

复合材料旋转壳自由振动分析的新方法¹⁾

瞿叶高²⁾ 华宏星 谌勇 龙新华 孟光

(上海交通大学机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

摘要 提出了一种半解析区域分解法来分析任意边界条件的复合材料层合旋转壳自由振动. 沿壳体旋转轴线将壳体分解为一些自由的层合壳段, 视位移边界界面为一种特殊的分区界面; 采用分区广义变分和最小二乘加权残值法将壳体所有分区界面上的位移协调方程引入到壳体的能量泛函中, 使层合壳的振动分析问题归结为无约束泛函变分问题. 层合壳段位移变量采用 Fourier 级数和 Chebyshev 多项式展开. 以不同边界条件的层合圆柱壳、圆锥壳及球壳为例, 采用区域分解法分析了其自由振动, 并将计算结果与其他文献值进行了对比. 算例表明, 该方法具有高效率、高精度和收敛性好等优点.

关键词 区域分解, 分区广义变分, 最小二乘加权残值法, 复合材料旋转壳, 自由振动

中图分类号: TH113, TB33 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-12-078

引言

复合材料层合旋转壳振动特性分析一直是很多研究者关注和探讨的问题. 除了特殊铺层的筒壳圆柱壳外, 一般铺层和其他边界条件的层合旋转壳一般没有解析形式的振动解. 在分析旋转壳自由振动时, 通常采用半解析或者纯数值方法, 如 Ritz 法^[1-2]、无网格法^[3]和有限元法^[4]等. Ritz 法适用于计算壳体的低阶振动频率, 若求解壳体较高阶频率, 须增加壳体的位移试函数数量, 通常会导致系统矩阵病态; 另外, Ritz 法要求选择的试函数须满足壳体位移边界条件. 由于壳体边界条件形式较多, 选择合适的壳体容许位移函数是非常困难的. 无网格法是一种新兴的数值方法, 在分析旋转壳的振动时虽具有某些独特的优点, 但在处理壳体边界条件时还存在一些有待完善的环节^[3]. 有限元法虽然可处理一般铺层和一般边界条件的层合旋转壳振动问题, 但缺点是对应的系统方程维数通常较高且计算量大. Leissa^[5]和 Qatu 等^[6]对各类旋转壳的自由振动分析方法进行了详尽的总结和比较.

本文提出了一种区域分解法来分析任意边界条件的复合材料层合旋转壳自由振动. 以不同边界条件的复合材料层合圆柱壳、圆锥壳及球壳为例, 采用区域分解法分析了其自由振动; 通过与其他文献结果进行对比, 验证了本文方法的稳定性、收敛性和计算

精度.

1 复合材料层合壳区域分解力学模型

1.1 复合材料层合壳的能量泛函

在复合材料层合壳中面上建立曲线坐标 $\xi_1\xi_2\xi_3$ (如图 1), 其中 ξ_1 和 ξ_2 沿中面的曲率线方向, ξ_3 与 ξ_1, ξ_2 垂直. 壳体中面上一点沿着 ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 方向的位移分量分别为 $u(\xi_1, \xi_2)$, $v(\xi_1, \xi_2)$ 和 $w(\xi_1, \xi_2)$.

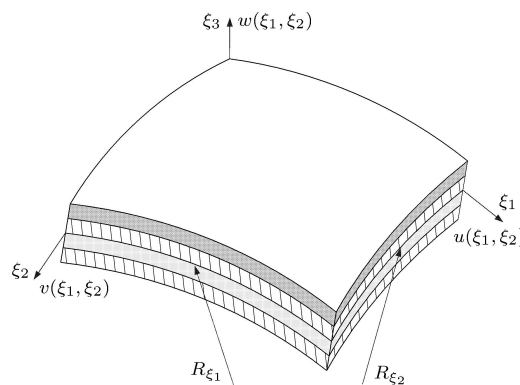


图 1 层合壳坐标系

Fig. 1 Coordinate system of a laminated shell model

沿旋转壳母线方向将壳体等距分为 N_0 个旋转壳段, 视壳体的已知位移边界为一种特殊的分区界面. 根据区域分解思想, 构造出旋转壳的能量泛函

2012-03-20 收到第 1 稿, 2012-06-20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (51121063).

2) 瞿叶高, 博士研究生, 主要研究方向: 结构振动噪声分析及控制. E-mail: quyegao@sytu.edu.cn

Π_{Tot} 为

$$\Pi_{Tot} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{N_0} (T_i - U_i) dt + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i,i'} \Pi_{\lambda\kappa} dt \quad (1)$$

其中, T_i 和 U_i 分别为第 i 个旋转壳段的动能和应变能, $\Pi_{\lambda\kappa}$ 为相邻旋转壳段 i 和 i' (或已知位移边界) 之间的界面附加势能.

根据薄壳理论, 层合旋转壳段 i 的动能表达式为

$$T_i = \frac{1}{2} \iint_{S_i} \bar{\rho} (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \lambda_1 \lambda_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (2)$$

式中, \dot{u} , \dot{v} 和 \dot{w} 分别为壳体中面上一点沿着 ξ_1 , ξ_2 和 ξ_3 方向的速度分量; $\bar{\rho}$ 为层合壳质量密度参数, $\bar{\rho} = \sum_{k=1}^{N_k} \rho^k (\xi_3^{k+1} - \xi_3^k)$, ρ^k 为第 k 层复合材料壳体的密度, N_k 为铺层数目; λ_1 和 λ_2 为壳体中面的 Lamé 参数; S_i 为层合壳段 i 的中面面积. 根据 Reissner 薄壳理论^[5], 旋转壳段 i 的应变能为

$$U_i = \frac{1}{2} \iint_{S_i} [\boldsymbol{\varepsilon}_0^T \bar{\mathbf{N}} + \boldsymbol{\chi}_0^T \bar{\mathbf{M}}] \lambda_1 \lambda_2 d\xi_1 d\xi_2 \quad (3)$$

式中, $\boldsymbol{\varepsilon}_0^T$ 和 $\boldsymbol{\chi}_0^T$ 分别壳体中面薄膜应变和曲率变化向量^[5], $\boldsymbol{\varepsilon}_0^T = [\varepsilon_{\xi_1}^0, \varepsilon_{\xi_2}^0, \varepsilon_{\xi_1\xi_2}^0]$ 和 $\boldsymbol{\chi}_0^T = [\chi_{\xi_1}^0, \chi_{\xi_2}^0, \chi_{\xi_1\xi_2}^0]$; $\bar{\mathbf{N}}$ 和 $\bar{\mathbf{M}}$ 分别为层合旋转壳段内力和内力矩向量, $\bar{\mathbf{N}}^T = [N_{\xi_1}, N_{\xi_2}, N_{\xi_1\xi_2}]$, $\bar{\mathbf{M}}^T = [M_{\xi_1}, M_{\xi_2}, M_{\xi_1\xi_2}]$.

层合壳中面内力和内力矩与薄膜应变和曲率变化之间的关系为^[6]

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{N}} \\ \bar{\mathbf{M}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\chi}_0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中, \mathbf{A} , \mathbf{B} 和 \mathbf{D} 分别为层合壳的拉伸刚度矩阵、拉伸与弯曲耦合刚度矩阵及弯曲刚度矩阵, 其数值与各层的铺层角度 θ_k 有关. θ_k 为复合材料纤维方向与 ξ_1 之间的夹角.

为了给出任意边界条件下层合壳区域分解的能量泛函表达式, 本文提出采用广义变分和最小二乘加权残值组合法来构造式 (1) 中的分区界面附加势能 $\Pi_{\lambda\kappa}$, 即

$$\begin{aligned} \Pi_{\lambda\kappa} = & \int_{l_m} (s_{\xi_1} N_{\xi_1} \theta_{\xi_1} + s_{\xi_2} \bar{N}_{\xi_1\xi_2} \theta_{\xi_2} + \\ & s_{\xi_3} \bar{Q}_{\xi_3} \theta_{\xi_3} - s_{\xi_r} M_{\xi_1} \theta_{\xi_r}) dl - \\ & \frac{1}{2} \int_{l_m} (s_{\xi_1} \kappa_{\xi_1} \theta_{\xi_1}^2 + s_{\xi_2} \kappa_{\xi_2} \theta_{\xi_2}^2 + \\ & s_{\xi_3} \kappa_{\xi_3} \theta_{\xi_3}^2 + s_{\xi_r} \kappa_{\xi_r} \theta_{\xi_r}^2) dl \end{aligned} \quad (5)$$

式中, 等式右侧第 1 项积分由分区广义变分引入, 用于放松相邻壳段分区界面上的位移和转角协调关

系, 第 2 项积分由最小二乘加权残值法引入, 一方面用于保证区域分解计算的收敛性和稳定性, 另一方面用于处理壳体的弹性边界. $\bar{N}_{\xi_1\xi_2}$ 和 \bar{Q}_{ξ_3} 为壳段间的 Kelvin-Kirchhoff 等效剪力, 它们与 $\bar{\mathbf{N}}$ 和 $\bar{\mathbf{M}}$ 之间的关系见文献 [5]. κ_{ξ_1} , κ_{ξ_2} , κ_{ξ_3} 和 κ_{ξ_r} 为壳段分区界面上给定的权参数; 取权参数为 $10E \sim 1 \times 10^6 E$ 即可保证稳定收敛^[7], E 为铺层中最大弹性模量值. 本文中权参数取相同值 $\kappa = 1 \times 10^3 E$. θ_{ξ_1} , θ_{ξ_2} , θ_{ξ_3} 和 θ_{ξ_r} 为分区界面上的位移和转角协调方程, 记为

$$\left. \begin{aligned} \theta_{\xi_1} &= u^i - u^{i'}, \quad \theta_{\xi_2} = v^i - v^{i'} \\ \theta_{\xi_3} &= w^i - w^{i'} \\ \theta_{\xi_r} &= \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{\partial w^i}{\partial \xi_1} - u^i \right) - \frac{1}{\lambda_1} \left(\frac{\partial w^{i'}}{\partial \xi_1} - u^{i'} \right) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中, 在边界界面处 i' 表示已知位移边界, 其位移和转角是事先给定的. 式 (5) 中, s_{ξ_1} , s_{ξ_2} , s_{ξ_3} 和 s_{ξ_r} 为壳体分区界面条件控制参数. 对于内部分区界面, $s_{\xi_t} = 1$ ($t = 1, 2, 3, r$); 对于边界界面, 不同边界条件对应的控制参数 s_{ξ_t} 取值, 如表 1 所示. 为了便于对壳体边界条件进行描述, 以 F, SD, SS 和 C 来分别表示自由 (free)、软筒支 (shear-diaphragm)、硬筒支 (simply-supported) 和固支 (clamped) 边界条件. 表中 SD 和 SS 的位移边界条件分别定义为 $v = w = 0$ 和 $v = w = \partial w / \partial \xi_1 = 0$. 如果将式 (5) 中第 1 项积分去掉, 则第 2 项积分即可用于处理壳体的线弹性支撑边界条件, 其中权参数 κ_{ξ_1} , κ_{ξ_2} , κ_{ξ_3} 和 κ_{ξ_r} 分别为壳体边界相应方向的支撑刚度; 对于点弹性支撑边界, 将积分符号改为求和符号即可.

表 1 不同边界条件对应的控制参数 s_{ξ_t} ($t = 1, 2, 3, r$)

Table 1 Values of s_{ξ_t} ($t = 1, 2, 3, r$) for different boundary conditions

Boundary conditions	s_{ξ_1}	s_{ξ_2}	s_{ξ_3}	s_{ξ_r}
free (F)	0	0	0	0
shear-diaphragm (SD)	0	1	1	0
simply-supported (SS)	1	1	1	0
clamped (C)	1	1	1	1

1.2 层合壳的离散动力学方程

式 (1) 中的能量泛函 Π_{Tot} 取消了界面位移协调关系对位移函数的变分限制, 使得壳段位移变量容许函数的选取变为灵活. 取坐标 ξ_2 为壳体周向坐标 ($\xi_2 = \theta$), 并采用 Fourier 级数和第一类正交 Chebyshev

多项式分别对壳段周向和 ξ_1 方向位移分量进行展开^[8]。旋转壳段中面上一点沿着 ξ_1, ξ_2 和 ξ_3 方向的对称位移展开式为^[7]

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N U_p(\bar{\xi}_1) \cos(n\theta) \tilde{u}_{pn}(t) = \\ & \quad U(\bar{\xi}_1, \theta) \tilde{\mathbf{u}}(t) \\ v &= \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N V_p(\bar{\xi}_1) \sin(n\theta) \tilde{v}_{pn}(t) = \\ & \quad V(\bar{\xi}_1, \theta) \tilde{\mathbf{v}}(t) \\ w &= \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^N W_p(\bar{\xi}_1) \cos(n\theta) \tilde{w}_{pn}(t) = \\ & \quad W(\bar{\xi}_1, \theta) \tilde{\mathbf{w}}(t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中, $\bar{\xi}_1$ 分别为壳段无量纲坐标, $\bar{\xi}_1 \in [-1, 1]$ 。 M 和 N 分别为旋转壳段 Chebyshev 多项式及 Fourier 级数的截取阶数; U_p, V_p 和 W_p 为第 p 阶 Chebyshev 多项式^[9]; $\tilde{u}_{pn}, \tilde{v}_{pn}$ 和 \tilde{w}_{pn} 为广义位移系数。对于反对称位移展开式, 需将 Fourier 级数中的正弦与余弦符号进行对调。

将式 (2) ~ 式 (7) 代入式 (1), 经变分得到旋转壳的自由振动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} - \bar{\mathbf{K}}_\lambda + \bar{\mathbf{K}}_\kappa] \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (8)$$

其中, \mathbf{q} 为旋转壳体所有壳段的广义坐标向量, $\mathbf{q} = [\tilde{\mathbf{u}}_1^T, \tilde{\mathbf{v}}_1^T, \tilde{\mathbf{w}}_1^T, \tilde{\mathbf{u}}_2^T, \tilde{\mathbf{v}}_2^T, \tilde{\mathbf{w}}_2^T, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_{N_0}^T, \tilde{\mathbf{v}}_{N_0}^T, \tilde{\mathbf{w}}_{N_0}^T]^T$; \mathbf{M} 为层合旋转壳的广义质量矩阵; \mathbf{K} 为未考虑分区界面位移协调关系的层合壳广义刚度矩阵; $\bar{\mathbf{K}}_\lambda$ 和 $\bar{\mathbf{K}}_\kappa$ 为广义变分项和最小二乘加权残值项引入的层合壳段分区界面附加刚度矩阵。设 $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} \sin(\omega t + \phi)$, $\bar{\mathbf{q}}$ 为广义坐标幅值, 代入式 (8) 后得到

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + (\mathbf{K} - \bar{\mathbf{K}}_\lambda + \bar{\mathbf{K}}_\kappa)] \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (9)$$

式 (9) 若要有非零解, 则其系数矩阵行列式必须为 0, 即 $\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} - \bar{\mathbf{K}}_\lambda + \bar{\mathbf{K}}_\kappa) = 0$, 其特征值和特征向量分别对应壳体的圆频率 ω 和振型向量。

2 复合材料层合旋转壳振动算例与讨论

文中给出了 3 种弹性边界算例, 即 E^I, E^II 和 E^{III} 。其中, E^I 为壳体母线方向弹性边界条件 ($u \neq 0, v = w = \partial w / \partial x = 0$), 沿母线方向线弹性支撑刚度为 k_u ; E^{II} 表示壳体周向弹性边界条件 ($v \neq 0, u = w = \partial w / \partial x = 0$), 沿周向线弹性支撑刚度为 k_v ; E^{III} 为轴向和周向弹性边界条件, ($u \neq 0, v \neq 0, w = \partial w / \partial x = 0$), 则壳体母线方向和周向线弹性支撑刚度分别为 k_u 和 k_v 。文中复合材料参数下标 1 和 2 分别表示纤维方向和垂直纤维方向。

2.1 圆柱壳自由振动算例

表 2 给出了不同边界条件对应的正交铺层复合材料圆柱壳无量纲频率 $\Omega_{n,m} = \omega_{n,m} R \sqrt{\rho / E_2}$ 结果对比。选取的圆壳体坐标系为 $\xi_1 = x, \xi_2 = \theta, \xi_3 = z$, 见文献 [2]。 n 和 m 为壳体周向波数和轴向模态阶数。壳体参数为: $L/R = 2, h/R = 0.0025, R = 0.9 \text{ m}; E_1 = 15.59 E_2, E_2 = 7.6 \text{ GPa}, G_{12} = 0.5366 E_2, \mu_{12} = 0.32, \rho = 1643 \text{ kg/m}^3$ 。壳段轴向位移分量 Chebyshev 多项式阶数取 $P = 8$ 。从表 2 中可以看出, 本文计算结果与其他文献值几乎一致。实际上, 随着分区数目的增大, 壳体高阶频率也很快收敛; 限于篇幅, 表中仅给出了 $m = 1$ 对应的频率。表 3 列出了 10 种边界条件下对应的正交对称铺层 $[90^\circ/0^\circ/0^\circ/90^\circ]$ 圆柱壳无量纲频率 $\Omega_{n,m}$, 壳体分区数目取 $N_0 = 2$ 。壳体几何参数与材料参数同前, 弹性边界处的轴向和周向支撑刚度分别为 $k_u = 100 \text{ MN/m}$ 和 $k_v = 10 \text{ MN/m}$ 。

表 2 正交铺层圆柱壳频率 $\Omega_{n,m} = \omega_{n,m} R \sqrt{\rho / E_2} (m = 1)$

Table 2 Frequency parameter $\Omega_{n,m} = \omega_{n,m} R \sqrt{\rho / E_2}$ of cross-ply laminated cylindrical shells ($m = 1$)

Boundary conditions	Stacking sequence	n	Number of shell segment N_0				Ref.[1]	Ref.[2]
			2	4	8	12		
SD-SD	$90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$	7	0.143 05	0.143 05	0.143 05	0.143 05	0.143 1	0.143 05
C-C	$90^\circ/0^\circ$	8	0.152 71	0.152 71	0.152 71	0.152 71	0.153 5	0.152 74

表 3 不同边界条件对应的正交铺层圆柱壳 [90°/0°/0°/90°] 无量纲频率 $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R\sqrt{\rho/E_2}$ ($m = 1$)
 Table 3 Frequency parameter $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R\sqrt{\rho/E_2}$ of the cross-ply laminated cylindrical shell [90°/0°/0°/90°] with different boundary conditions ($m = 1$)

n	Boundary conditions									
	SS-F	SS-SD	SS-SS	SS-C	E ^I -E ^I	E ^I -E ^{II}	E ^I -E ^{III}	E ^{II} -E ^{II}	E ^{II} -E ^{III}	E ^{III} -E ^{III}
0	0.575 32	1.150 63	1.150 63	1.150 63	1.150 63	0.835 46	0.835 46	0.625 77	0.625 77	0.625 77
1	0.395 19	0.788 15	0.795 64	0.795 73	0.791 29	0.620 52	0.619 82	0.504 32	0.503 52	0.503 21
2	0.234 82	0.487 94	0.503 54	0.503 74	0.492 24	0.427 24	0.427 16	0.385 03	0.381 60	0.379 98
3	0.152 75	0.334 91	0.354 37	0.354 67	0.337 28	0.315 63	0.313 18	0.304 62	0.297 82	0.293 74

2.2 圆锥壳自由振动算例

表 4 给出了不同厚径比 h/R_2 对应的两端简支 (SD-SD) 圆锥壳无量纲频率 $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R_2\sqrt{\rho_0h/A_{11}}$ 对比. 选取的圆锥体坐标系为 $\xi_1 = s, \xi_2 = \theta, \xi_3 = z$, 见文献 [8]. 圆锥壳几何和材料参数为 $R_2 = 1\text{ m}$, $R_1/R_2 = 0.75, \alpha = 30^\circ; E_1 = 15E_2; E_2 = 5\text{ GPa}; G_{12} = 0.5E_2$; 泊松比 $\mu_{12} = 0.25$, 密度 $\rho = 1\ 600\text{ kg/m}^3$; 铺层顺序和角度为 $0^\circ/90^\circ$. 取 $N_0 = 1$ 得到的频率即与其他文献结果非常吻合. 表 5 中列出了其他 3 种边界条件对应的圆锥壳频率结果, 区域分解计算中取 $N_0 = 2$. 表中括号内的数值为对应的周向波数 n 取值; 边界条件按照圆锥壳“小端-大端”方式来定

义, 如“SD-C”边界条件表示 R_1 侧简支和 R_2 侧固支. 从表中可以看出, 对于不同边界条件, 本文计值与文献 [8] 结果也是非常吻合的.

表 4 层合圆锥壳 [0°/90°] 无量纲频率 $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R_2\sqrt{\rho_0h/A_{11}}$ ($n = 0$; 边界条件: SD-SD)
 Table 4 Frequency parameter $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R_2\sqrt{\rho_0h/A_{11}}$ of laminated conical shells (0°/90°) [$n = 0$, boundary conditions: SD-SD]

h/R ₂	Number of shell segment N_0				Ref.[8]	Ref.[9]
	1	2	6	8		
0.01	0.177 0	0.177 0	0.177 0	0.177 0	0.179 9	0.176 9
0.03	0.235 9	0.235 9	0.235 9	0.235 9	0.239 7	0.236 0

表 5 不同边界条件对应的层合圆锥壳 [0°/90°] 无量纲频率 $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R_2\sqrt{\rho_0h/A_{11}}$ ($m = 1$)
 Table 5 Frequency parameter $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R_2\sqrt{\rho_0h/A_{11}}$ for laminated conical shells [0°/90°] with different boundary conditions ($m = 1$)

h/R ₂	SD-C		C-SD		C-C	
	Ref.[8]	Present	Ref.[8]	Present	Ref.[8]	Present
0.01	0.265 6(7)	0.267 2	0.264 1(7)	0.262 2	0.298 6(7)	0.298 3
0.03	0.495 8(5)	0.503 6	0.502 7(5)	0.492 2	0.621 0(5)	0.618 7

2.3 球壳自由振动算例

表 6 中给出了不同正交铺层对应的固支半球壳无量纲频率 $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R\sqrt{\rho/E_2}$. 球壳的坐标系取 $\xi_1 = \varphi, \xi_2 = \theta, \xi_3 = z$, 见文献 [10]. 壳体几何参数和材料参数为 $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 90^\circ, h/R = 0.01; E_1 = 138\text{ GPa}, E_2 = 10.6\text{ GPa}, G_{12} = 6\text{ GPa}, \mu_{12} = 0.28, \rho = 1\ 500\text{ kg/m}^3$. 区域分解计算中取 $N_0 = 2$. 表 6 中括

号内的数值为对应的周向波数 n 取值. 从表中可以看出, 本文结果与文献值吻合较好.

表 6 半球壳频率 $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R\sqrt{\rho/E_2}$ ($m = 1$; 边界条件: C-C)

Table 6 Frequency parameter $\bar{\Omega}_{n,m} = \omega_{n,m}R\sqrt{\rho/E_2}$ of laminated spherical shells ($m = 1$; boundary condition: C-C)

	0°	90°	0°/90°	0°/90°/0°
Ref.[10]	0.884(1)	0.976(1)	1.157(1)	1.133(1)
present	0.889 41	0.976 86	1.158 27	1.141 09

3 结 论

针对任意边界条件的一般复合材料层合旋转壳自由振动, 提出了一种半解析区域分解建模与分析方法. 该方法的思想是将层合壳分解为一些自由的旋转壳段, 采用分区广义变分和最小二乘加权残值法将壳段分区界面之间的位移协调方程放松并引入到壳体能量泛函中, 使旋转壳的自由振动问题归结为在满足分区界面位移约束条件下的无约束泛函变分问题. 该方法具有以下特点: (1) 壳段位移变量容许函数的选取非常灵活; (2) 随着旋转壳分区数目的增大, 区域分解法计算出的壳体频率很快收敛; (3)

将壳体边界视为一种特殊的分区界面, 通过改变边界控制参数即可快速地分析任意组合边界条件下层合壳体的振动特性, 无须重新形成整个壳体的质量和刚度矩阵, 大幅提高了计算效率.

参 考 文 献

- 1 Narita Y, Kobayashi Y, Ohta Y, et al. Analytical method for vibration of angle-ply cylindrical shells having arbitrary edges. *AIAA Journal*, 1992, 30(3): 790-796
- 2 Messina A, Soldatos KP. Ritz-type dynamic analysis of cross-ply laminated circular cylinders subjected to different boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, 227(4):749-768
- 3 Liew KM, Zhao X, Ferreira AJM. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures*, 2011, 93(8): 2031-2041
- 4 Matter M, Gmür G, Cugnoni J, et al. A PSDT shell finite element formulation including structural damping. *Computers & Structures*, 2010, 88(15-16): 902-908
- 5 Leissa AW. *Vibration of Shells* (NASA SP-288). Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1973
- 6 Qatu MS, Sullivan RW, Wang WC. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000—2009. *Composite Structures*, 2010, 93(1): 14-31
- 7 Qu YG, Hua HX, Meng G. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries. *Composite Structures*, 2012, 95: 307-321
- 8 Shu C. Free vibration analysis of composite laminated conical shells by generalized differential quadrature. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 194(4): 587-604
- 9 Tong LY. Free vibration of laminated conical shells including transverse shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 1994, 31(4): 443-456
- 10 Gautham BP, Ganesan N. Free vibration characteristics of isotropic and laminated orthotropic spherical caps. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 204(1): 17-40

(责任编辑: 周冬冬)

A NEW METHOD FOR FREE VIBRATION ANALYSIS OF COMPOSITE LAMINATED SHELLES OF REVOLUTION¹⁾

Qu Yegao²⁾ Hua Hongxing Chen Yong Long Xinhua Meng Guang

(State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract A semi-analytical domain decomposition approach is proposed for free vibration analysis of laminated composite shells of revolution subjected to arbitrary boundary conditions. A laminated shell structure is divided into some shell segments along the axis of revolution. The geometrical boundaries are treated as special interfaces as those between two adjacent shell segments. All interface continuity constraints are incorporated into the system potential functional by means of a subdomain generalized variational principle and least-squares weighted residual method. Double mixed series, i.e. the Fourier series and Chebyshev orthogonal polynomials, are adopted as assumed admissible displacement functions for each shell segment. In order to validate the proposed formulation, typical laminated shells of revolution, such as circular cylindrical, conical and spherical shells, with various combinations of edge support conditions, are examined. The numerical results obtained from the present method show good agreement with previously published results. The present solution is very efficient, robust and accurate. The computational advantage of the approach can be exploited to gather useful and rapid information about the effects of geometry and boundary conditions on the vibrations of laminated composite shells of revolution.

Key words domain decomposition, subdomain generalized variational principle, least-squares weighted residual method, composite laminated shell of revolution, free vibration

Received 20 March 2012, revised 20 June 2012.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (51121063).

2) Qu Yegao, PhD candidate, research interests: structural vibration and acoustics, control of sound and vibration. E-mail: quyegao@sjtu.edu.cn