1]</sup>(marker and cell), VOF<sup>[2]</sup>(volume of fluid) 和 Level-Set<sup>[3]</sup> 方法等.

近年来, 无网格方法在计算流体力学领域迅速崛起, 光滑粒子流体动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 方法是其中一种基于粒子的纯 Lagrangian 无网格法, 最早由 Lucy<sup>[4]</sup> 和 Gingold 等<sup>[5]</sup> 于 1977 年提出. 与其他数值方法相比, SPH 方法完全不需要网格, 同时具有粒子特性、Lagrangian 特性和自适应特性等优势, 因此可以很容易地模拟大变形问题, 也可以不加任何特殊技术 (如 MAC 等) 处理自由表面流动问题.

SPH 方法最初被提出是用于天体物理学问题,

现该方法在经典牛顿流体力学等领域均已得到了广泛的应用. 然而, 在非牛顿流体力学数值模拟领域, 目前占据统治地位的仍是基于网格的数值方法, 如有限元、有限差分和有限体积法等, SPH 方法在该领域中的应用起步较晚, 并且相关文献报道的研究成果也较少.

SPH 方法用于黏弹性流体的模拟只见于最近的探索研究. 最初 Ellero 等<sup>[6-7]</sup> 对基于不同本构模型的黏弹性流体的二维管道流和平板流进行了 SPH 模拟, Zhou 等<sup>[8]</sup> 基于 Sisko 模型讨论了平板 Couette 流. 此外, 对于黏弹性自由表面流动问题, Shao 等<sup>[9]</sup> 利用 SPH 方法模拟了 Cross 模型的溃坝坍塌问题, Fang 等<sup>[10]</sup> 也进行了相关的研究.

黏弹流动问题的模拟由于本构方程的引入而大大增加了问题求解的复杂程度. 本文主要针对 Phan-Thien-Tanner(PTT) 本构模型展开研究. PTT 本构模型由 Phan-Thien 和 Tanner<sup>[11]</sup> 利用网络理论推导得到, 它属于唯象型本构方程. 与其他简单模型 (如 UCM, Oldroyd-B 等) 相比, 非线性 PTT 本构模型更适合描述聚合物熔体和浓缩溶液的流变特性, 在挤出涨大等领域的数值模拟结果表明, PTT 本构模型得到的结果与实验数据比较吻合<sup>[12-13]</sup>.

根据文献调研结果, 目前尚无运用 SPH 方法对基于 PTT 本构模型的黏弹性流体进行研究的相关

2010-04-01 收到第 1 稿, 2010-12-06 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (10871159) 和国家重点基础研究发展计划 (2005CB321704) 资助项目.

2) E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn

报道. 本文运用 SPH 方法分别模拟了基于 PTT 本构模型的平板 Poiseuille 流和液滴碰撞问题, 并讨论了本构模型中流变参数对流动过程的影响.

## 1 控制方程

在 Lagrangian 坐标系下, 等温黏弹性流体的控制方程为

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} \quad (2)$$

式中,  $\rho$  表示流体的密度,  $\mathbf{v} = (u, v)$  表示速度,  $\boldsymbol{\sigma}$  表示 Cauchy 应力张量,  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  表示外力加速度,  $D/Dt$  表示物质导数,  $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ .

式 (2) 中 Cauchy 应力张量可以分解为各项同性压力  $p$  和偏应力张量  $\mathbf{T}$ , 即

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \mathbf{T} \quad (3)$$

### 1.1 状态方程

本文采用的状态方程为

$$p(\rho) = c^2\rho/\rho_0 \quad (4)$$

式中,  $c$  是声速,  $\rho_0$  是参考密度. 密度的变化正比于 Mach 数的平方  $M^2$  ( $M^2 \equiv V^2/c^2$ ,  $V$  是流体的特征速度). 为了使得人工压缩流体行为与真实不可压缩流体的行为接近, 本文控制密度变化在 1% 之内.

### 1.2 本构模型

为封闭方程 (1) 和 (2), 需结合状态方程 (4) 和关于  $\mathbf{T}$  的本构方程. 偏应力张量  $\mathbf{T}$  通常可以分解为牛顿溶剂贡献和聚合物贡献

$$\mathbf{T} = \eta_s \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\tau} \quad (5)$$

其中,  $\eta_s$  是溶剂黏度,  $\dot{\boldsymbol{\gamma}} = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T$  是应变率张量,  $\boldsymbol{\tau}$  表示弹性偏应力张量. 对于 PTT 本构模型, 有

$$f(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \eta_p \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (6)$$

式中,  $\lambda_1$  是流体的松弛时间,  $\eta_p$  是聚合物黏度,  $\eta = \eta_s + \eta_p$  表示总黏度,  $\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}}$  是上随体导数, 定义为

$$\begin{aligned} \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} &= \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\tau} = \\ &= \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla\mathbf{v} - (\nabla\mathbf{v})^T \cdot \boldsymbol{\tau} \end{aligned} \quad (7)$$

式 (6) 中,  $f(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))$  表示应力的函数, 它可以采用线性形式<sup>[11]</sup>

$$f(\text{tr}(\boldsymbol{\tau})) = 1 + \frac{\varepsilon\lambda_1}{\eta_p}\text{tr}(\boldsymbol{\tau}) \quad (8)$$

其中,  $\varepsilon$  是 PTT 模型的拉伸参数.

## 2 SPH 离散

SPH 方法是一种基于插值理论的 Lagrangian 纯粒子方法. 在该方法中, 流体用有限个粒子来表示, 每个粒子即是一个插值点, 具有一定的质量、速度及其他与流体相关的物理性质, 粒子随着流体一起运动.

### 2.1 控制方程的离散

在 SPH 方法中, 对 Navier-Stokes 方程有多种不同的表示形式<sup>[14]</sup>. 本文对质量和动量守恒方程采用的 SPH 离散形式为

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j v_{ij}^\beta \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (9)$$

$$\frac{Dv_i^\alpha}{Dt} = \sum_{j=1}^N m_j \left( \frac{\sigma_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + F^\alpha \quad (10)$$

其中,  $\alpha$  和  $\beta$  表示空间坐标,  $m_j$  和  $\rho_j$  分别表示第  $j$  个粒子的质量和密度,  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  表示流体域内总粒子的数目.  $W_{ij} = W(x_i - x_j, h)$  为核函数,  $h$  为光滑长度, 本文的数值模拟均采用五次样条核函数.

联合方程 (6) 和 (7), 可得 PTT 本构方程 SPH 的离散形式为

$$\frac{D\boldsymbol{\tau}_i^{\alpha\beta}}{Dt} = k_i^{\alpha\gamma} \tau_i^{\gamma\beta} + k_i^{\beta\gamma} \tau_i^{\alpha\gamma} + \frac{\eta_p}{\lambda_1} d_i^{\alpha\beta} - f(\text{tr}(\boldsymbol{\tau}))\tau_i^{\alpha\beta} \quad (11)$$

其中,  $d_i^{\alpha\beta} = (k_i^{\alpha\beta} + k_i^{\beta\alpha})$ ,  $k_i^{\alpha\beta} = (\partial v^\alpha / \partial x^\beta)_i$ .

$$k_i^{\alpha\beta} = \left( \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \right)_i = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} (v_j^\alpha - v_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} \quad (12)$$

### 2.2 人工应力

当用 SPH 方法模拟固体变形问题时, 会产生张力不稳定性<sup>[15]</sup>. 在自由表面流问题中, 也会产生这样的问题. 目前, 对于该问题已有了很多解决方法, 其中最成功的是采用由 Monaghan<sup>[16]</sup> 和 Gray 等<sup>[17]</sup> 提出的人工应力法, 其基本思想<sup>[15]</sup> 是对相互作用的两个粒子施加一个小排斥或吸引力, 防止它们靠得过近或离得太远. 同样, 本文为较好模拟液滴碰

撞问题引入文献 [18] 中的一种简化的人工应力项, 其具体实施方式和相关参数选择可见文献 [18].

### 3 边界处理

#### 3.1 固壁边界

为了保证固壁边界满足不可穿透和无滑移条件, 本文采用一种新的镜像粒子方法.

首先, 在固壁边界上布置一些固壁虚粒子. 与 Monaghan<sup>[19]</sup> 方法不同的是: 这些固壁粒子不再对它附近的内部粒子施加排斥力来防止穿透. 固壁虚粒子参与控制方程中速度、压力和应力梯度的计算. 在计算过程中, 固壁虚粒子的密度保持不变, 速度和固壁速度相同, 但是位置保持不变. 固壁虚粒子的压力和弹性偏应力的计算公式如下

$$A_i = \frac{\sum_j (m_j / \rho_j) A_j W_{ij}}{\sum_j (m_j / \rho_j) W_{ij}} \quad (13)$$

式中,  $A$  表示压力或弹性偏应力,  $i$  表示固壁虚粒子,  $j$  表示与粒子  $i$  相邻的内部实粒子, 公式中的求和仅针对内部实粒子. 垂直于固壁的弹性应力的法向分量设为 0.

其次, 为弥补边界处 SPH 方法精度较低的缺陷, 在边界外侧布置一些镜像虚粒子, 对到边界的距离小于  $kh$  的实粒子  $i$ , 在边界外与其对称处分布一个虚粒子, 该虚粒子的密度、压力和内部实粒子相同, 速度计算公式为  $\mathbf{v}_m = 2\mathbf{v}_o - \mathbf{v}_i$ , 其中  $\mathbf{v}_m$  为镜像虚粒子的速度,  $\mathbf{v}_o$  为固壁速度,  $\mathbf{v}_i$  为内部实粒子的速度. 试验证明, 采取上述处理方法, 能够很好地防止粒子穿透.

#### 3.2 周期边界

对于无限长平板 Poiseuille 流, 模拟中周期边界条件处理实施的具体步骤如下: 在每个时间步, 将最靠近出口边界右端的 4 排内部粒子挪到整个自由边界左端, 作为入口边界的镜像粒子, 同时将最靠近入口边界左端的 4 排内部粒子挪到整个自由边界的右端, 作为出口边界的镜像粒子.

此外, 据文献 [10] 知, SPH 方法能自动满足自由表面总应力边界条件  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

### 4 数值算例

鉴于目前还没有基于 PTT 模型运用 SPH 方法模拟黏弹性流动的相关报道, 本文选取了平板

Poiseuille 流和液滴碰撞这两个问题作为数值算例. 无量纲参数  $\beta = \eta_s / \eta$  表示牛顿黏度和总黏度的比; Reynolds 数  $Re = \rho UL / \eta$ ; Weissenberg 数  $We = \lambda_1 U / L$ , 这里  $U$  和  $L$  分别表示特征速度和特征长度.

#### 4.1 平板 Poiseuille 流

为验证 SPH 方法模拟 PTT 模型黏弹流体的有效性, 选用平板 Poiseuille 流作为验证模型, 其几何区域和边界条件如图 1 所示. 当  $t = 0$  时, PTT 流体位于两块固定并水平放置于  $y = 0$  和  $y = L (L = 1)$  处的无穷大平板之间; 当  $t > 0$  时, 由于受到沿着  $x$  轴方向的水平外力  $F$  的作用, 流体开始运动.

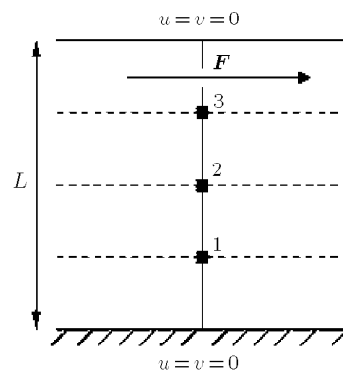


图 1 平板 Poiseuille 流的几何区域

Fig.1 Flow geometry for the planar Poiseuille flow

模拟中, 采用周期边界约束. 取区域  $L_x \times L_y = 0.2 \times 1.0$ , 水平外力  $F = 1$ , 粒子的密度  $\rho = 1$ , 粒子间的初始间距  $r_0 = 0.02$ , 光滑长度  $h = 0.9r_0$ , 支持域半径  $\tilde{h} = 3h$ , 时间步长  $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$ .

图 2 给出了平板 Poiseuille 流关于  $y$  轴的速度分布, 其中  $\beta = 0.1$ ,  $Re = 0.1$ ,  $We = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.25$ . 可以看出速度关于  $y = 0.5$  对称; 且由于弹性作用, 速度有明显的过冲和低冲现象.

目前, 基于 PTT 模型的平板 Poiseuille 流尚没有瞬态解析解, 仅有稳态解<sup>[20-21]</sup>. 但是, 当 PTT 模型方程 (8) 中拉伸参数  $\varepsilon = 0$  时, 流体控制方程中本构方程将退化为 Oldroyd-B 流体本构模型, 而 Oldroyd-B 模型 Poiseuille 流具有瞬态解析解<sup>[7]</sup>. 为了较好体现本文 SPH 方法模拟 PTT 模型 Poiseuille 流的准确性和可靠性, 这里将 SPH 方法基于 Oldroyd-B 模型模拟 Poiseuille 流得到的  $u$  数值解与其解析解<sup>[7]</sup> 进行了比较 (见图 3, 其参数见文献 [7]), 表明了 SPH 方法模拟 PTT 流体的有效性.

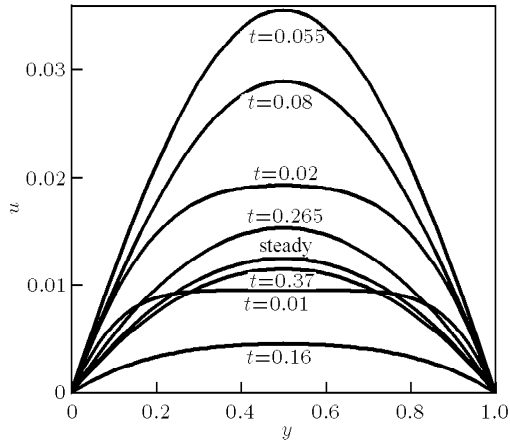


图 2 不同时刻关于  $y$  的速度分布图  
Fig.2 Velocity profile with respect to location  $y$  at different times

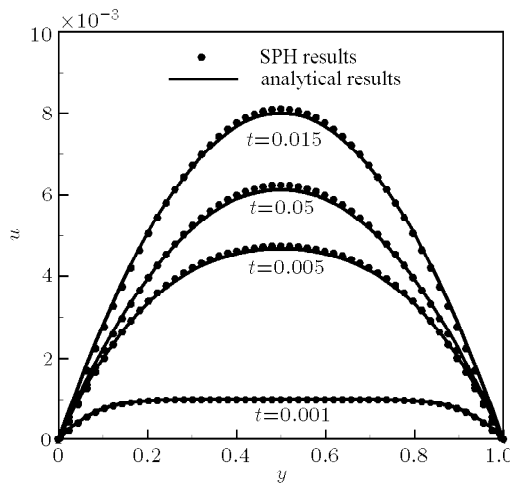


图 3 Oldroyd-B 流体不同时刻  $u$  速度分布图  
Fig.3 Velocity profile  $u$  for the Oldroyd-B with at different times

下面讨论 PTT 本构模型中流变参数对流动过程的影响.

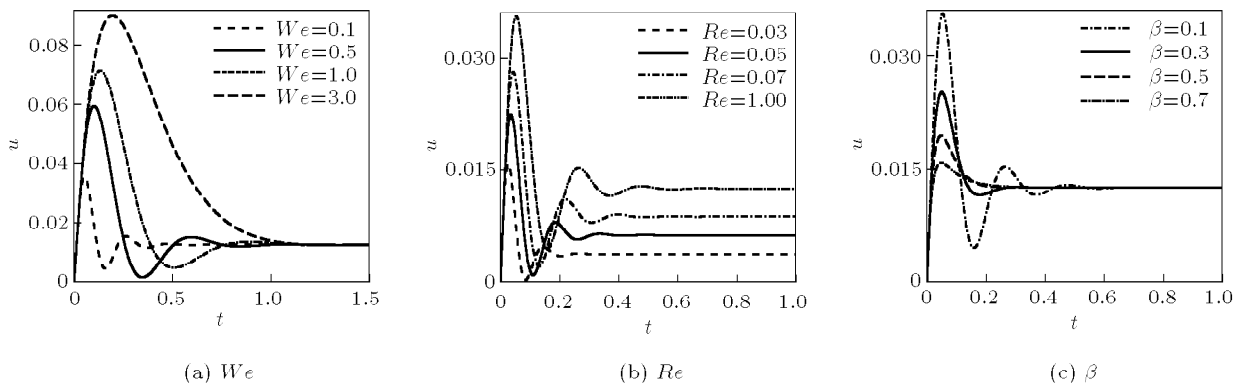


图 4 不同流变参数下空间点 2 处速度随时间的变化情况  
Fig.4 Time evolution of the velocity at point 2 for different rheological parameters

### 4.1.1 $We$ 的影响

$We$  对速度  $u$  和弹性剪切应力  $\tau_{xy}$  的影响如图 4(a) 和图 5(a) 所示. 由图 4(a) 可见, 当  $We$  增大时, 速度达到的最大值与达到最大值所需时间增加, 且随着  $We$  的增大, 速度达到稳态所需时间越长; 由图 5 (a) 可见, 当  $We$  增大时, 空间点 1 和 2 处的  $|\tau_{xy}|$  第 1 次达到的最大值减小, 而达到最大值所需时间增加, 达到稳态所需时间增加, 但中心点 2 上的弹性偏应力始终为零. 这说明, 随着  $We$  的增大, 弹性作用增强.

### 4.1.2 $Re$ 的影响

$Re$  也是聚物流体中非常重要的一个参数, 在黏弹流体的数值模拟中, 一般考虑低雷诺数流动.  $Re$  对  $u, \tau_{xy}$  的影响如图 4(b) 和图 5(b) 所示. 由图 4(b) 可见,  $Re$  对速度的影响比较明显, 当  $Re$  数增大而其他无量纲参数不变时, 速度随时间的变化趋势大致相同, 但流动过程中速度达到的最值随着  $Re$  的增大而相应地增大, 达到最值和达到稳态的时间相对滞后. 由图 5 (b) 可见,  $Re$  对弹性剪切应力的影响较弱, 当  $Re$  较小时, 如  $Re = 0.03$  和  $Re = 0.05$  时, 弹性剪切应力的变化曲线几乎重合, 但由图仍可看出随着  $Re$  的增大, 空间点 1 处的弹性剪切应力达到最值和达到稳态的时间相对滞后, 中心点 2 处的弹性剪切应力始终为 0. 这主要是由于当  $Re$  较小其惯性力的贡献可以忽略不计.

### 4.1.3 $\beta$ 的影响

无量纲参数  $\beta$  表示牛顿黏度和总黏度的比, 在很多文献中  $\beta$  的取值为  $1/9$ , 这里为了研究  $\beta$  对流动过程的影响, 扩大了  $\beta$  的取值范围.  $\beta$  对  $u, \tau_{xy}$

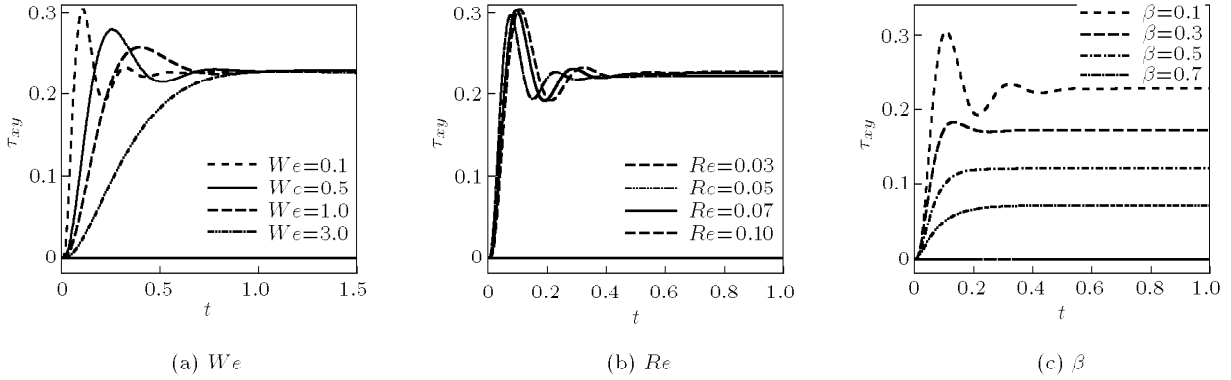


图 5 不同流变参数下空间点 1 和 2 处  $\tau_{xy}$  随时间的变化情况

Fig.5 Time evolution of  $\tau_{xy}$  at points 1 and 2 for different rheological parameters

的影响如图 4(c) 和图 5(c) 所示。由图 4(c) 可见，当  $\beta$  增大时，速度的过冲次数减少，速度曲线比较和缓，达到稳态的时间减短，速度能够达到的最大值减小。由图 5(c) 可见，随着  $\beta$  的增大，空间点 1 和 2 处的  $|\tau_{xy}|$  减小，中心点 2 处的  $\tau_{xy}$  始终为 0；当  $\beta$  较小时，弹性剪切应力的变化趋势非常剧烈，当  $\beta$  较大时变化趋势和缓。这一数值结果表明： $\beta$  较小时，即牛顿黏度远远小于总黏度时，弹性占优，导致黏弹性流动的影响非常剧烈；反之，当  $\beta$  增大时，弹性作用对流动的影响减小。

#### 4.2 液滴碰撞

本文选取的第 2 个算例是基于 PTT 本构模型的液滴碰撞问题，该问题具有复杂的自由表面。

由算例 4.1 可以看出 SPH 方法能够成功模拟有界区域瞬态黏弹性流动问题，但对于黏弹性自由表面流动问题，由于存在张力不稳定性，所以若直接利用原始 SPH 方法进行研究，则容易导致模拟过程发散甚至是完全崩溃。为了解决该问题，这里采用第 2.3 节介绍的简化人工应力。

为了说明 PTT 本构模型对液滴的影响，这里同时模拟了牛顿液滴碰撞问题。数值试验表明，在牛顿模型和 PTT 模型中分别取  $b = 0.2$  和  $b = 0.6$ ，可得到较好的模拟结果。

考虑二维液滴，取液滴碰撞的平板为

$$\{(x, y) : -0.25 \leq x \leq 0.25, y = 0\}$$

液滴的原始直径是  $0.02\text{m}$ ，中心位于  $(0\text{m}, 0.04\text{m})$ 。当  $t = 0$  时，液滴处于无应力状态，初始速度为  $V = -1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ ；当  $t > 0$  时，液滴在重力加速度  $g$  的作用下开始加速下落，直至碰撞平板发生形变。

模拟中，取重力加速度  $g = -9.81\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ ，密度  $\rho = 10^3\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ，黏度  $\eta = 4\text{Pa}\cdot\text{s}$ ，松弛时间  $\lambda_1 = 0.02$ ，

延迟时间  $\lambda_2 = 0.002$ ，则无量纲参数分别为

$$\beta = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0.1, Re = \frac{\rho V D}{\eta} = 5, We = \frac{\lambda_1 V}{D} = 1$$

溶剂黏度  $\eta_s = 0.4\text{Pa}\cdot\text{s}$ ，聚合物黏度  $\eta_p = 3.6\text{Pa}\cdot\text{s}$ 。粒子的初始间距取为  $r_0 = 2 \times 10^{-4}\text{m}$ ，时间步长  $\Delta t = 1 \times 10^{-5}\text{s}$ 。

图 6 给出了牛顿液滴以及  $\varepsilon = 0.01$  时的 PTT 液滴碰撞过程的变化情况。可以看出，在整个模拟

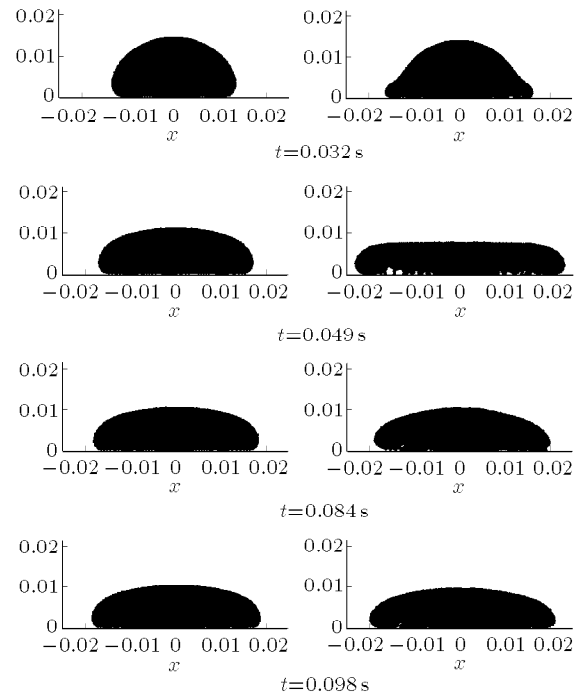


图 6 基于牛顿黏性模型和 PTT 模型对液滴碰撞进行的 SPH 模拟 (左列：牛顿模型；右列：PTT)

Fig.6 SPH simulation of a falling drop for Newtonian and PTT fluid (left column: Newtonian; right column: PTT)

过程中,当液滴碰撞到平板后,牛顿液滴保持其凸面形状均匀伸展变形.然而,PTT液滴的流动过程大致可以分为3个阶段:第1阶段,液滴碰撞平板,然后开始延伸,这个阶段PTT液滴延伸的速度要快于牛顿液滴;第2阶段,液滴延伸达到极值,由于弹性作用,液滴开始收缩;第3阶段,当液滴收缩到最小宽度后,液滴以类似于牛顿液滴的方式重新慢慢延伸.

为讨论拉伸参数 $\varepsilon$ 对流动过程的影响.图7给出了不同 $\varepsilon$ 下,基于PTT本构模型的液滴随时间的变化情况.由图7可见,液滴宽度随时间先增大后减小再一直增大,这说明PTT模型的液滴确实经历了3个阶段;并且随着 $\varepsilon$ 的增大,液滴宽度相应地增大,这主要是因为液滴在延伸过程中有明显的拉伸现象,因此 $\varepsilon$ 的作用也较为明显.

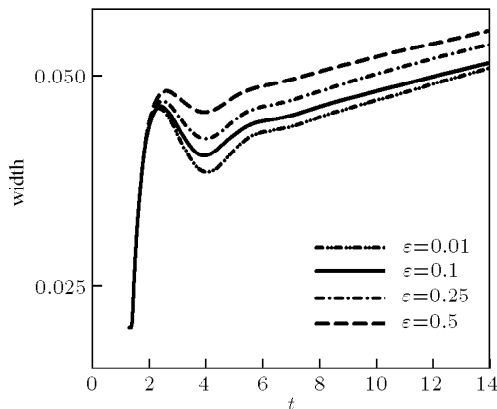


图7 不同 $\varepsilon$ 下, PTT液滴的宽度随时间的变化

Fig.7 Width of the drop of a PTT fluid varying with time for different  $\varepsilon$

## 5 结 论

本文运用SPH方法模拟了基于PTT本构模型的黏弹性流动问题.对平板Poiseuille流和液滴碰撞问题的研究表明:

(1) 平板Poiseuille流的模拟结果与文献结果一致,从而表明了SII方法模拟黏弹性流动的有效性.

(2) 在液滴碰撞问题的模拟中,发现利用SPH方法模拟黏弹性自由表面流动问题时无需任何特殊的处理技术.因此,SPH方法求解黏弹性自由表面流动问题时更具灵活性.

(3) 对液滴碰撞问题,若仅采用原先的SPH方法,张力不稳定性会导致计算结果发散.为了解决

这种不稳定性,本文采用简化的人工应力获得了较好的数值结果.

(4) PTT本构模型中的拉伸参数 $\varepsilon$ 在平板Poiseuille流中的影响不大,但会影响液滴碰撞中的液滴宽度.由于液滴碰撞过程中有明显的拉伸现象,因此 $\varepsilon$ 的作用也较为明显.

## 参 考 文 献

- McKee S, Tomé MF, Ferreira VG, et al. The MAC method. *Computers & Fluids*, 2008, 37 (8): 907-930
- 张健, 方杰, 范波芹. VOF方法理论与应用综述. 水利水电科技进展, 2005, 25 (2): 67-70 (Zhang Jian, Fang Jie, Fan Boqin. Advances in research of VOF method. *Advances in Science and Technology of Water Resources*, 2005, 25(2): 67-70 (in Chinese))
- Zheng Supei, Ouyang Jie, Zhang Lin, et al. Dynamic simulation of fusion process and analysis of flow field. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 2007, 26 (17): 1781-1792
- Lucy LB. Numerical approach to testing the fission hypothesis. *The Astron J*, 1977, 8(12): 1013-1024
- Gingold RA, Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and applications to non-spherical stars. *Mon Not Roy Astrou Soc*, 1977, 18: 375-389
- Ellero M, Kroger M, Hess S. Viscoelastic flows studied by smoothed particle hydrodynamics. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2002, 105 (1): 35-51
- Ellero M, Tanner RI. SPH simulation of transient viscoelastic flows at low Reynolds numbers. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2005 132 (1-3): 61-72
- Zhou Guangzheng, Ge Wei, Li Jinghai. Smoothed particles as a non-newtonian fluid: a case study in couette flow. *Chemical Engineering Science*, 2010, 65 (6): 2258-2262
- Shao S, Edmond YM. Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. *Adv Water Resour*, 2003, 26 (7): 787-800
- Fang J, Owens RG, Tacher L. A numerical study of the SPH method for simulating transient viscoelastic free surface flows. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2006, 139 (1-2): 68-84
- Phan-Thien N, Tanner RT. A new constitutive equation derived from network theory. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 1977, 2 (4): 353-365
- Baaijens FPT, Peters GWM, Baaijens FPT. Viscoelastic flow past a confined cylinder of a polyisobutylene solution. *J Rheol*, 1995, 39 (6): 1243-1277
- Phan-Thien N. A nonlinear network viscoelastic model. *J Rheol*, 1978, 22 (3): 259-283
- Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics. *Annu Rev Astron Astrophys*, 1992, 30: 543-574
- Rafiee A, Manzari MT, Hosseini M. An incompressible SPH method for simulation of unsteady viscoelastic free-surface flows. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2007, 42 (10): 1210-1223

- 16 Monaghan JJ. SPH without a tensile instability. *J Comput Phys*, 2000, 159 (2): 290-311
- 17 Gray JP, Monaghan JJ, Swift RP. SPH elastic dynamics. *Comput Methods Appl Mech Eng*, 2001, 190(49-50): 6641-6662
- 18 Jiang Tao, Ouyang Jie, Yang Binxin. The SPH method for simulating a viscoelastic drop impact and spreading on an inclined plate. *Comput Mech*, 2010, 45 (6): 573-583
- 19 Monaghan JJ. On the problem of penetration in particle methods. *J of Comput Phys*, 1989, 82 (1): 1-15
- 20 Cruz DA, Pinho FT, Oliveira PJ. Analytical solutions for fully developed laminar flow of some viscoelastic liquids with a Newtonian solvent contribution. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2005, 132 (1-3): 28-35
- 21 Paulo GS, Tomé MF, McKee S. A marker-and-cell approach to viscoelastic Free surface flows using the PTT model. *J Non-Newtonian Fluid Mech*, 2007, 147 (3): 149-174

(责任编辑: 刘俊丽)

## NUMERICAL SIMULATION OF THE VISCOELASTIC FLOWS FOR PTT MODEL BY THE SPH METHOD <sup>1)</sup>

Yang Bo Ouyang Jie<sup>2)</sup> Jiang Tao Xu Xiaoyang

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

**Abstract** The smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is applied to simulate the viscoelastic flows governed by the Phan-Thien-Tanner (PTT) constitutive equation. First of all, the validity of the SPH method for viscoelastic flows is verified by comparing the numerical solution of a PTT fluid in the planar Poiseuille flow with those in literatures. And then, a viscoelastic free surface flow is simulated to consider about a drop of a PTT fluid impacting a rigid plate. Furthermore, the effect of the elongational parameter is investigated. The results show the flexibility of the SPH method for viscoelastic free surface problems. In particular, a simplified artificial stress is adopted to resolve the problem of the tensile instability. Numerical results obtained are in good agreement with those simulated by other mesh-based methods.

**Key words** SPH, viscoelastic, PTT, free surface, impacting drop, tensile instability

---

Received 1 April 2010, revised 6 December 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10871159) and the National Basic Research Program of China (2005CB321704).

2) E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn