

# 接触碰撞动力学的多变量选取方法<sup>1)</sup>

王检耀 洪嘉振<sup>2)</sup> 刘铸永

(上海交通大学工程力学系, 上海 200240)

**摘要** 在柔性多体的接触碰撞动力学问题中, 多变量方法基于附加约束的接触模型, 将柔性体的变形用不同变量来描述: 接触局部区域的变形用有限元节点坐标描述, 非接触局部区域的变形用模态坐标描述, 兼顾了计算精度和效率. 将该方法推广到三维空间碰撞问题, 对两柔性杆纵向碰撞过程进行动力学仿真, 数值结果与实验结果吻合良好, 验证了该方法的有效性. 针对柔性体各自区域的变量如何选取的问题, 研究了节点取法、模态阶数以及材料参数对计算结果精度的影响, 寻找到合理的多变量选取方法, 保证精度的同时使自由度得到最大程度的缩减.

**关键词** 柔性多体, 接触碰撞, 空间问题, 多变量选取, 自由度缩减

中图分类号: O313.7 文献标识码: A doi: 10.6052/0459-1879-13-166

## 引言

柔性多体系统的接触碰撞动力学问题中, 对碰撞过程的正确处理是解决问题的关键.

目前描述接触的力学模型主要有以下两种: 连续碰撞力模型<sup>[1-2]</sup>将物体间嵌入量和嵌入速度作为碰撞力计算参数, 是以力元代替接触区域复杂变形的近似方法, 但该模型不符合接触位置互不嵌入的基本假设, 且其仿真精度依赖于碰撞力模型合理形式的选择和碰撞力方程中参数的合理辨识; 附加约束的接触模型<sup>[3-5]</sup>以接触位置互不嵌入为约束条件, 当检测到接触发生时, 直接施加相应的约束方程与带有 Lagrange 乘子的动力学方程联立求解得到运动学变量及碰撞力, 该方法与连续碰撞力模型相比更符合物理实际, 且无需设置任何参数.

柔性体的位形是浮动坐标系的大范围运动与相对于该坐标系的变形的叠加. 对柔性体变形的描述在很大程度上决定了仿真计算的效率, 通常有两类方法: 一种是以模态坐标描述变形, 该方法显著优点是变量维数较少, 但是董富祥<sup>[5]</sup>证明了即使选取所有阶数模态参与碰撞动力学计算也很难获得准确的碰撞力时间历程; 另一种是以有限元节点坐标描述变形, 该方法能得到高精度的碰撞力和动力学响应, 但其计算效率极低. Schiehlen 等<sup>[6]</sup>提出将有

限元方法和模态综合法相结合以缩减系统自由度的思想: 对接触局部区域的变形用有限元节点坐标描述, 对非接触局部区域的变形用模态坐标描述, 由于这种方法采用不同的坐标变量对柔性体进行描述, 称之为多变量方法. 多变量方法可以有效地减缩了自由度, 提高了计算效率, 并且可以得到接触区域高精度的应力、应变响应. 目前运用多变量方法<sup>[6-8]</sup>解决的算例局限于二维平面问题. 空间接触碰撞问题相对平面问题要更为复杂, 计算量也随之急剧增加, 计算效率成为最大的制约. 本文将多变量方法推广到三维空间, 计算了空间两柔性杆纵向碰撞的算例, 数值结果和实验结果吻合较好, 从而验证了多变量方法在空间问题应用中的正确性.

多变量方法思想的中心在于将碰撞物体分区域用不同坐标描述, 保证计算精度的前提下缩减系统的自由度以提高计算效率. 很显然, 多变量如何选取直接决定系统的自由度数, 即用多少个节点来描述接触区域以及用多少阶模态来描述非接触区域, 同时结果达到精度. 但目前多变量选取都依赖于人工选择, 具有随意性, 没有量化标准. 本文以两杆纵向碰撞的实验算例为基础, 对多变量选取的问题进行了探讨, 研究了不同的节点取法、模态阶数对数值结果的影响, 在保证计算精度的情况下, 使自由度得到了最大程度的缩减. 另外发现材料参数也影响

2013-10-23 收到第 1 稿, 2013-11-15 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (11132007, 11202126) 和教育部博士点基金 (20100073120010) 资助项目.

2) 洪嘉振, 教授, 主要研究方向: 柔性多体系统动力学, 接触碰撞动力学. E-mail: jzhong@sjtu.edu.cn

着多变量方法的计算精度,用不同的材料采用同种变量选取方法,会有不同的精度.

### 1 柔性多体的多变量方法

#### 1.1 单柔性体的多变量方法

如图 1 所示的柔性体  $B_i$ ,  $e^r$  是惯性基,  $e^b$  是柔性体浮动基. 广义速度阵为<sup>[9]</sup>

$$v = \begin{bmatrix} \dot{r}^T & \omega^T & \dot{u}'^T \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

其中,  $u'$  是柔性体所有节点变形位移列阵.

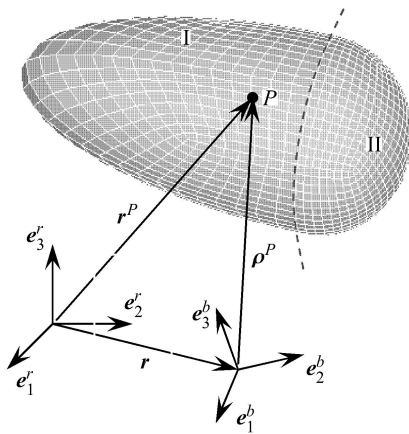


图 1 柔性体的运动学描述

Fig. 1 Kinematic description of the flexible body

如图 1 将  $B_i$  分为非接触区域 I 和接触区域 II, 则  $v = [\dot{v}_r^T \ \dot{u}'_I{}^T \ \dot{u}'_{II}{}^T]^T$ , 为了减少系统的自由度, 用模态坐标代替非接触区域 I 的节点坐标, 有

$$u'_I = \Psi'_I a_1 \quad (2)$$

广义速度阵变为

$$\hat{v} = [\dot{v}_r^T \ \dot{a}_1^T \ \dot{u}'_{II}{}^T]^T \quad (3)$$

$\hat{v}$  与  $v$  的关系式可以写为

$$v = T\hat{v}, \quad T = \begin{bmatrix} I_6 & & \\ & \Psi'_I & \\ & & I_{II} \end{bmatrix} \quad (4)$$

广义质量阵和力阵为

$$\hat{m} = T^T m T, \quad \hat{f} = T^T f \quad (5)$$

多变量方法的动力学方程为

$$\delta \hat{v}^T (-\hat{m} \dot{\hat{v}} + \hat{f}) = 0 \quad (6)$$

#### 1.2 空间问题的接触约束

平面接触问题的接触类型为点线接触, 而空间问题的接触则变为点面接触. 如图 2 所示,  $B_i$  上的点  $S$  与  $B_j$  上的点  $M$  构成接触点对.

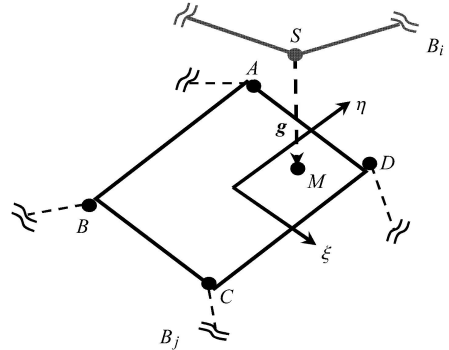


图 2 接触点对

Fig. 2 Contact pair

根据碰撞时刻接触位置非穿透假设, 在碰撞过程中两柔性体之间的接触点对位置始终相等, 因此

$$g = r_j^M - r_i^S = 0 \quad (7)$$

其中,  $r_j^M$  可由周围节点的位置插值得到

$$r_j^M = \sum_P N^P r_j^P, \quad P = A, B, C, D \quad (8)$$

式中,  $N^P$  是插值函数. 将式 (8) 代入式 (7), 并对时间两阶求导, 得到加速度形式的约束方程

$$\Phi_{qk}^C \cdot [\hat{v}_j^T \ \hat{v}_i^T]^T = \gamma_k^C \quad (9)$$

下标  $k$  表示第  $k$  对接触点, 将所有的接触点对的约束方程组集, 得到系统的加速度约束方程

$$\Phi_q^C \dot{V} = \gamma^C \quad (10)$$

#### 1.3 柔性多体的多变量方法

柔性多体系统碰撞阶段的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^{J^T} & \Phi_q^{C^T} \\ \Phi_q^J & 0 & 0 \\ \Phi_q^C & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \lambda^J \\ \lambda^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ \gamma^J \\ \gamma^C \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中, 上标 J 代表铰约束, C 代表接触约束.

### 2 算例

如图 3 所示, 为两柔性杆纵向正碰实验装置的示意图<sup>[5]</sup>. 杆  $B_1$  撞击端为半球形, 杆  $B_2$  撞击端为平

截面. 开始将杆  $B_1$  从定位板位置处释放, 杆将自由下摆到水平位置处时, 以一定速度撞击静止的杆  $B_2$ . 碰撞前的速度用激光测振仪进行测量, 为 0.21 m/s.

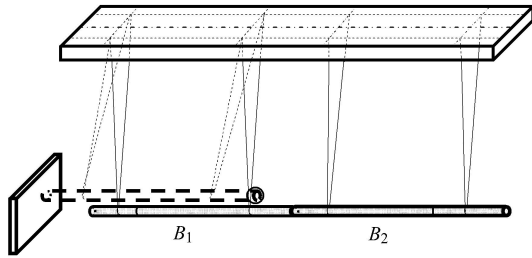


图 3 实验装置示意图

Fig. 3 Experimental setup

实验通过测量碰撞过程中被撞杆  $B_2$  的动力学响应, 来确定碰撞过程中的速度响应曲线.  $B_1$  是黄铜杆,  $B_2$  是铝杆, 两杆的材料及几何参数见表 1.

表 1 实验材料及几何参数

Table 1 Geometrical and material data

	$B_1$	$B_2$
length $l/m$	1	1
radius $r/m$	0.01	0.01
Young's modulus $E/GPa$	96.50	72.71
Poisson's ratio $\mu$	0.36	0.33
density $\rho/(kg \cdot m^{-3})$	$8.39 \times 10^3$	$2.70 \times 10^3$
initial velocity $v/(m \cdot s^{-1})$	0.21	0

数值仿真中对物体用三维实体单元划分, 接触区域与非接触区域的分界线如图 4 所示. 两杆的接触区域用有限元节点坐标表示, 非接触区域各自用 40 阶模态坐标代替了 1000 多个节点的 3000 多个自由度, 极大地减少了计算量. 速度响应的仿真结果与实验结果的对比如图 5, 两者较好地吻合, 说明了多变量方法的正确性. 图中, FEM 表示用完全有限元方法计算的结果, MVM 表示多变量方法结果, EXP 是实验的结果. 1 表示碰撞端, 2 表示自由端.

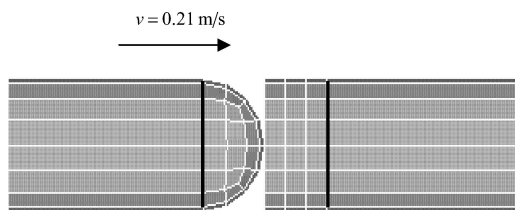


图 4 接触区域与非接触区域划分

Fig. 4 Partition of contact region and non-contact region

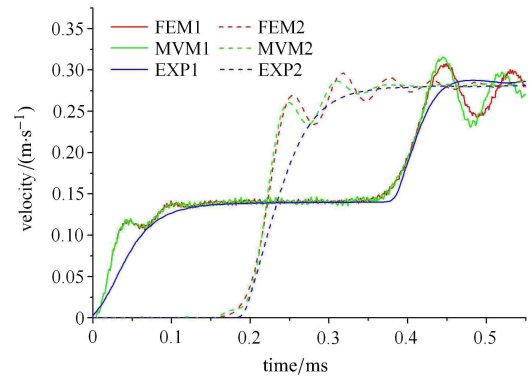


图 5 铝杆上点的速度响应

Fig. 5 Velocity response of nodes in aluminum rod

### 3 多变量的选取

#### 3.1 归一化相关系数的概念

归一化相关系数 (normalized correlation coefficient, NCC) 是评价数据间相关程度的指标. 设有两组数据  $y_1$  和  $y_2$ , 其中  $y_1$  是标准数据,  $y_2$  是待评价数据. 归一化相关系数可以写为

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (y_{1i} - \bar{y}_1)(y_{2i} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_{1i} - \bar{y}_1)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_{2i} - \bar{y}_2)^2}}$$

$r$  越接近 1 代表相关度越高, 可用相关系数  $r$  来判断曲线的吻合程度.

#### 3.2 节点和模态的选择

以上述杆纵向正碰算例中被撞杆  $B_2$  为研究对象, 铜杆  $B_1$  采用完全的有限元节点描述, 铝杆  $B_2$  采用多变量描述, 研究  $B_2$  接触区域节点取法和非接触区域模态阶数对仿真结果的影响.

如图 6 所示, 为  $B_2$  碰撞端纵向和径向的节点示意图, 定义节点取法为  $i-j$  ( $i = 1 : 4, j = 1 : 5$ ),  $i$  代表纵向节点层数 (node layer),  $j$  代表径向的节点周数 (node lap). 比如 2-3 代表选择 2 层 3 周的节点为接触

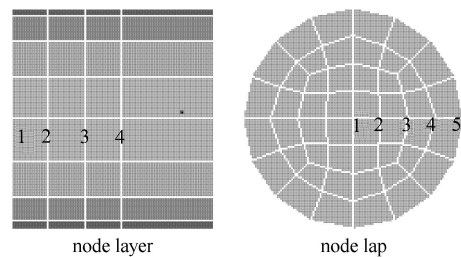


图 6 碰撞端的网格划分

Fig. 6 Mesh discretion of contact end

区域，共有 20 种取法. 非接触区域的模态从 7 阶开始取，每增加 6 阶取一种，共取 7 种.

按以上的划分方法，共有 140 组多变量方法的结果，将它们的碰撞力曲线和有限元方法计算的标准曲线进行相关性分析，以判断曲线的吻合程度，部分结果如图 7 所示. 图 7 中标记的 2 个数据点分别表示同阶数模态下取节点区域 2-2 和节点区域 1-5 的结果，区域 2-2 节点数远少于区域 1-5 节点数，但显然 2-2 的结果比 1-5 更精确. 说明结果精度还与节点选取的位置有关.

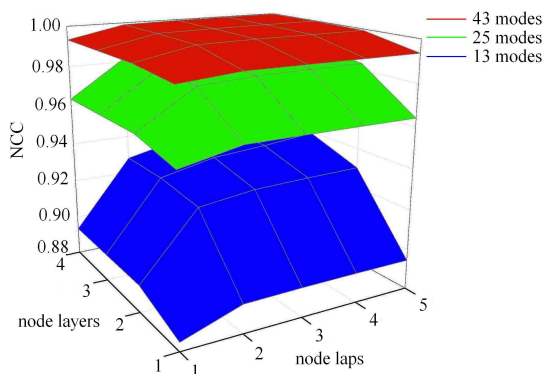


图 7 节点取法和模态阶数对结果的影响

Fig. 7 Influence of node position and modal orders

图 8 为几组节点在各阶数模态下的相关系数，括号内为节点数. 虚线所表示的节点数均少于相应实线，但虚线的纵向节点数更多，精度也更高.

由图 7 和图 8，可以看出：

(1) 非接触区域的模态阶数越高，曲线吻合程度越高，结果越精确；随着接触区域的节点径向周数和纵向层数增加，结果越精确.

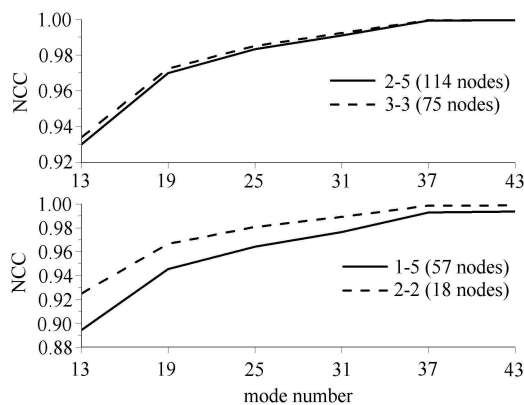


图 8 几组节点取法的精度比较

Fig. 8 Comparison of different node positions

(2) 接触区域的节点数越多，精度并不一定越高. 精度和选取的节点位置有密切关系. 本算例中是纵向碰撞，选取纵向的节点比径向的节点更有效.

(3) 本算例中，接触区域选择 1-1 共 1 个节点，非接触区域选择 37 阶模态，共 40 个自由度，代替 798 个节点 2394 个自由度，就可以使相关系数达到 0.99，已经达到了非常高的精度，使多变量方法达到了最大的优化.

### 3.3 材料对变量选取的影响

以平头杆  $B_2$  为研究对象，为研究不同材料对仿真结果的影响，半圆头杆  $B_1$  采用完全的有限元节点描述，并且采用同种材料，以相等初速度 0.21 m/s 撞击  $B_2$ ，保证了相同的撞击强度.  $B_2$  分别采用不同弹性模量的材料进行仿真计算.  $B_2$  的材料参数见表 2.

表 2 两杆的材料参数

Table 2 Material data of two rods

$B_1$	$B_2$	$E/\text{GPa}$	$\mu$
Cu	W	344.70	0.28
Cu	Cu	96.50	0.36
Cu	Al	72.71	0.33
Cu	PA6	2.32	0.34

不同材料的仿真结果如图 9，横坐标为模态阶数 (mode number) 和节点位置 (node position)，纵坐标为相关系数 (NCC)，不同颜色的图层表示不同材料的结果. 可以看出材料对变量选取有影响，在同种变量选取方式下，精度：钨 > 铜 > 铝 > PA6，即弹性模量越大，精度越高；也就是说，要达到相同的精度，所需自由度数：钨 < 铜 < 铝 < PA6，即弹性模量越大，所需自由度越少.

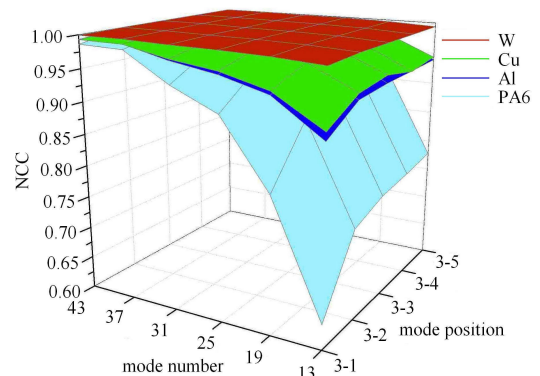


图 9 不同材料的仿真结果

Fig. 9 Simulation results of different materials



#### 4 结 论

本文将多变量方法推广到空间碰撞动力学,使自由度极大地减少,并且通过两杆纵向正碰的实验算例验证了该方法的正确性。

以此实验算例为基础,本文研究了多变量方法的精度与变量选取的关系,接触区域的节点取法和非接触区域的模态阶数对计算结果均有影响。在一定的精度要求下,可寻找到自由度最少的变量选取方法。柔性体自身的材料参数对多变量方法的分区也有影响,材料的弹性模量越大,达到同样精度所需的自由度数越少。

#### 参 考 文 献

- 1 Bauchau OA, Ju CK. Modeling friction phenomena in flexible multi-body dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195: 6909-6924
- 2 方建士, 李宝玉, 章定国. 大范围运动柔性梁的连续力法撞击动力学分析. *南京理工大学学报*, 2008, 32(6): 661-665 (Fang Jianshi, Li Baoyu, Zhang Dingguo. Continuous force approach for impact dynamics of flexible beam in large overall motion. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2008, 32(6): 661-665 (in Chinese))
- 3 Heinstein MW, Mello FJ, Attaway SW, et al. Contact-impact modeling in explicit transient dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 187(3-4): 621-640
- 4 Dong FX, Hong JZ, Zhu K. Numerical and experimental studies on impact dynamics of a planar flexible multibody system. *Acta Mechanica Sinica*, 2010, 26: 635-642
- 5 董富祥. 刚柔耦合多体系统碰撞动力学建模理论与实验研究. [博士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2010 (Dong Fuxiang. Study of modeling theory and experiment for impact dynamics of rigid-flexible coupling multibody systems. [PhD Thesis]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2010 (in Chinese))
- 6 Schiehlen W, Seifried R, Eberhard P. Elastoplastic phenomena in multibody impact dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 195: 6874-6890
- 7 韩石磊, 洪嘉振. 柔性多体碰撞问题的多变量方法. *力学学报*, 2011, 43(5): 886-893 (Han Shilei, Hong Jiazhen. Multi-variable method for flexible multibody systems with contact/impact. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2011, 43(5): 886-893)
- 8 Chen P, Liu JY, Hong JZ. Contact-impact formulation for multi-body systems using component mode synthesis. *Acta Mechanica Sinica*, 2013, 29(3): 437-442
- 9 洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京: 高等教育出版社, 1999 (Hong Jiazhen. *Computational Dynamics of Multibody Systems*. Beijing: Higher Education Press, 1999 (in Chinese))

(责任编辑: 周冬冬)

## MULTI-VARIABLE SELECTION METHOD IN CONTACT/IMPACT DYNAMICS<sup>1)</sup>

Wang Jianyao Hong Jiazhen<sup>2)</sup> Liu Zhuoyong

(Dept. of Engineering Mechanics Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

**Abstract** In flexible multi-body dynamics with contact/impact, multi-variable method (MVM) which is based on appended contact constraint model is proposed. With this method, two types of variables are used to describe the flexible body deformation: small superposed deformation is depicted with finite element nodal coordinates in contact region and modal coordinates in non-contact region respectively, thus this method takes account of both accuracy and efficiency. This method is extended to three-dimensional spatial contact issue which is more complicated than the planar one, and the numerical simulation of a longitudinal impact between two rods agrees well with the experiment result. To solve the variable selection problem, the influences on result accuracy of node position, modal orders and material parameter are studied. Based on this, the optimal multi-variable selection is realized which reduces the DOFs to the maximum extent and also achieves accuracy in the same time.

**Key words** flexible multi-body, contact/impact, spatial problem, multi-variable selection, DOF reduction

Received 23 October 2013, revised 15 November 2013.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (11132007, 11202126) and the Ph.D. Programs Foundation of Ministry of Education of China (20100073120010).

2) Hong Jiazhen, professor, research interests: flexible multi-body system dynamics, contact/impact dynamics. E-mail: jzhong@sjtu.edu.cn