

# 长方形岩石劈裂应力分析

王志, 张景飞, 杜云海

郑州大学力学与工程科学学院, 郑州 450001

**摘要** 提出一种基于弹性力学平面问题傅里叶级数的长方形岩石劈裂应力解析方法。为了与该傅里叶级数解析方法比较,建立了相同劈裂载荷条件下长方形岩石三维有限元模型,分析了劈裂试件的应力分布,以及试件宽长比、垫条宽度对劈裂试件应力分布的影响。结果表明,两种方法的分析结果一致,劈裂试件的最大拉应力未出现在试件中心,而是出现在试件  $x=0$  对称轴上靠近边界的某一点;最大拉应力随着垫条宽度  $2c$  和试件宽长比  $b/a$  的增加而减小;正方形试件的最大拉应力大于圆柱形试件的最大拉应力。通过类岩石材料劈裂实验,证明了该傅里叶级数解析方法描述的长方形岩石劈裂应力分布规律与实验结果相符。

**关键词** 长方形岩石;劈裂应力;傅里叶级数解析方法;三维有限元模型

**中图分类号** O319.56

**文献标志码** A

**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.07.005

## Splitting Stress Analysis of Rock with Rectangular Shape

WANG Zhi, ZHANG Jingfei, DU Yunhai

School of Mechanics and Engineering Science, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China

**Abstract** The stress distribution of rectangular rock under split loads is an important research topic of rock mechanics. The formula of rectangular specimen tensile stress under splitting loads can be deduced by the Fourier series solution of the elastic plane problem. To compare the theoretical solution and the finite element solution, a dimensional finite element model of the rectangular specimen is built under the same loading conditions. The stress distribution and the impact of the width of spacer and the width to length ratio are analyzed. It is shown that results of the theoretical solution and the finite element solution are consistent. The maximum tensile stress does not appear in the center of the specimen but in a certain point with coordinates. The maximum tensile stress decreases with the increasing of the width of spacer and the width to length ratio  $b/a$ . The tensile stress distribution patterns of cylindrical specimen and square specimen are consistent, but the tensile stress of the square specimen is greater than that of the cylindrical specimen. It is proved that the splitting stress distribution of rectangular rock obtained by the Fourier series analysis method is consistent with the rock-like material splitting experimental results.

**Keywords** rectangular rock; splitting stress; Fourier series analysis method; dimensional finite element model

抗拉强度是岩石类材料的重要物理性质参数<sup>[1,2]</sup>,通常所指的抗拉强度是指岩石在单向拉伸应力条件下的极限应力,由于岩石材料的脆性特征,直接测量其抗拉强度十分困难<sup>[3]</sup>。在实验室条件下测定岩石材料抗拉强度的间接方法有劈裂法、弯曲法、径向扩张法等<sup>[4-6]</sup>,其中巴西圆盘劈裂实验用于测试岩石类脆性材料的抗拉强度已经有悠久的历史<sup>[7-10]</sup>,并

得到广泛应用,是现行岩石抗拉强度测试的主要推荐方法<sup>[11]</sup>。

对于不方便加工为圆盘实验试件的岩石材料,一般采用长方形试件代替圆柱形试件进行实验<sup>[12-16]</sup>。长方形试件在劈裂载荷作用下,其破坏形式及破坏机理尚不清楚,如果用长方形试件测定岩石抗拉强度,是否可以沿用巴西圆盘计算公式也不清楚。因此,本文研究一种基于弹性力学平面问题傅

收稿日期:2013-08-30;修回日期:2014-01-21

基金项目:河南省教育厅科学技术研究项目(12B130005)

作者简介:王志,博士,研究方向为岩石力学及断裂力学,电子信箱:zhiwang4960\_cn@126.com;杜云海(通信作者),教授,研究方向为断裂力学,电子信箱:zzu\_dyh@zzu.edu.cn

引用格式:王志,张景飞,杜云海.长方形岩石劈裂应力分析[J].科技导报,2014,32(7):39-43.

里叶级数的长方形岩石试件劈裂应力计算方法。

### 1 长方形岩石劈裂应力傅里叶级数解析方法

对于长度为 $2a$ 、宽度为 $2b$ 、厚度为 $2t$ 的长方形岩石试件,其所受载荷如图1所示。

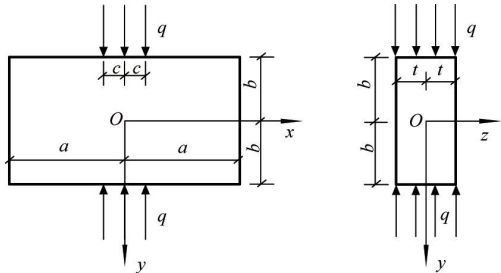


图1 长方形岩石试件受力示意

Fig.1 Splitting force schematic of rectangular specimen

建立坐标系,试件几何中心为坐标原点,厚度 $t$ 在 $z$ 轴,长度 $a$ 在 $x$ 轴,宽度 $b$ 在 $y$ 轴。假设垫条上的载荷 $q$ 为均匀分布,则根据傅里叶级数应力计算理论,试件上下边界的载荷分布可以表述为

$$\sigma_x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2p}{at} \frac{\left( \frac{m\pi b}{a} \cosh \frac{m\pi b}{a} - \sinh \frac{m\pi b}{a} \right)}{\sinh \frac{2m\pi b}{a} + \frac{2m\pi b}{a}} \cosh \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2p}{at} \frac{\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi b}{a}}{\sinh \frac{2m\pi b}{a} + \frac{2m\pi b}{a}} \cos \frac{m\pi x}{a}$$

$$\sigma_y = -\frac{p}{2at} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2p}{at} \frac{\left( \frac{m\pi b}{a} \cosh \frac{m\pi b}{a} + \sinh \frac{m\pi b}{a} \right)}{\sinh \frac{2m\pi b}{a} + \frac{2m\pi b}{a}} \cosh \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2p}{at} \frac{\frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi b}{a}}{\sinh \frac{2m\pi b}{a} + \frac{2m\pi b}{a}}$$

式中, $\sigma_x$ 为横向拉应力; $\sigma_y$ 为竖向压应力。

式(5)即为有限长方形岩石试件在劈裂载荷作用下的拉应力计算式。可见,横向最大拉应力发生在 $x=0$ 的对称轴

$$\Psi(b/a) = \frac{\left( \frac{m\pi b}{a} \cosh \frac{m\pi b}{a} - \sinh \frac{m\pi b}{a} \right) \cosh \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi b}{a}}{\sinh \frac{2m\pi b}{a} + \frac{2m\pi b}{a}} \quad (6)$$

则对称轴上的横向拉应力可表示为

$$\sigma_x = \frac{2p}{at} \Psi(b/a) \quad (7)$$

式(7)即为考虑试件尺寸影响的长方形岩石试件在劈裂载荷作用下的拉应力计算式。由于函数 $\Psi(b/a)$ 只与试件尺寸 $b/a$ (宽长比)有关,称为形状函数,是试件的固有性质,因此,对于不同尺寸的试件,可先根据式(6)计算形状函数,根据形状函数的变化规律确定 $\Psi(b/a)$ 的最大值,然后代入式(7)即可得到劈裂载荷下长方形岩石试件的最大拉应力。

### 2 三维有限元模型

参照图1所示的长方形岩石试件劈裂受力情况,试件的

$$q_u = q_l = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (1)$$

式中, $A_0$ 、 $A_m$ 、 $A'_m$ 为傅里叶系数。

试件上下边界的载荷分布为

$$q_u = q_l = \begin{cases} 0 & -c > x, x > c \\ q & -c \leq x \leq c \end{cases} \quad (2)$$

由式(2)和式(3)将试件上下边界的载荷展开为傅里叶级数形式,即

$$q_u = q_l = \frac{qc}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q \sin \frac{m\pi c}{a}}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (3)$$

式中, $q_u$ 、 $q_l$ 分别为长方形试件上下边界的载荷分布; $q$ 为垫条载荷; $2c$ 为垫条宽度; $2b$ 为试件宽度; $2a$ 为试件长度。

当垫条宽度 $2c$ 较小时,即 $(c/a) \rightarrow 0$ ,则式(3)可以表示为

$$q_u = q_l = \frac{qc}{a} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2qc}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \quad (4)$$

假设垫条载荷 $q$ 在厚度 $2t$ 范围内均匀分布,对于平面问题来说,相当于试件受等效集中力 $p$ 作用,且 $p=q \cdot 2t$ ,kN。对于试件上下边界受力为 $q_u=q_l=A \sin \alpha x$ ( $A$ 为任意常数)的平面弹性力学问题,利用傅里叶级数的应力求解的一般形式为

上。取一表示试件尺寸的函数 $\Psi(b/a)$ 表述试件尺寸 $b/a$ (宽长比)对拉应力的影响,记为

几何中心为坐标原点,线载荷的加载方向为 $y$ 轴方向, $x$ 轴为试件中心线。试件的位移约束条件为,试件的底部与加载线对称的底边在 $y$ 方向没有位移,该底边的中心点在 $x$ 方向也没有位移。

为了研究试件尺寸等因素对劈裂应力分布规律的影响,建立不同厚度、不同宽长比、不同垫条宽度的长方形岩石三维有限元模型,研究这些参数对长方形岩石劈裂试件应力分布的影响。

试件长度为50~110 mm,厚度为9~18 mm,岩石材料为砂岩,其弹性模量 $E=30$  GPa,泊松比 $\nu=0.27$ 。为了与巴西圆盘实验相对比,也采用同样的材料建立了圆盘的三维有限元模型。三维有限元模型及其网格划分如图2所示。

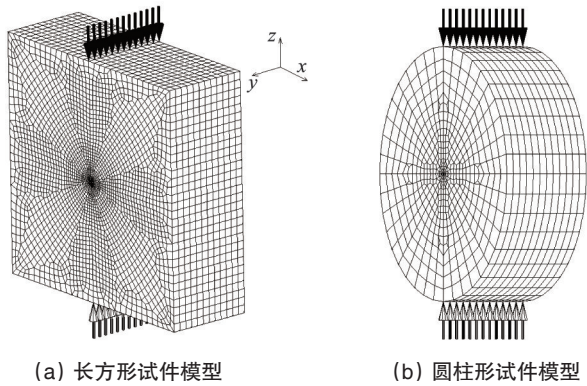


图2 三维有限元模型及其网格划分

Fig. 2 Meshing of dimensional finite element model

### 3 计算结果与分析

#### 3.1 应力分布

正方形岩石试件(50 mm×50 mm)对称轴上  $x$  方向的拉应力( $\sigma_x$ )分布规律如图3所示。水平方向以拉应力( $\sigma_x$ )为主, 垂直方向以压应力( $\sigma_y$ )为主, 除应力集中区外(图3中接近±25 mm区域), 截面大部分区域处于受拉状态, 但最大拉应力并未发生在试件中心, 而是发生在对称轴上接近上下边界的某一点, 且有限元计算结果与傅里叶级数方法计算结果极为近似。据此可知, 在劈裂载荷作用下, 试件对称轴上的最大拉应力即为抗拉强度, 计算式由式(7)转换为

$$\sigma_t = \frac{2p_k}{at} \psi_{\max}(b/a) \quad (8)$$

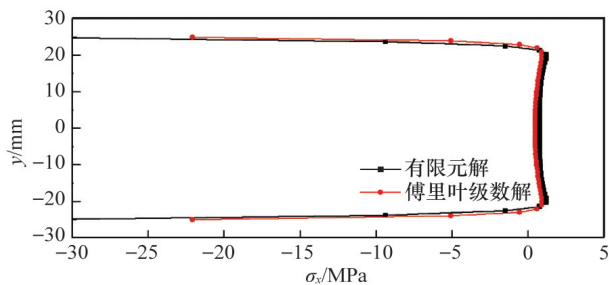


图3 对称轴上的拉应力分布

Fig. 3 Tensile stress distribution of symmetry axis

沿试件厚度方向的拉应力分布规律如图4所示, 处于不同厚度截面上的应力值差别较大, 两端面应力值大, 越到中间应力值越小, 主要是由于中轴线上各质点受到周围质点的约束程度不同, 中轴线中心点处受到的约束最大, 沿中轴线往外, 越靠近端面, 受到的约束程度相对越小, 试件端面中心处受到的约束最小。在水平方向拉应力作用下, 约束程度越小的位置越容易产生拉应变或变形, 最先发生劈裂破坏的点应该在端面最大拉应力的位置, 然后向试件内部渐进发展。

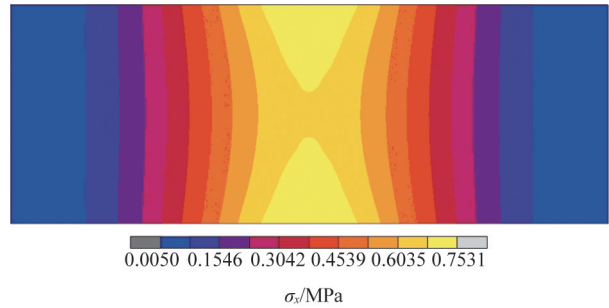
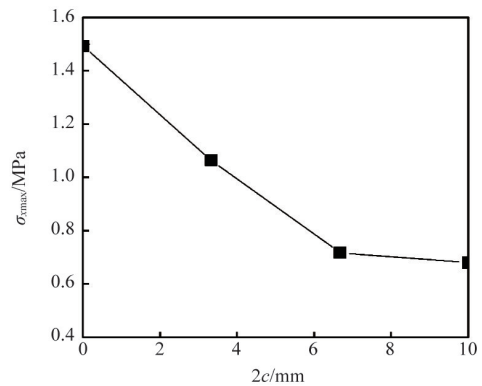


图4 水平剖面上的拉应力分布

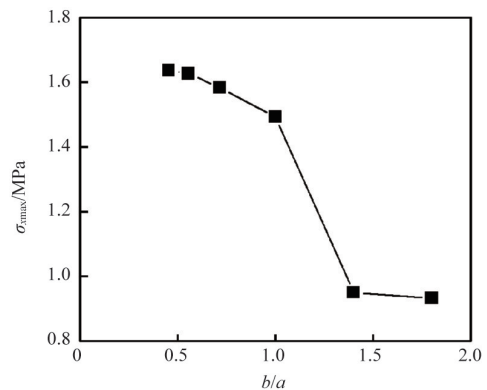
Fig. 4 Tensile stress distribution in horizontal cross section

#### 3.2 影响因素

试件宽长比和垫条宽度对最大劈裂应力的影响规律如图5所示。随着垫条宽度的增加, 试件受压区的应力集中现象有所减弱, 产生的最大拉应力也有所减小, 最大压应力和切应力却有所增加, 当垫条宽度较大时, 有可能产生切应力和压应力先于拉应力达到强度极限值, 发生受压破坏。因此进行劈裂实验时, 应选用宽度较小的垫条, 使劈裂实验发生拉伸破坏, 如图5(a)所示。



(a) 垫条宽度对最大劈裂应力的影响



(b) 试件宽长比对最大劈裂应力的影响

图5 影响因素分析

Fig. 5 Influencing factor analysis



试件宽长比  $b/a$  对劈裂应力的分布影响明显,如图 5(b) 所示,当  $b/a$  小于 1 时随着  $b/a$  的增加最大劈裂应力减小,当  $b/a$  大于 1 时最大劈裂应力明显下降,这是因为垫条载荷  $q$  的傅里叶级数形式是假设长边(试件长度)为无穷大时的分布,所以当试件长度  $2a$  小于宽度  $2b$  时,该前提条件不满足,尺寸效应显现,因此劈裂应力分布出现变化。建议选用宽长比  $b/a$  小于 1 的试件进行长方形岩石劈裂实验,同时为了与巴西圆盘实验比较,一般可以选  $b/a$  为 1 的正方形试件。

直径  $D=50$  mm 的圆柱形试件和边长  $2a=50$  mm 的正方形试件在相同厚度、相同载荷作用下其外表面的拉应力分布规律如图 6 所示。两种试件在外表面的拉应力分布规律一致,但正方形试件的最大劈裂应力大于圆柱形试件的最大劈裂应力,两者之间的比值为 1.5,因此对于正方形岩石的劈裂应力计算,其抗拉强度的计算式不能沿用巴西圆盘计算式,可以采用本文式(8)进行计算。

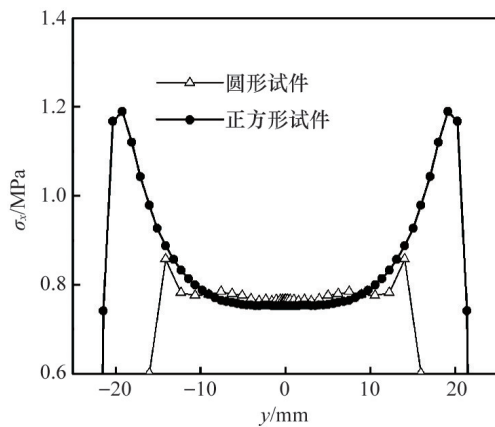


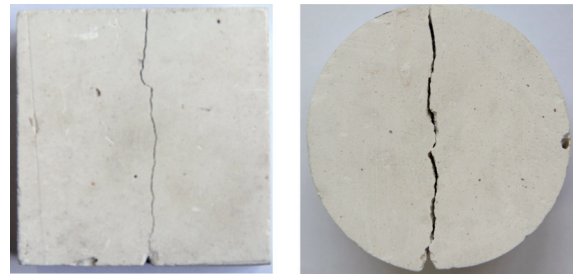
图 6 圆柱形试件和正方形试件的应力分布比较  
Fig. 6 Stress distribution comparison between cylindrical specimens and square specimens

#### 4 实验验证

采用石膏制作类岩石材料,通过模具制作圆柱形试件和方形试件,圆柱形试件的直径约为 50 mm,正方形试件的边长约为 50 mm,试件厚度为 35 mm,试件加工完成后采用细砂纸进行打磨,防止表面及局部破损,保证两相对面的不平行度小于 0.05 mm。对于相同条件下的同一类型实验,选取 2~3 个试件进行重复实验获取平均值。将加工的圆柱状试件置于压力机的承压板间,并在上、下承压板之间各放置一根直径为 2 mm 的硬质钢丝作为垫条,在试件的对称轴面上施加线压力,使试件产生垂直于载荷作用方向的张拉力。

试件破坏轨迹如图 7 所示,方形试件和圆柱形试件均沿着对称轴劈裂破坏。按圆盘劈裂抗拉强度计算式计算得到的圆柱形试件的抗拉强度为 0.54 MPa,按式(8)计算得到的方形试件的抗拉强度为 0.47 MPa,对照图 6 可知,在相同载荷作用下计算得到的圆柱形试件的最大拉应力小于方形试件

的最大拉应力,对于同一种材料,其抗拉强度为一常数,计算拉应力大的试件先达到抗拉强度而发生破坏,因此,圆柱形试件的抗拉强度大于方形试件的抗拉强度。



(a) 长方形试件 (b) 圆柱形试件

图 7 长方形试件和圆柱形试件的劈裂破坏

Fig. 7 Splitting failures for rectangular and cylindrical test specimens

实验结果证明了本文所述的方法能够较为清楚地阐述长方形试件劈裂应力的分布规律。

#### 5 结论

1) 长方形岩石劈裂应力的傅里叶级数解析方法与三维有限元计算方法比较,两种方法的计算结果一致。在劈裂载荷作用下,最大拉应力不是出现在试件中心,而是出现在对称轴上靠近边界的某一点;劈裂试件两端面( $z=\pm t$ )应力值大,越到中间( $z=0$ )应力值越小,出现最大拉应力的点最先发生破坏。随着垫条宽度的增加,试件的最大拉应力有所减小,切应力和压应力却有所增加。当试件宽长比  $b/a$  小于 1 时, $b/a$  对最大劈裂应力的影响较小,当  $b/a$  大于 1 时, $b/a$  对最大劈裂应力的影响明显。

2) 通过对相同厚度的圆柱形试件和正方形试件的有限元分析发现,两种试件在外表面的拉应力分布规律一致,但正方形试件的最大劈裂应力大于圆柱形试件的最大劈裂应力,因此,对于方形岩石劈裂实验,其抗拉强度的计算式不能沿用巴西圆盘计算式。

3) 通过类岩石材料劈裂实验,验证了试件沿着对称轴劈裂破坏,证明本文方法能够较准确地阐述长方形试件劈裂应力的分布规律。

#### 参考文献(References)

- [1] 王启智, 贾学明. 用平台巴西圆盘试样确定脆性岩石的弹性模量、拉伸强度和断裂韧度: 第一部分 解析和数值结果[J]. 岩石力学与工程学报, 2002, 21(9): 1285-1289.  
Wang Qizhi, Jia Xueming. Determination of elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of brittle rocks by using flattened Brazilian disk specimen. Part I: Analytical and numerical results[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2002, 21(9): 1285-1289.
- [2] 王启智, 吴礼舟. 用平台巴西圆盘试样确定脆性岩石的弹性模量、拉

- 伸强度和断裂韧度:第二部分 试验结果[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(2): 199-204.
- Wang Qizhi, Wu Lizhou. Determination of elastic modulus, tensile strength and fracture toughness of brittle rocks by using flattened Brazilian disk specimen. Part II: Experimental results[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(2):199-204.
- [3] 于庆磊, 唐春安, 杨天鸿. 平台中心角对岩石抗拉强度测定影响的数值分析[J]. 岩土力学, 2008, 29(12): 3251-3260.
- Yu Qinglei, Tang Chunan, Yang Tianhong. Numerical analysis of influence of central angle of flats on tensile strength of granite in split test with flattened disk[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(12): 3251-3260.
- [4] 沈明荣. 岩体力学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1999.
- Shen Mingrong. Rock mass mechanics[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1999.
- [5] 张少华, 缪协兴, 赵海云. 试验方法对岩石抗拉强度测定方法的影响[J]. 中国矿业大学学报, 1999, 28(3): 243-246.
- Zhang Shaohua, Miao Xiexing, Zhao Haiyun. Influence of test methods on measured results of rock tensile strength[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 1999, 28(3): 243-246.
- [6] 吴基文, 闫立宏. 煤岩抗拉强度两种室内间接测定方法比较与成果分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(10): 1643-1647.
- Wu Jiwen, Yan Lihong. Comparison study on two kinds of indirect measurement methods of tensile strength of coal[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(10): 1643-1647.
- [7] Hondros G. The evaluation of Poisson's ratio and the modulus of materials of a low tensile resistance by the Brazilian (indirect tensile) [J]. Australian Journal of Applied Science, 1959, 10(3): 243-268.
- [8] Mellor M, Hawkes I. Measurement of tensile strength by diameter compression[J]. Engineering Geology, 1971, 5(2): 173-225.
- [9] 尤明庆, 苏承东. 平台巴西圆盘劈裂和岩石抗拉强度的试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(18): 3107-3112.
- You Mingqing, Su Chengdong. Experimental study on split test with flattened disk and tensile strength of rock[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(18): 3107-3112.
- [10] 喻勇, 徐跃良. 采用平台巴西圆盘试样测试岩石抗拉强度的方法[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(7): 1457-1462.
- Yu Yong, Xu Yueliang. Method to determine tensile strength of rock using flattened brazilian disk[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2006, 25(7): 1457-1462.
- [11] Bieniawski Z T, Hawkes I. Suggested methods for determining tensile strength of rock materials[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1978, 15(1): 99-103.
- [12] Arikian F, Ulusay R, Aydin N. Characterization of weathered acidic volcanic rocks and a weathering classification based on a rating system [J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment, 2007, 66(4): 415-430.
- [13] Borrelli L, Greco R, Gulla G. Weathering grade of rock masses as a predisposing factor to slope instabilities: Reconnaissance and control procedures[J]. Geomorphology, 2007, 87(3): 158-175.
- [14] Gupta V, Sharma R, Sah M P. Surface weathering of gneiss, northwestern higher Himalaya, India[J]. Quarterly Journal of Engineering Geology and Hydrogeology, 2011, 44(1): 135-140.
- [15] Zorlu K. Description of the weathering states of building stones by fractal geometry and fuzzy inference system in the Olba ancient city (Southern Turkey)[J]. Engineering Geology, 2008, 101(3-4): 124-133.
- [16] 刘勇军, 朱岳明, 曹为民, 等. 长方体劈裂试验的可行性研究[J]. 河海大学学报, 2001, 29(5): 100-102.
- Liu Yongjun, Zhu Yueming, Cao Weiming, et al. The feasibility study on cuboid split test[J]. Journal of Hohai University, 2001, 29(5): 100-102.

(责任编辑 韩星明)

## · 学术动态 ·



## 中国科协组织环境专家共话雾霾

2014年2月27日,中国科协邀请部分环境专家在中国科技会堂就共同关心的雾霾问题展开交流。中国科协副主席、书记处书记陈章良主持会议,中国科协党组成员、书记处书记王春法,党组成员、办公厅主任吴海鹰出席。

美国加州环境保护署专家、南加州华人环保协会理事童卫星博士介绍了美国洛杉矶地区防治雾霾的做法和经验,并对中国开展雾霾防治工作提出了建议。中国生态学会的贺泓、王跃思,中国气象学会的张小曳、龚山陵,中国环境科学学会的柴发合、胡敏、郭新彪等7位专家结合各自研究的方向,围绕雾霾的生成机制、防治措施和发展趋势等发表了意见。

专家表示:当前针对雾霾的研究表明,雾霾是可防可治的,全社会应当树立信心,共同行动;同时,中国雾霾的生成机理十分复杂,对治理的成效要抱有充分的耐心,并付诸坚持不懈的努力。专家针对加强管理、严格减排、自我防护等议题,展开了热烈讨论。

详见中国科协网 <http://www.cast.org.cn/n35081/n35473/n35518/15437631.html>。