

# 空间可展机构非光滑力学模型和动力学研究<sup>1)</sup>

曹登庆<sup>\*2)</sup> 初世明<sup>\*</sup> 李郑发<sup>\*†</sup> 刘荣强<sup>\*\*</sup>

<sup>\*</sup>(哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001)

<sup>†</sup>(深圳航天科技创新技术研究院, 深圳 518057)

<sup>\*\*</sup>(哈尔滨工业大学机器人技术与系统国家重点实验室, 哈尔滨 150001)

**摘要** 空间可展机构广泛应用于展开和支撑柔性太阳能帆板和航天工程领域中的有效载荷, 包括抛物面天线、平面相控阵雷达和合成孔径雷达等. 非光滑特性及其相应的动力学现象在空间可展机构的设计中有着非常重要的作用. 该文系统地综述了空间可展机构非光滑力学建模与非线性动力学的研究进展. 首先详细描述了含间隙铰链的接触碰撞力和摩擦力等非光滑特点; 然后系统地介绍了含间隙机构的动力学建模方法、分析方法和参数设计; 进一步简单介绍了含间隙铰链空间可展机构的非线性动力学特性, 如谐波共振、周期运动的稳定性和各类分岔等; 最后提出了空间可展机构非光滑动力学系统动力学、稳定性与控制中亟待解决的若干问题.

**关键词** 空间可展机构, 非光滑系统, 接触模型, 摩擦模型, 间隙

中图分类号: O313.4, O313.5, V475, V44 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-12-341

## 引言

随着空间技术的迅速发展, 空间飞行器日益大型化和柔性化, 空间结构日趋庞大. 由于运载工具有效空间的限制, 许多空间结构 (如太阳能帆板、雷达天线阵列、空间桁架等) 不得不以折叠状态固定在载荷舱内, 待发射入轨后再逐步展开, 锁定并保持预定的几何构形. 因此, 空间可展机构在航天器结构中得到广泛应用<sup>[1-3]</sup>.

空间可展机构中绝大部分都可以视为由铰链作为连接器构成的. 铰链间的间隙使得机构的实际运动与理想运动之间出现偏差, 在展开过程中运动副之间不可避免地产生接触和分离, 导致空间可展机构具有非光滑力学特征. 另一方面, 由于间隙的存在, 使得碰撞时的加速度、运动副反力、平衡力矩等超出理想零间隙时的几倍甚至十几倍<sup>[4-5]</sup>. 此外, 铰链中运动部件间的干摩擦也是引起可展机构非光滑特征的主要因素之一. 间隙、碰撞和干摩擦等大量复杂非光滑的因素使得可展机构在展开过程中容易引发结构振动和变形, 直接影响航天器姿态运动以及有效载荷的指向稳定度, 而且这些因素往往难以完全有效控制. 国内外由于上述原因导致空间可展结构失稳、定位精度不够、天线打开失灵, 甚至直接造

成飞行任务失败的事例已有大量报道<sup>[6-7]</sup>.

铰链的间隙是可展机构产生非光滑动力学响应的直接原因, 作为非线性动力学领域中的重要组成部分, 非光滑动力学系统比光滑动力学系统具有更多样更复杂的动力学行为. 由于其振动现象在实际工程领域的普遍性和重要性, 关于非光滑动力学系统的研究日益展现出其紧迫性, 并得到了广大国内外学者和工程技术人员的普遍关注<sup>[8-9]</sup>.

本文介绍了空间可展机构非光滑动力学建模与动力学分析方面的相关研究成果. 首先对现有的非光滑力学模型进行了详细描述, 包括接触碰撞模型和摩擦模型; 然后系统地介绍了含间隙机构的建模方法、分析手段和参数设计; 进一步对含间隙铰链空间可展机构的非线性动力学特性进行简单介绍; 最后提出了空间可展机构非光滑动力学、稳定性及振动控制等方面亟待解决的若干问题. 期待本文的介绍对空间可展机构非光滑动力学系统的振动、稳定性与控制的深入研究具有一定的促进作用.

## 1 非光滑动力学模型

空间可展机构中存在着诸如碰撞振动、干摩擦黏滑振动等大量的非光滑动力学问题. 对于这类复杂的动力学问题, 首要解决的是如何来建立非光滑

2012-12-03 收到第 1 稿, 2012-12-20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (91216106, 50935002).

2) 曹登庆, 教授, 主要研究方向: 非线性动力学、航天器动力学与控制、结构动力学与振动控制. E-mail: dqcao@hit.edu.cn

系统的动力学模型. 对于空间可展机构, 非光滑动力学问题主要体现在含间隙铰接结构中的接触碰撞与摩擦, 下面主要对接触碰撞和摩擦的几类模型进行介绍和对比.

### 1.1 接触碰撞模型

由于间隙的存在, 在展开过程中铰链的运动副之间会发生相互接触和碰撞. 接触碰撞过程是一个相当复杂的过程, 表现出明显的非线性特征; 物体接触的相对速度、接触面的几何形状和材料属性以及接触持续时间等都与接触碰撞的描述紧密相关. 在对系统进行动态分析时, 用于描述这一过程的模型可以分为瞬时冲击模型、连续接触碰撞力模型和有限元模型.

#### (1) 瞬时冲击模型

这种模型假定碰撞物体为刚性体, 接触时间极短; 当冲击发生时速度的改变是瞬时的, 也就是说, 在非常短的时间间隔之内, 接触力迫使碰撞物的速度发生瞬间跳跃, 不考虑接触力持续时间和作用过程; 碰撞过程分为压缩和恢复 2 个过程, 不能直接通过碰撞力和碰撞加速度确定碰撞动力学过程, 因此在计算中必须依赖于其对时间的一次积分形式即碰撞力冲量和系统广义速度来描述碰撞前后的运动学关系; 在碰撞过程中只考虑能量的损失, 根据恢复系数和动量守恒定理来确定碰撞前后的瞬时速度关系<sup>[10]</sup>.

Newton 和 Poisson 根据这种瞬时冲击模型分别以碰撞前后速度关系和碰撞过程中的动量关系建立了经典的 Newton 碰撞定律和 Poisson 碰撞定律<sup>[11]</sup>. 由于这种模型在计算时不必考虑碰撞力与时间的关系, 也不需要积分运算, 计算效率较高, 因此在大型多刚体系统碰撞动力学仿真中得到了广泛应用<sup>[12-13]</sup>.

但是, 瞬时冲击模型中的恢复系数被认为是只与碰撞物体材料性质相关的常数, 其数值一般依赖于实验, 缺乏完备的理论来支持. 在处理 Coulomb 干摩擦的平面或者空间多刚体碰撞问题时, 人们发现在一定的参数条件下, 可能会引起系统动力学方程出现不协调现象, 如 Kane 动力学之谜等问题<sup>[14-15]</sup>. 另外, 瞬时冲击模型不能描述碰撞力随时间的变化规律, 但是在空间可展机构的实际应用中, 碰撞力大小和变化过程直接影响到系统的动力学响应, 因此这种模型存在较大的局限性.

#### (2) 连续接触碰撞力模型

这一类模型考虑碰撞过程中接触面的局部变形, 并假设接触碰撞力是由碰撞体的局部接触变形产生的. 将物体间的嵌入量和嵌入速度作为碰撞力的计算参数, 以弹性恢复力和阻尼力构成的单元代替接触区域复杂变形<sup>[16-17]</sup>, 即将接触力等效成一个弹簧与阻尼并联的模型, 如图 1 所示. 利用弹簧模拟接触的弹性变形, 阻尼器模拟接触过程中的能量损失. 因此, 法向接触力  $F_n$  是由与局部变形有关的弹性力  $F_e$  和碰撞速度有关的阻尼力项  $F_c$  组成.

$$F_n = F_e + F_c \quad (1)$$

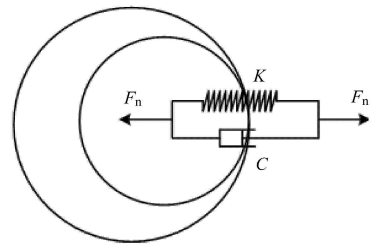


图 1 等效弹簧阻尼模型

Fig. 1 Spring-damper contact model

这类模型可以描述接触碰撞中压缩和恢复过程, 而且考虑了碰撞过程中接触力的大小和接触碰撞的时间历程.

国内外学者对于连续接触碰撞力模型开展了大量的研究, 已经提出了一系列不同的接触碰撞力模型, 大体上可以分为线性弹簧阻尼模型和非线性弹簧阻尼模型 2 种. 其中线性弹簧阻尼接触力模型中以 Kelvin-Voigt 线性弹簧阻尼模型<sup>[18-19]</sup>为代表, 该模型由线性弹簧和阻尼器并联而成, 其接触力定义为

$$F_n = K\delta + C\dot{\delta} \quad (2)$$

式中,  $\delta$  为 2 个物体沿接触面法向的相对压入量,  $\dot{\delta}$  为相对压入速度,  $C$  表示接触阻尼系数,  $K$  表示接触刚度. 采用 Kelvin-Voigt 线性弹簧阻尼模型分析接触碰撞比较简单方便, 但是由于该模型采用线性弹簧阻尼, 仍存在局限性, 主要表现在: 接触碰撞力在碰撞开始时不连续, 除此之外, 在计算阻尼力时与实际情况也存在偏差, 如碰撞恢复时, 阻尼力与弹性力之和可能会小于零<sup>[20]</sup>.

非线性弹簧阻尼接触力模型大多是基于 Hertz 接触理论建立的. 基于完全弹性变形, 该理论对弹性体接触问题给出了完备的分析模式, 主要研究弹性体准静态接触问题. Hertz 接触力模型<sup>[21]</sup> 可以用

一个非线性弹簧来描述, 其接触力公式为

$$F_n = K\delta^n \quad (3)$$

式中,  $\delta$  为弹性变形量, 接触刚度系数  $K$  可以描述为

$$K = \frac{4}{3\pi(h_1 + h_2)} \sqrt{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

其中,  $h_i = 1 - \nu_i^2 / (\pi E_i)$  ( $i = 1, 2$ ),  $E_1, E_2$  分别为两接触物体的弹性模量,  $\nu_1, \nu_2$  为其泊松比,  $R_1, R_2$  为 2 个物体接触处的局部曲率半径, 且接触力与变形量呈非线性关系。

Hertz 接触模型是基于纯弹性理论的, 没有考虑接触碰撞过程中的能量损耗, 所以不能反映含间隙铰接结构中接触碰撞过程的能量损失<sup>[22]</sup>。但是对于低速碰撞的非协调接触, 却能较好地近似估计接触过程中的接触力。

为了解决含间隙铰链中由于接触碰撞引起的能量耗散问题, 大多数的研究者通过引入描述碰撞过程中能量损失的阻尼项, 进而得到碰撞力与嵌入量及接触点相对速度的关系。Dubowsky 等<sup>[23-24]</sup> 基于 Hertz 理论用线性弹簧和等效线性黏滞阻尼来表示平面转动副的接触力。Hunt 等<sup>[25]</sup> 和 Herbert 等<sup>[26]</sup> 认为含间隙运动副中接触碰撞力应和相对位移的  $n$  次方成正比, 非线性弹簧接触力模型被越来越多的学者认可。基于 Hertz 接触理论, Hunt 和 Crossley<sup>[25]</sup> 提出了非线性弹簧阻尼模型。在接触碰撞开始时, Hunt-Crossley 模型的碰撞力是连续的, 并考虑了接触过程中的能量损失, 其碰撞力与变形的非线性关系为

$$F = K\delta^n + \eta\delta^n \dot{\delta} \quad (4)$$

式中, 接触阻尼因子  $\eta$  与恢复系数有关,  $n$  表示变形量的指数系数, 根据不同的几何形状,  $n$  取不同的值。

Lankarani 等<sup>[27]</sup> 在 Hunt-Crossley 研究工作的基础上, 建立了 Lankarani-Nikravesh (L-N) 连续接触力模型, 提出通过物体碰撞前后动能损失来确定  $\eta$ 。假设物体质量为  $m$ , 在碰撞前后能量损失  $\Delta U$  为

$$\Delta U = \frac{1}{2} m v_0^2 (1 - e^2) \quad (5)$$

其中,  $e$  为碰撞恢复系数,  $v_0$  为碰撞时的初始速度。碰撞前后能量损失  $\Delta U$  也等于接触力在滞后环内所做的功

$$\Delta U = \oint C \delta \dot{\delta} \approx \frac{2}{3} \frac{\eta}{K} m v_0^3 \quad (6)$$

因此, 由方程 (5) 和 (6) 得到

$$\eta = \frac{3(1 - e^2)K}{4v_0} \quad (7)$$

由于在推导式 (7) 的过程中假设其恢复系数接近于 1, 因此这一模型只适用于恢复系数较大的情况, 而无法表示小的恢复系数情况。由于该模型能够反映接触碰撞过程中的能量损失行为, 并且全面的包含了碰撞物体的材料属性、局部变形、碰撞速度等信息, 因此国内外学者广泛地应用该模型对含间隙机构动力学进行分析与研究。

为了克服 L-N 模型中恢复系数的局限性, 秦志英<sup>[28]</sup> 对该方程作了进一步改进, 得到如下接触阻尼与恢复系数之间的关系式

$$\eta = \frac{3(1 - e^2) \exp[2(1 - e)]}{4v_0} K \quad (8)$$

Yigit 等<sup>[29]</sup> 的研究结果表明: 相互接触的阻尼力不仅与相对压入速度  $\dot{\delta}$  有关, 也与接触压入深度  $\delta$  有关, 其法向接触力应表示为

$$F_n = K\delta^n + 0.75CK\dot{\delta}\delta, \quad n \geq 1 \quad (9)$$

实际铰链机构中的间隙很小, 一般小于直径的 1/100, 具体数值视直径大小和精度而定。所以, 尽管接触变形可能很小, 但是接触区域较大。而 Hertz 接触模型只适用于间隙较大且法向接触力较小的情况。因此, Bai 等<sup>[30]</sup> 在 Liu 等<sup>[31]</sup> 的研究成果的基础上提出了适用于小间隙的非线性接触刚度的数学模型

$$K = \frac{1}{8} \pi E' \sqrt{\frac{2\delta[3(R_1 - R_2) + 2\delta]^2}{(R_1 - R_2 + \delta)^3}} \quad (10)$$

其中,  $E'$  为两物体的组合弹性模量, 由下式确定

$$\frac{1}{E'} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \quad (11)$$

此外, 还有一些学者基于 L-N 接触碰撞模型对含间隙铰链的动力学特性开展了进一步的研究<sup>[32-38]</sup>。

### (3) 有限元模型

随着有限元法在处理动力学问题中逐渐凸显的优越性, 越来越多的学者利用接触有限元法来求解接触碰撞问题<sup>[39]</sup>。事实上, 由于接触碰撞问题的复杂性, 解析解法仅能够处理一些几何形状和边界条件较为简单的问题, 对于复杂形状和边界的接触碰撞问题必须依赖于有限元等数值方法<sup>[12]</sup>。有限元方法可以充分地考虑接触碰撞过程中的局部变形, 建立碰撞体接触后的动态边界条件, 进而计算接触碰

撞过程中碰撞力的时间历程与空间分布规律. 因此, 该方法对接触碰撞问题的处理更符合弹性体接触碰撞的物理本质, 并克服了前两种模型的缺点, 避免了连续接触碰撞力模型中选取参数的困难, 以及动量平衡法不能获得接触过程中碰撞力的问题, 较前两种模型更加精确<sup>[40]</sup>.

由于有限元方法处理接触过程的繁杂性和计算效率等原因, 使这种方法的应用受到了一定的局限. Liu等<sup>[31]</sup>结合补偿法和Lagrange法, 提出了一种更为高效准确的方法, Lagrange补偿方法, 这种方法中拉格朗日乘子不再被作为未知量, 而是通过迭代计算预设定的时间历程内的嵌入量来确定; 而嵌入量可以直接进行控制, 因此补偿条件也不需要判断. Brutti等<sup>[41]</sup>通过将接触碰撞边界等效为弹簧阻尼单元进行简化, 这种方法可以使计算速度大幅提高. 还有一部分学者致力于应用有限元方法对含间隙铰接结构建模精确性和高效性的研究<sup>[42-48]</sup>.

## 1.2 摩擦模型

由于空间可展机构大多工作在真空环境中, 使得铰链中运动副表面吸附的气体、污染物或氧化膜会被部分或全部去除, 导致运动副清洁表面直接接触, 在运动过程中产生干摩擦. 早在1931年Den Hartog<sup>[49]</sup>就提出了描述滞后非线性的最简单理想干摩擦模型, 其表达式为

$$F = F_f \operatorname{sgn}(v) = \mu F_N \operatorname{sgn}(v) \quad (12)$$

其中,  $F_N$  为正压力,  $\mu$  为摩擦系数,  $v$  为相对速度. 摩擦力总是阻碍运动, 与运动速度  $v$  相反, 其大小为常值. 干摩擦力  $F$  与位移的关系如图2所示, 其中图2(b)的矩形面积即是一个周期内损耗的能量.

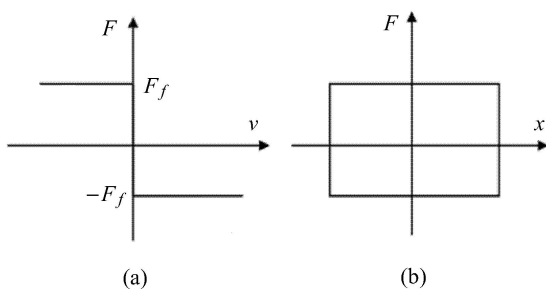


图2 干摩擦理想模型

Fig. 2 Dry friction model

Den Hartog模型表达了理想的干摩擦状况, 而实际上接触点本身有一定的弹性, 当外力小于干摩擦力的时候, 接触界面处仍有变形. 此外, 当接触面相

对滑动时其表面之间存在黏着现象, 接触面上的干摩擦力不是常量. 显然, Iwan<sup>[50]</sup>提出的双线性滞后模型(如图3所示)更能体现这种摩擦机理.

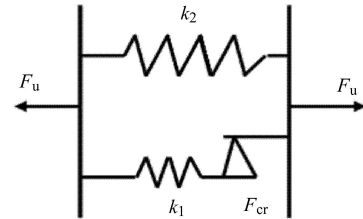


图3 双线性干摩擦理想模型

Fig. 3 Dry friction bilinear model

从图3可以看出, 该模型采用一个弹簧和另一个弹簧-库伦摩擦单元组成的并联模型. 因此, 2个接触面的相对变形量可以表示为

$$x = \begin{cases} \frac{F_u}{k_1 + k_2}, & k_1 x < F_{cr} \\ \frac{F_u - F_{cr}}{k_2}, & k_1 x = F_{cr} \end{cases} \quad (13)$$

根据方程(13)可以得到双线性干摩擦理想模型的滞回曲线, 如图4所示.

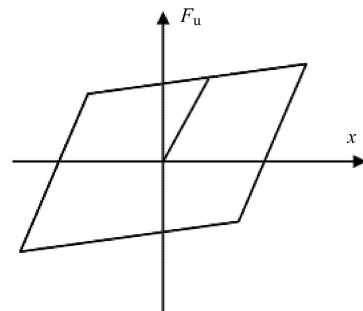


图4 双线性滞回线

Fig. 4 Hysteresis curve of bilinear model

该模型对滞回线有一定的近似, 而且形式简单, 需要辨识的物理参数少, 物理意义明确. 但是, 这一理论认为静摩擦和动摩擦系数相等且为常数, 而早期实验研究结果<sup>[51]</sup>证实实际接触表面之间的摩擦系数也具有非线性, 其中Stribeck模型<sup>[52]</sup>就是反映摩擦系数与速度相关的非线性数学模型

$$\mu(v) = -\mu_s \operatorname{sgn}(v) + k_1 v - k_2 v^3 \quad (14)$$

式中,  $k_1 = \frac{3(|\mu_s| - |\mu_m|)}{2|v|}$ ,  $k_2 = \frac{1(|\mu_s| - |\mu_m|)}{2|v_m|^3}$ ,  $v$  为相对速度,  $\mu_s$  为最大静摩擦系数,  $\mu_m$  为最小动摩擦系数,  $v_m$  为最小动摩擦系数对应的速度值. 此外, 文献

[53] 提出了与速度相关的动摩擦系数的另一种表达形式

$$\mu = \mu_s + \alpha |v| \quad (15)$$

式中,  $\mu_s$  为静摩擦系数,  $\alpha$  为阻尼系数.

Dahl<sup>[54]</sup> 根据应力-应变曲线关系提出了微分形式的动态摩擦模型. 假设相对位移为  $x$ , 库仑摩擦力为  $F_c$ , Dahl 模型的表达式为

$$\frac{dF_u}{dt} = \sigma \left[ 1 - \frac{F_u}{F_c} \operatorname{sgn}(v) \right]^\alpha v \quad (16)$$

其中,  $F_u$  为动态摩擦力;  $\sigma$  为刚度系数;  $\alpha$  是由应力-应变曲线确定的参数, 通常  $\alpha = 1$ .

Canudas 等<sup>[55]</sup> 结合 Dahl 模型<sup>[54]</sup> 和鬃毛模型<sup>[56]</sup> 的思想, 从微观角度提出了 LuGre 模型<sup>[40-55]</sup> (如图 5 所示).

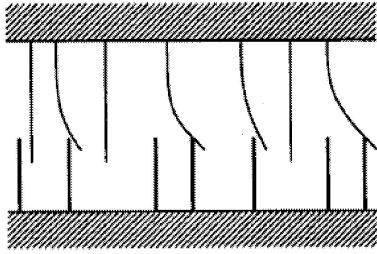


图 5 LuGre 摩擦模型

Fig. 5 LuGre friction model

由于接触面在微观尺度上是不规则且粗糙的, 实际接触过程中仅有部分接触, 因此假设接触表面通过一些弹性鬃毛相接触 (如图 5 所示). 当接触面相对移动时, 鬃毛产生弹性变形, 其摩擦力大小为

$$\left. \begin{aligned} F_u &= K_0 z + C_1 \frac{dz}{dt} + C_2 v \\ \frac{dz}{dt} &= v - \frac{|v|}{g(v)} z \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

其中, 状态变量  $z$  为鬃毛的平均挠度;  $v$  表示 2 个接触面之间的相对速度,  $K_0$  为鬃毛平均刚度系数;  $C_1$  为阻尼系数;  $C_2$  为摩擦系数;  $g(v)$  是表征 Stribeck 效应的函数, 可表示为

$$K_0 g(v) = F_c + (F_s - F_c) e^{-(v/v_s)^2} \quad (18)$$

式中,  $v_s$  表示 Stribeck 速度,  $F_c$  为库仑摩擦力,  $F_s$  为静摩擦力. 该模型能够有效描述诸多摩擦现象, 如包括库仑摩擦、黏性摩擦、预滑动、可变静摩擦力、Stribeck 效应和摩擦滞后等, 并已经得到了广泛的应用<sup>[56-62]</sup>.

Swevers 等<sup>[63]</sup> 认为 LuGre 模型不能充分表现迟滞现象. 因此, 基于 LuGre 模型提出了 Leuven 模型

$$\left. \begin{aligned} F_u &= F_h(z) + C_1 \frac{dz}{dt} + C_2 v \\ \frac{dz}{dt} &= v \left[ 1 - \operatorname{sgn} \left( \frac{F_d(z)}{s(v) - F_b} \right) \left| \frac{F_d(z)}{s(v) - F_b} \right|^n \right] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

其中,  $n$  为过渡曲线的系数;  $F_h(z)$  为迟滞力,  $F_b$  是在速度反向时过渡曲线的起始位置;  $F_d(z)$  反映一定时间内产生的过渡曲线;  $s(v)$  表示常速度下的摩擦行为, 其表达式为

$$s(v) = \operatorname{sgn}(v) [F_c + (F_s - F_c) e^{-(v/v_s)^6}] \quad (20)$$

除了以上介绍的几种典型的摩擦模型外, 还有其他的摩擦模型如广义 Maxwell 模型、弹塑性摩擦模型、积分摩擦模型以及随机摩擦模型等, 这几种模型大多由于计算复杂或者工程针对性太强, 因此在实际应用中存在很大的局限性, 详细介绍请参阅相关文献<sup>[64-67]</sup>.

## 2 带间隙铰链机构的非光滑动力系统研究

### 2.1 含间隙铰链机构的动力学建模

建立准确有效的动力学模型, 是分析含间隙铰链机构动力学特性的重要基础. 早在 20 世纪 70 年代初期开始, 国内外学者就对含间隙机构的动力学问题进行了系统的研究. 纵观以往在这方面的研究工作, 按照不同假设条件, 含间隙机构的动力学建模方法主要可以归纳为以下 3 类:

#### (1) 二状态模型

这种模型假设在运动过程中, 铰链中的运动副之间只存在接触和分离 2 种状态, 对其研究也仅按照接触状态和分离状态进行研究. 1971 年, Dubowsky 等<sup>[23,68]</sup> 基于 Hertz 理论和阻尼函数的运动副间隙模型并结合牛顿定律, 提出了一维冲击副模型, 随后又提出了一维冲击杆模型<sup>[24]</sup> 和二维冲击环模型<sup>[69]</sup>, 进而基于二状态模型作了相当多的研究, 取得了丰硕的研究成果, 并形成了一套比较完整的体系<sup>[70-71]</sup>. 因为该方法在建模过程中考虑了接触表面的弹性和阻尼, 所以该模型简单且比较符合含间隙运动副的实际情况, 在一般情况下也有较好的精度, 已在含间隙机构动力学分析中得到应用<sup>[72-74]</sup>.

但是, 基于该模型对含间隙机构进行计算时, 必须时刻监测运动副元素的相对运动关系, 进一步确定运动副构件的运动状态, 也即分析含间隙运

动副是处于接触状态还是分离状态,因此计算过程比较复杂<sup>[75]</sup>.

### (2) 三状态模型

该模型将运动副元素间的相互关系分为接触状态、自由运动状态和碰撞状态<sup>[76]</sup>.三状态模型能够较真实地反映间隙的实际情况.根据该模型研究含间隙铰链的动力学特性时,需应用积分形式的拉格朗日方程、接触碰撞的约束方程和恢复系数等.该模型的缺点在于其发生碰撞的时间难以确定,导致建模比较复杂,只能通过冲量来衡量机构运行过程中间隙运动副元素间的冲击程度,不能直接获得运动副间隙接触碰撞力;另外该模型在数值计算时求解不稳定,难以应用在多含间隙机构动力学分析中.

基于三状态模型,Soong等<sup>[77]</sup>通过实验研究发现,销轴和销孔碰撞后还要经历一个不断减小的碰撞过程,之后进入相互保持接触状态,这个过程被称为过渡过程.他们将间隙运动副元素的相对运动过程分为分离、碰撞、过渡和接触过程4个状态,并利用拉格朗日方程建立了含间隙系统的动力学模型.通过引入过渡过程,间隙模型更加符合含间隙机构运动副的实际运动情况,使得含间隙机构运动副元素之间的相对运动关系更加精细.

### (3) 连续接触模型

Earles等<sup>[16]</sup>在20世纪70年代初提出了连续接触模型.由于运动副间隙通常很小,运动副间的接触与碰撞时间都非常短暂,因此假设运动副之间主要是处于接触状态,并且假定接触表面没有变形,将含间隙运动副的机构转化为无间隙多自由度机构.由于该模型可以较方便地得到含间隙机构的稳态解,并可用来分析多间隙机构的动力学特性,因此一些研究基于该模型展开<sup>[78-79]</sup>.但是连续接触模型也存在着缺点,它忽略了运动副元素接触表面的弹性变形,因此不能真实反映含间隙机构运动副的接触碰撞特性<sup>[80]</sup>.

在含间隙铰链机构的动力学建模中,由于间隙的存在,系统成为变拓扑结构,并导致运动过程中含有接触和碰撞过程.Lagrange方法是目前应用最广泛的方法之一,把整个系统看作统一的对象,以能量观点建立基于广义坐标的动力学方程,避开了力、速度、加速度等矢量的复杂运算,且拉格朗日方法适用于多约束的处理,并且通过Lagrange乘子可以得到多体系统体间的约束反力<sup>[12]</sup>.采用拉格朗日方法,含间隙铰链机构多体系统的动力学方程可以表

示为<sup>[81]</sup>

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \boldsymbol{\phi}^T\boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{F} + \mathbf{F}_C \\ \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}, t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为广义坐标列阵, $\mathbf{M}$ 为机构的广义质量阵, $\mathbf{C}$ 为广义阻尼阵, $\mathbf{K}$ 为广义刚度阵, $\boldsymbol{\phi}$ 为约束方程的雅克比矩阵, $\boldsymbol{\lambda}$ 为Lagrange乘子列阵, $\mathbf{F}$ 为广义力阵, $\mathbf{F}_C$ 为间隙约束力阵.

## 2.2 动力学分析与参数设计

从含间隙铰链系统动力学建模方法的介绍可以看出,由于间隙的存在使得运动副在运动过程中发生相互碰撞、摩擦<sup>[82]</sup>等大量复杂的非光滑因素.大多数的含间隙铰链系统都属于多参数系统,参数的变化将会引起动力学响应的本质变化,不仅存在着多种周期运动,而且随着参数的变化会出现各种分岔(如周期倍化分岔、Hopf分岔等)、混沌等非线性动力学现象<sup>[83]</sup>.系统呈现出不连续性和强非线性,其动力学性质的变化往往具有突变性.而安装误差、元件老化、运行中的正常磨损等因素可能导致系统不能正常运行或失稳.目前,含间隙铰链系统动力学研究方法主要分为解析方法和基于定量分析的数值解法.

解析方法一般通过将非光滑动力学系统处理成光滑动力学系统,借鉴光滑化动力学系统的分析方法来研究非光滑动力学系统<sup>[84]</sup>;或者将间隙铰链系统处理成具有弹性约束的分段光滑系统也是一种较为可行的方法<sup>[13]</sup>.在此基础上,通过Poincaré截面<sup>[85-86]</sup>、中心流形和范式方法<sup>[87]</sup>等分析周期运动的分岔行为.

对于分段光滑系统,基于定量分析的数值解法已较为成熟<sup>[88]</sup>,如接缝法<sup>[89]</sup>、打靶法<sup>[90]</sup>、谐波平衡法<sup>[91]</sup>及放松向量场光滑性的方法<sup>[92]</sup>等,详见文献<sup>[93]</sup>.对含间隙铰链的动力学系统,其研究手段主要还是借助非线性振动理论基础上的数值解法.

此外,由于可展机构运动中的摩擦所产生的stick-slip运动和摩擦碰撞振动的解析方法求解是十分困难的,即便是采用数值方法,其数值稳定性的研究也是一个难点.目前主要的处理方法是把黏滞阶段处理为一个相对速度为0的小邻域,或去掉静摩擦把表征摩擦力方向的符号函数光滑化处理<sup>[94-95]</sup>.围绕以上方法,对含间隙机构非线性特性开展了广泛的相关研究工作<sup>[96-97]</sup>.

含间隙铰链空间可展机构的动力系统是多参数高维系统, 对于其间隙效应的控制与稳定是工程应用中必须解决的问题. 这方面的理论研究尚在发展中, 其主要控制方法是通过施加约束使运动副之间充分接触, 避免间隙的产生. 目前采取的主要方法有:

### (1) 间隙的优化设计

由于含间隙铰链中的间隙是诱发系统产生非光滑动力学问题的主要原因, 较小的间隙容易导致混沌的产生, 而间隙较大则会导致系统振动幅度、碰撞力的增大. 因此间隙的设计是含间隙铰链系统动力学设计的关键所在.

Wang 等<sup>[38]</sup>将铰链间隙和接触侵入量作为可调参数, 对含间隙铰链系统进行了参数化分析, 发现系统存在一个“约束带”, 在这个范围内摩擦系数和恢复系数对系统的接触嵌入深度影响很小, 因此存在一个最佳间隙设计值. 如 Moon 等<sup>[98]</sup>通过含间隙的空间桁架的振动实验研究, 设置预紧拉索, 调节间隙, 从而可有效抑制系统的运动. 另外还有一些学者通过对间隙做参数空间的稳健性分析<sup>[99-100]</sup>, 设计影响间隙的 2 个重要参数: 轴径容差和轴套公差, 从而达到振动控制的目的.

### (2) 间隙铰润滑

从一些关于在铰链间隙中施加润滑后的动力学分析<sup>[21,42,45,101]</sup>可以看出, 被润滑过的铰链的最大碰撞力幅值明显降低且更为平滑, 而且最大振动位移也明显减小, 摩擦力和磨损量也会降到非常低的程度, 因此油膜起到了振动控制的作用. 但油膜润滑对于太空作业的空间可展机构来说存在一些局限性, 例如: 低重力、真空等. 因此一些学者提出在轴套涂胶<sup>[101]</sup>等方案, 从而使相应的问题得到解决.

### (3) 机构加配重或施加控制力

机构增加配重是含间隙铰链的一种辅助振动控制手段, 文献<sup>[102-104]</sup>采用重新分配杆件质量或者外加恒定弹性力的方法, 使得运动副之间始终保持压紧状态. 由于有可能增加重量的缘故, 这种方法一般作为空间可展机构振动控制的辅助手段.

另外还有一些学者致力于含间隙铰链系统的控制算法和控制优化方面的研究, 提出了自适应控制<sup>[85]</sup>、Pyragas 法混沌吸引子控制<sup>[105]</sup>、快速 PID 主被动混合控制<sup>[101]</sup>、前馈转矩 - PID 反馈综合控制法<sup>[106]</sup>等, 以期能够有效地提高控制效率.

## 3 含铰链空间可展机构的动力学特性研究

铰链是空间结构实现在轨展开、组装过程的主要运动部件, 例如目前在航天领域中最常见的是太阳翼展开驱动机构. 太阳翼通过根部铰链与航天器本体连接, 多个太阳翼板通过板间铰链相互连接. 此外铰链在大型空间伸展结构中应用也较广泛, 例如铰链连接的空间桁架结构. 文献<sup>[107]</sup>研究了铰链间隙对太阳帆板展开过程的影响, 对一单翼小卫星太阳帆板 (如图 6 所示) 展开过程进行了动力学分析.

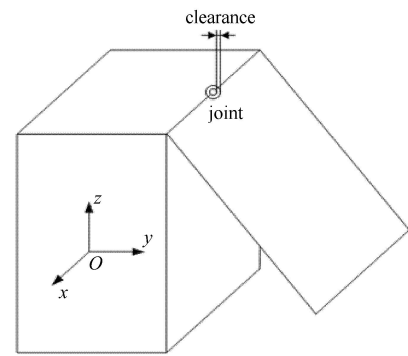


图 6 含间隙航天器结构

Fig. 6 Sketch map of spacecraft system with clearance

文献<sup>[107]</sup>的研究结果表明: 铰链间隙对卫星姿态角速度影响较明显, 在帆板展开初期由于间隙的存在出现大的抖动, 之后姿态角速度围绕理想状态角速度出现明显的抖动. 间隙对卫星本体姿态运动及帆板展开过程中姿态角速度的影响如图 7 所示, 说明姿态角速度对于间隙较为敏感.

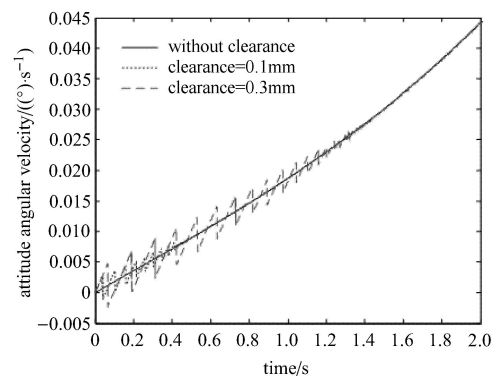


图 7 航天器姿态角速度

Fig. 7 Attitude angular velocity of spacecraft

含铰链空间可展机构多体系统不可避免存在铰链间隙, 虽然可以通过提高加工精度使单个铰链的间隙尽可能小, 但是众多铰链微小间隙的积累使得

结构具有很强的非线性特性,甚至使理想结构的动力学特性发生很大的改变.因此研究含间隙铰链空间可展机构的非线性动力学特性具有重要的理论意义和工程意义.

近年来,国内外一些科研机构逐步认识到含间隙铰链机构的非光滑特性研究对空间结构动力学特性的重要性,逐渐开展了系统参数对动态特性的影响规律的研究,对分岔与混沌等非线性动力学行为的引发机制进行了分析.

铰链间隙是导致空间可展机构非光滑的主要因素,因此大多数关于空间可展机构的非线性特性研究是围绕铰链间隙开展的<sup>[108]</sup>.众多的研究结果表明,由于间隙的存在会导致系统出现接触碰撞和摩擦现象,使系统出现谐波共振现象<sup>[47]</sup>.

当间隙发生变化时,周期解的个数及稳定性将发生变化,产生所谓的分岔现象.系统存在众多的分岔类型,如叉式分岔<sup>[93]</sup>、倍周期分岔<sup>[83]</sup>、擦边分岔<sup>[36]</sup>、Hopf分岔<sup>[11]</sup>等.与光滑系统相比,这种非光滑系统的分岔现象更为复杂,很多情况下并不像光滑系统那样由周期运动的渐变多次分岔形式最终导致混沌(如周期运动—倍周期—混沌),非光滑系统对参数和初值更为敏感,容易出现阵发性混沌现象<sup>[37]</sup>(如周期运动—混沌—周期运动),由于这种现象发生的比较频繁,对周期运动稳定性的分析方法提出了更高的要求.另外,由于接触碰撞和摩擦的原因会导致铰链的磨损,而间隙也会伴随磨损而发生改变,这种耦合关系也使得含间隙铰链空间可展机构的非线性动力学现象更为复杂<sup>[109-110]</sup>.系统存在碰撞和摩擦而导致的不连续性和非光滑性,不仅使系统的动力学行为复杂,而且也使一些常规的分析方法失效,如全局稳定流形定理等经典光滑动力系统的分析方法,详见文献<sup>[11]</sup>.

除此之外,其他一些系统参数也会对空间可展机构的动力学特性造成重要影响,例如:含间隙铰链运动副中的动/静摩擦系数<sup>[111]</sup>、机构连杆的长度和弹性系数<sup>[88]</sup>、连杆展开过程中的转动方向和展开速度<sup>[5,22]</sup>、重力场方向和大小<sup>[44,82]</sup>等都会使系统的动力学特性发生相应的改变.

## 4 研究展望

由于铰接机构中间隙铰的存在引起的接触、摩擦和碰撞等非光滑因素,可导致空间可展机构成为十分复杂的非光滑动力系统.虽然对含间隙空间可

展机构的动力学特性研究已经取得了一些阶段性成果,但是对于指导实际工程应用方面还亟需从以下几个方面进行深入研究.

### 4.1 含间隙铰链的非线性特性研究

铰链是空间可展机构非线性行为的主要诱因,针对其应用的空间环境,如何处理好其间隙等非光滑因素带来的影响,还须解决以下几个问题:

(1) 真空环境对其性能的影响.由于在真空环境中,运动副表面吸附的气体、污染物或氧化膜会被部分或全部去除,使得清洁表面直接接触,形成接触表面的强烈黏着,这对接触表面的接触摩擦特性将有较大影响.

(2) 精确铰链间隙模型的建立.目前,间隙模型大多采用Dubowsky接触变形模型,此种模型的前提是铰链的2个构件是“点-点”接触或是“点-面”接触,而在实际的工程中接触方式则是“面-面”接触,并且2个构件间隙极小,这将会造成建模的不准确.另外,通常都不考虑接触面的切向变形的影响,这也会带来误差.因此如何建立更符合实际的间隙模型是值得探讨的.

(3) 接触力的确定.运动副在分离和碰撞过程中,接触力的大小大都是基于理想接触面来确定的,而实际结构中的接触表面和理想接触表面有较大差异;此外,实际接触力和相对位移、相对速度、运动副几何形状以及材料性质等多种因素有关.因此,如何精确描述和测量碰撞力是对其精确建模必须要解决的问题.

(4) 弹-塑性接触问题:关于可展开机构的现有接触模型,大部分假定运动副在接触碰撞过程中只发生弹性变形,较少考虑发生塑性变形.显然,当空间可展机构有高定位精度要求时,这种近似处理略显粗糙,现有的弹性模型已不能满足分析需要.今后的研究中可以借鉴在机械系统中弹-塑性接触模型,并将其引入到空间可展机构分析中来.

### 4.2 可展机构的动力学建模

空间可展机构大部分是由多个刚体和/或柔性体组合而成,加上连接部件的间隙和其他非线性特性,至今尚没有统一有效的动力学建模方法,尚需开展的研究工作包括:

(1) 含间隙的空间多刚/柔体系统的精确动力学建模方法,尤其是带柔性附件的柔性组合结构的动力学建模更是一个挑战性的难题;



(2) 对于实际空间可展机构中较间间隙的确定非常困难, 如何描述运动副之间的位置关系, 判定接触点的位置是其动力学建模要解决的一个难点;

(3) 可展机构运动副的接触碰撞是个随机的过程, 在动力学模型中如何反映这种随机性是动力学建模过程中的另一个难点.

除了动力学建模方法之外, 空间可展结构动力学模型的降维处理对于飞行器的姿态与结构振动的耦合控制是一个至关重要的问题.

### 4.3 可展机构动力学系统的稳定性与控制

含间隙的可展机构属于高度非光滑系统, 与光滑动力学系统相比较, 这类系统的动态响应更加丰富多彩, 也更容易产生分岔甚至混沌现象. 亟待解决的问题包括:

(1) 存在间隙的空间可展机构的机构运动与结构振动的耦合动力学分析;

(2) 间隙参数对系统动力学响应的影响规律, 这对于控制由间隙所引起的不良效应有着重要作用;

(3) 含间隙空间柔性结构的振动与稳定, 周期解分岔等复杂分岔行为和混沌响应分析;

(4) 带柔性空间可展机构的航天器的姿态运动与结构振动的耦合控制等.

### 参 考 文 献

- Jin M, Kazuhide A, Yumi S. Deployment analysis of large space antenna using flexible multibody dynamics simulation. *Acta Astronautica*, 2000, 47(1): 19-26
- Tana GEB, Pellegrino S. Nonlinear vibration of cable-stiffened pantographic deployable structures. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 314: 783-802
- Lopatin AV, Morozov EV. Modal analysis of the thin-walled composite spoke of an umbrella-type deployable space antenna. *Composite Structures*, 2009, 88: 46-55
- Birhanu FF, Chen ZB, Ma WS. Modeling and simulation of satellite solar panel deployment and locking. *Information Technology Journal*, 2010, 9: 600-604
- 阎绍泽, 申永胜, 陈洪彬. 考虑杆件柔性和较间隙的可展结构动力学数值模拟. 清华大学学报(自然科学版), 2003, 43(2): 145-148 (Yan Shaoze, Shen Yongsheng, Chen Hongbin. Dynamic performance of deployable structures with flexible members and clearance connections. *J Tsinghua Univ (Sci & Tech)*, 2003, 43(2): 145-148 (in Chinese))
- Folar CL, Tinker ML, Nurre GS, et al. Solar-array-induced disturbance of hubble telescope pointing system. *J Spacecraft and Rocket*, 1995, 32(4): 634-644
- 黄文虎, 曹登庆, 韩增尧. 航天器动力学与控制的研究进展与展望. 力学进展, 2012, 42(4): 367-394 (Huang Wenhui, Cao Dengqing, Han Zengyao. Advances and trends in dynamics and control of spacecrafts. *Advances in Mechanics*, 2012, 42(4): 367-394 (in Chinese))
- 王巍, 于登云, 马兴瑞. 航天器铰接结构非线性动力学特性研究进展. 力学进展, 2006, 36(2): 233-238 (Wang Wei, Yu Dengyun, Ma Xingrui. Advances and trends of non-linear dynamics of space joint dominated structure. *Advances in Mechanic*, 2006, 36(2): 233-238 (in Chinese))
- 阎绍泽. 航天器中含间隙机构非线性动力学问题及其研究进展. 动力学与控制学报, 2004, 2(2): 48-52 (Yan Shaoze. Development and problems of nonlinear dynamics of the mechanisms with clearances for spacecrafts. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(2): 48-52 (in Chinese))
- Schwab AL, Meijaard JP, Meijers P. A comparison of revolute joint clearance models in the dynamic analysis of rigid and elastic mechanical systems. *Mechanism and Machine Theory*, 2002, 37: 895-913
- 丁旺才, 谢建华. 碰撞振动系统分岔与混沌的研究进展. 力学进展, 2005, 35(4): 513-524 (Ding Wangcai, Xie Jianhua. Advances of research on bifurcations. *Advances in Mechanics*, 2005, 35(4): 513-524 (in Chinese))
- 董富祥, 洪嘉振. 多体系统动力学碰撞问题研究综述. 力学进展, 2009, 39(3): 352-359 (Dong Fuxiang, Hong Jiazhen. Review of impact problem for dynamics of multibody system. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(3): 352-359 (in Chinese))
- Flores P, Leine R, Glocker C. Modeling and analysis of planar rigid multibody systems with translational clearance joints based on the non-smooth dynamics approach. *Multibody Syst Dyn*, 2010, 23: 165-190
- Kane TR, Levinson DA. Dynamics: Theory and Applications. New York: Mcgraw-Hill, 1985. 231-241
- 韩维, 侯志强. 碰撞-振动系统动力学的研究进展. 海军航空工程学院学报, 2004, 19(5): 501-509 (Han Wei, Hou, Zhiqiang. Review on dynamics of the vibro-impact system. *Journal of Naval Aeronautical Engineering Institute*, 2004, 19(5): 501-509 (in Chinese))
- Earles SWE, Wu CLS. Motion analysis of a rigid-link mechanism with clearance at a bearing using Lagrangian mechanism and digital computation. In: Proceeding of Conference on Mechanisms, IME, London, England, 1972: 83-89
- Furuhashi T, Morita N, Matsuura M. Research on dynamics of four-bar linkage with clearances at turning pairs. *Bull JSME*, 1978, 21: 518-523
- Gilardi G., Sharf I. Literature survey of contact dynamics modeling. *Mechanism and Machine Theory*, 2002, 37: 1213-1239
- 金栋平, 胡海岩. 碰撞-振动及其典型现象. 力学进展, 1999, 29(2): 155-164 (Jin Dongping, Hu Haiyan. Vibro-impacts and their typical behaviors of mechanical systems. *Advances in Mechanics*, 1999, 29(2): 155-164 (in Chinese))
- Bai ZF, Zhao Y. A hybrid contact force model of revolute joint with clearance for planar mechanical systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2013, 48: 15-36
- Machado M, Moreira P, Flores P, et al. Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 53: 99-121
- Zhang LX, Bai ZF, Zhao Y, et al. Dynamic response of solar panel deployment on spacecraft system considering joint clearance. *Acta*

- Astronautica*, 2012, 81: 174-185
- 23 Dubowsky S, Freudenstein F. Dynamic analysis of mechanical systems with clearance, Part 1: Formation of dynamic model. *ASME Journal Engineering for Industry*, 1971, 93B: 305-309
- 24 Dubowsky S, Gardner TN. Dynamic interactions of link elasticity and clearance connections in planar mechanical systems. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 1975, 97B (2): 652-661
- 25 Hunt KH, Crossley FR. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics*, 1975, 42: 440-445
- 26 Herbert RG, Whannell DC. Shape and frequency composition of pulses from an impact pair. *Journal of Engineering for Industry*, 1977, 99: 513-518
- 27 Lankarani HM, Nikavesh PE. A contact force model with hysteresis damping for impact analysis of multibody systems. *ASME Journal of Mechanical Design*, 1990, 112: 369-376
- 28 秦志英, 陆启韶. 基于恢复系数的碰撞过程模型分析. 动力学与控制学报, 2006, 4: 294-298 (Qin Zhiying, Lu Qishao. analysis of impact process model based on restitution coefficient. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4: 294-298 (in Chinese))
- 29 Yigit AS, Ulsoy AG, Scott RA. Spring-dashpot models for the dynamics of a radically rotating beam with impact. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, 142 (3): 515-525
- 30 Bai ZF, Zhao Y. Dynamic behavior analysis of planar mechanical systems with clearance in revolute joints using a new hybrid contact force model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2012, 54: 190-205
- 31 Liu CS, Zhang K, Yang R. The FEM analysis and approximate model for cylindrical joints with clearances. *Mech Mach Theory*, 2007, 42: 183-197
- 32 Mishra BK, Murty CVR. On the determination of contact parameters for realistic DEM simulations of ball mills. *Powder Technology*, 2001, 115: 290-297
- 33 Mishra BK, Thornton C. An improved contact model for ball mill simulation by the discrete element method. *Advanced Powder Technology*, 2002, 13: 25-41
- 34 Ciavarella M, Decuzzi P. The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact 1: The case of elastic similarity. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38: 4507-4523
- 35 Ciavarella M, Decuzzi P. The state of stress induced by the plane frictionless cylindrical contact. 2: The general case (elastic dissimilarity). *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38: 4523-4533
- 36 Flores P, Koshy CS, Lankarani HM, et al. Numerical and experimental investigation on multibody systems with revolute clearance joints. *Nonlinear Dyn*, 2011, 65: 383-398
- 37 Muvengei O, Kihui J, Ikua B. Numerical study of parametric effects on the dynamic response of planar multi-body systems with differently located frictionless revolute clearance joints. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 53: 30-49
- 38 Wang X, Chen P. Planar Four-bar Mechanism Including Revolute Joints with Clearance. In: Proceeding of 2011 International Conference on Mechatronic Science, Electric Engineering and Computer, 2011. 19-22
- 39 Wang Y, Chen X, Gindy N, et al. Elastic deformation of a fixture and turbine blades system based on finite element analysis. *Int J Adv Manuf Technol*, 2008, (4): 79-96
- 40 Bograd S, Reuss P, Schmidt A, et al. Modeling the dynamics of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, 25: 2801-2826
- 41 Brutti C, Coglitore G, Valentini PP. Modeling 3D revolute joint with clearance and contact stiffness. *Nonlinear Dyn*, 2011, 66: 531-548
- 42 Olivier A, Bauchau, Rodriguez J. Modeling of joints with clearance in flexible multibody systems. *International Journal of Solids and Structures*, 2002, 39: 41-63
- 43 Ibrahimbegovi A, Mamouri S. On rigid components and joint constraints in nonlinear dynamics of flexible multibody systems employing 3D geometrically exact beam model. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2000, 188: 805-831
- 44 Li T, Guo J, Cao Y. Dynamic characteristics analysis of deployable space structures considering joint clearance. *Acta Astronautica*, 2011, 68: 974-983
- 45 Tian Q, Zhang Y, Chen L, et al. Dynamics of spatial flexible multibody systems with clearance and lubricated spherical joints. *Computers and Structures*, 2009, 87: 913-929
- 46 Erkaya S, Uzmay I. Effects of balancing and link flexibility on dynamics of a planar mechanism having joint clearance. *Scientia Iranica*, 2012, 19(3): 483-490
- 47 Li Z, Cai G, Huang Q, et al. Analysis of nonlinear vibration of a motor-linkage mechanism system with composite links. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 311: 924-940
- 48 Gummer A, Sauer B. Influence of contact geometry on local friction energy and stiffness of revolute joints. *Journal of Tribology*, 2012, 134: 1-9
- 49 Den Hartog JP. Forced vibrations with combined coulomb and viscous friction. *Transactions of the ASME*, 1993, 19: 107-115
- 50 Iwan WD. The Dynamics Response of Bilinear Hysteretic System. California: California Institute of Technology, 1961
- 51 Ernest R. The nature of the static and kinetic coefficients of friction. *Journal of Applied Physics*, 1951, 22(11): 1373-79
- 52 Stribeck R. Die wesentlichen eigenschaften der gleit-und rollenlager-the key qualities of sliding and roller bearings. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 1902, 46 (38-39): 1342-1348, 1432-1437
- 53 Rhee SK, Tsang PHS, Wang YS. Friction induced noise and vibration of disc brakes. *Wear*, 1989, 133: 39-45
- 54 Dahl P. Solid Friction Damping of Spacecraft Collations. Boston: Defense Technical Informant on Center, 1975
- 55 Canudas CW, Olsson H, Astrom KJ, et al. A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(3): 419-425
- 56 Haessig DA, Friedland B. On the modeling and simulation of friction. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 1991, 113(3): 354-362
- 57 Bona B, Indri M, Smaldone N. Nonlinear friction estimation for digital control of direct-drive manipulators. *Journal of Applied Mechanics*, 2003, 150(2): 171-176
- 58 Bona B, Indri M, Smaldone N. Rapid prototyping of a model-based control with friction compensation for a direct-drive robot. *IEEE*

- Transactions on Mechatronics*, 2006, 11: 576-584
- 59 Khayati K, Bigras P, Dessaint L-A. LuGre model-based friction compensation and positioning control for a pneumatic actuator using multi-objective output-feedback control via LMI optimization. *Mechatronics*, 2009, 19: 535-547
- 60 Olivier A, Bauchau, Changkuan J. Modeling friction phenomena in flexible multibody dynamics. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2006, 195: 6909-6924
- 61 Onesmus Muvengei, John Kihui, Bernard Ikuu. Dynamic analysis of planar multi-body systems with LuGre friction at differently located revolute clearance joints. *Multibody Syst Dyn*, 2012, 28: 369-393
- 62 陈剑锋, 刘昊, 陶国良. 基于 LuGre 摩擦模型的气缸摩擦力特性实验. 兰州理工大学学报, 2010, 36 (03): 55-59 (Chen Jianfeng, Liu Hao, Tao Guoliang. Experiment on friction characteristics of pneumatic cylinders base on LuGre model. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2010, 36(03): 55-59 (in Chinese))
- 63 Swevers J, Al-Blender F, Chris G. An integrated friction model structure with improved presiding behavior for accurate friction compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(4): 678-686
- 64 Lampaert V, Al-Bender F, Swevers J. A generalized Maxwell-Slip friction model appropriate for control purposes. In: Proceeding of IEEE International Conference on Robotics & Automation, Washington, 2003, 1170-1177
- 65 Al-Bender F, Lampaert V, Swevers J. The generalized maxwell-slip model: a novel model for friction simulation and compensation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1883-1887
- 66 Dupont P, Armstrong B, Hayward V. Elasto-plastic friction model: contact compliance and stiction. In: Proceeding of ACC2000, Chicago, 2000. 1072-1077
- 67 Ferretti G, Magnani G, Rocco P. Single multistate integral friction model. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2292-2297
- 68 Dubowsky S, Freudenstein F. Dynamic analysis of mechanical systems with Clearances. Part 2: Dynamic response. *Trans ASME, J Eng Ind*, 1971, 93 (1): 310-316
- 69 Dubowsky S, Gardner TN. Design and analysis of multilink flexible mechanisms with multiple clearance connections. *Trans ASME, J Eng, Ind*, 1977, 99B: 88-96
- 70 Dubowsky S, Norris M, Aloni E, et al. An analytical and experimental study of the prediction of impacts in planar mechanical systems with clearances. *Trans AMSE, J Mech Transmiss Automat Des*, 1984, 106(4): 444-451
- 71 Dubowsky S, Moening MF. An experimental and analytical study of impact forces in elastic mechanical systems with clearances. *Mechanism and Machine Theory*, 1978, 13: 451-465
- 72 Dubowsky S, Deck JF, Costello H. The dynamic modeling of flexible spatial machine systems with clearance connections. *Trans ASME, J Mech Transmiss Automat Des*, 1987, 109: 87-94
- 73 Funabashi H, Ogawa K, Horie M, et al. A dynamic analysis of the plane crank and rocker mechanisms with clearances. *Bulletin of the JSME*, 1980, 23(177): 446-452
- 74 李哲. 考虑运动副间隙和构件弹性的平面连杆机构动力学研究. [博士论文]. 北京: 北京工业大学, 1991 (Li Zhe. Research on dynamics of planar linkage mechanisms considering both bearing clearances and link elasticity. [PhD Thesis]. Beijing: Beijing University of Technology, 1991 (in Chinese))
- 75 白争锋. 考虑铰间间隙的机构动力学特性研究. [博士论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学工学, 2011 (Bai Zhengfeng. Research on dynamic characteristics of mechanism with joint clearance. [PhD Thesis]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2011 (in Chinese))
- 76 Miedema B, Mansour WM. Mechanical joints with clearance: a three-mode model. *Journal of Engineering for Industry*, 1976, 98: 1319-1323
- 77 Soong K, Thompson BS. A theoretical and experimental investigation of the dynamic response of a slider-crank mechanism with radial clearance in the gudgeon-pin joint. *Journal of Mechanical Design*, 1990, 112(2): 183-189
- 78 Li Z. A New Method of predicting the occurrence of contact loss in mechanisms with clearances. *Mechanism and Machine Theory*, 1992, 27(3): 295-301
- 79 Tsai MJ, Lai TH. Kinematic sensitivity analysis of linkage with joint clearance based on transmission quality. *Mechanism and Machine Theory*, 2004, 39: 1189-1206
- 80 Erkaya S, Uzmay I. Optimization of transmission angle for slider-crank mechanism with joint clearances. *Struct Multidisc Optim*, 2009, 37: 493-508
- 81 阎绍泽, 陈鹿民, 季林红等. 含间隙铰的机械多体系统动力学模型. 振动工程学报, 2003, 16(3): 290-294 (Yan Shaoze, Chen Lumin, Ji Linhong, Dynamic modeling of multibody system with clearance joints. *Journal of Vibration Engineering*, 2003, 16(3): 290-294 (in Chinese))
- 82 Kang J. Theoretical model of ball joint squeak. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330: 5490-5499
- 83 Chunmei J, Yang Q, Ling F, et al. The non-linear dynamic behavior of an elastic linkage mechanism with clearances. *Journal of Sound and Vibration*, 2002, 249(2): 213-226
- 84 Ulrich S, Sasiadek JZ, Barkana I. Modeling and direct adaptive control of a flexible-joint manipulator. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(1): 25-39
- 85 Kim YB. Stability and bifurcation analysis of oscillators with piecewise linear characteristics: a general approach. *Journal of Applied Mechanics*, 1991, 58(6): 545-553
- 86 卢绪祥, 刘正强, 黄树红等. 含间隙碰撞振动系统的非线性振动特性. 动力工程学报, 2012, 32(5): 387-393 (Lu Xuxiang, Liu Zhengqiang, Huang Shuhong, et al. Nonlinear vibration characteristics of a vibro-impact system with clearance. *Journal of Chinese Society of Power Engineering*, 2012, 32(5): 387-393 (in Chinese))
- 87 Ghorbel F, Spong MW. Integral manifolds of singularly perturbed systems with application to rigid-link flexible-joint multibody systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2000, 35: 133-155
- 88 Yan S, Guo P. Kinematic accuracy analysis of flexible mechanisms with uncertain link lengths and joint clearances. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2011, 225: 1973-1983
- 89 Natsiavas S, Begley CJ, Petersan PJ. On the seismic behavior of unanchored liquid containers. *ASME J Pres Ves Tech*, 1996, 118: 257-264

- 90 Reithmeier E. Nonlinear Dynamics in Engineering Systems. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1990. 249-256
- 91 Lau SL, Zhang WS. Nonlinear vibrations of piecewise-linear system by incremental harmonic balance method. *Journal of Applied Mechanics*, 1992, 59(1): 153-60
- 92 胡海岩. 高维非光滑动力系统的周期响应数值分析. 固体力学学报, 1994, 15(2): 235-145 (Hu Haiyan. Numerical analysis to periodic response of nonsmooth dynamic systems of high-dimension. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 1994, 15(2): 235-145 (in Chinese))
- 93 胡海岩. 分段光滑机械系统动力学的进展. 振动工程学报, 1995, 8(4): 331-341 (Hu Haiyan. Advances in dynamics of piecewise-smooth mechanical systems. *Journal of Vibration Engineering*, 1995, 8(4): 331-341 (in Chinese))
- 94 尉立肖, 刘才山. 圆柱铰间隙运动学分析及动力学仿真. 北京大学学报, 2005, 41(5): 679-686 (Wei Lixiao, Liu Caishan. Dynamic simulation and kinetic description of revolute joint with spatial clearance. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Pekinesis*, 2005, 41(5): 679-686 (in Chinese))
- 95 Flores P, Lankarani HM. Dynamic response of multibody systems with multiple clearance joints. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2012, 7: 1-13
- 96 吴德隆, 李海洋, 彭伟斌. 空间站大型伸展机构运动稳定性分析. 宇航学报, 2002, 23(6): 98-102 (Wu Delong, Li Haiyang, Peng Weibin. Motion stability analysis of large deployable structures in space station. *Journal of Astronautics*, 2002, 23(6): 98-102 (in Chinese))
- 97 张思进, 陆启韶. 碰摩转子系统的非光滑分析. 力学学报, 2000, 32(1): 58-69 (Zhang Sijin, Lu Qishao. A non-smooth analysis to the rub-impacting rotor system. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 32(1): 58-69 (in Chinese))
- 98 Moon FC, Li GX. Experimental study of chaotic vibrations in a pin-jointed space truss structure. *AIAA Journal*, 1990, 28(5): 915-921
- 99 Wang J, Zhang J, Du X. Hybrid dimension reduction for mechanism reliability analysis with random joint clearances. *Mechanism and Machine Theory*, 2011, 46: 1396-1410
- 100 Luo K, Wang JG, Du XP. Robust mechanism synthesis with truncated dimension variables and interval clearance variables. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 57: 71-83
- 101 Jin C, Fan L, Qiu Y. The vibration control of a flexible linkage mechanism with impact. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2004, 9: 459-469
- 102 Feng B, Morita N, Torii T. Optimization of joint force on planar linkage. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 1995, 61: 2725-2729
- 103 Fawcett JN, Burdett JS. Control of clearance effects in linkages. *Eng Materials and Design*, 1972, 16(1): 26-27
- 104 Shin JK, Kwak BM. A design method for reducing the effects of clearance at revolute joints. *Proc Instn Mech Engrs*, 1985, 199(2): 153-158
- 105 Olyaei AA, Ghazavi MR. Stabilizing slider-crank mechanism with clearance joints. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 53: 17-29
- 106 Liu C, Tian Q, Hu H. Dynamics and control of a spatial rigid-flexible multibody system with multiple cylindrical clearance joints. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 52: 106-129
- 107 白争锋, 赵阳, 田浩. 含铰间隙太阳帆板展开动力学仿真. 哈尔滨工业大学学报, 2009, 43(3): 11-14 (Bai Zhengfeng, Zhao Yang, Tian Hao. Dynamics simulation of deployment for solar panels with hinge clearance. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2009, 43(3): 11-14 (in Chinese))
- 108 Erkaya S. Investigation of joint clearance effects on welding robot manipulators. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2012, 28: 449-457
- 109 Flores P, Ambrosio J, Claro JCP, et al. A study on dynamics of mechanical systems including joints with clearance and lubrication. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41: 247-261
- 110 Flores P. Modeling and simulation of wear in revolute clearance joints in multibody systems. *Mechanism and Machine Theory*, 2009, 44: 1211-1222
- 111 Dupac M, Marghitu DB. Nonlinear dynamics of a flexible mechanism with impact. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, 289: 952-966

(责任编辑: 周冬冬)

## STUDY ON THE NON-SMOOTH MECHANICAL MODELS AND DYNAMICS FOR SPACE DEPLOYABLE MECHANISMS<sup>1)</sup>

Cao Dengqing<sup>\*,2)</sup> Chu Shiming\* Li Zhengfa<sup>\*,†</sup> Liu Rongqiang<sup>\*\*</sup>

*\*(The School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)*

*†(Shenzhen Academy of Aerospace Technology, Shenzhen 518057, China)*

*\*\* (State Key Laboratory for Robotics and System, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)*

**Abstract** The space deployable mechanism is widely used to develop and support the flexible solar array and payloads including parabolic antenna, plane phased array radar, and synthetic aperture radar in the aerospace engineering field. Non-smooth characteristics and the corresponding dynamic phenomena play a very important role in the design of space deployable mechanism. This paper reviews the state-of-art of non-smooth mechanical modeling and nonlinear dynamics for the space deployable mechanisms. First of all, the non-smooth properties such as the contact impact forces and friction models are elaborated for hinges with clearances. Then, the dynamical modeling methods, analytical approach, and parametric design are systematically presented for the mechanisms with clearances. Moreover, the nonlinear dynamic phenomena such as harmonic resonance, existence and stability of periodic motions, and various kinds of bifurcations are presented for the space deployable mechanisms whose joints are with clearances. Finally, directions for further works on the dynamics, stability and control for the non-smooth dynamical system of space deployable mechanisms are proposed.

**Key words** space deployable mechanism, non-smooth system, contact model, friction model, clearance

---

Received 3 December 2012, revised 20 December 2012.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (91216106, 50935002).

2) Cao Dengqing, professor, research interests: nonlinear dynamics, spacecraft dynamics and control, structural dynamics and vibration control.

E-mail: dqcao@hit.edu.cn