

## 基于可变指数及 L1 保真项的图像去噪算法

耿海, 何小卫\*, 樊骏笠

(浙江师范大学 数理与信息工程学院, 浙江 金华 321004)

(\* 通信作者电子邮箱 jhxxw@zjnu.cn)

**摘要:**全变分(TV)模型采用了梯度的1范数作为正则化约束,它能够沿着梯度方向较好地保护图像的边缘信息,但在图像较均匀区域,容易产生“阶梯”效应。利用梯度的可变指数函数作为正则化项,提出TV模型的改进模型,该模型既保持TV模型保护图像边缘信息的优点,又可以明显地减少非边界区域“阶梯”效应的产生,同时把 $u-f$ 的1范数作为数据保真项增强了模型修复图像破损部分的能力。

**关键词:**图像去噪;全变分模型;可变指数函数;正则化;L1范数

**中图分类号:**TP391.41 **文献标志码:**A

### Image denoising algorithm with variable exponent regularization and L1 fidelity

GENG Hai, HE Xiaowei\*, FAN Junli

(College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua Zhejiang 321004, China)

**Abstract:** The L1 norm of gradient is used as the regularization term in the Total Variation (TV) model which can preserve the edges of the image well. However, it has the staircasing effect in the relatively smooth regions. Using the variable exponent function as the regularization term, the modified model can not only preserve the edges of image as well as the TV model but also decrease the staircasing effect obviously. Simultaneously, the L1 norm of  $u-f$  was regarded as the fidelity term of the model, which can enhance the ability of image denoising.

**Key words:** image denoising; Total Variation (TV) model; variable exponent function; regularization; L1 norm

## 0 引言

图像在实际的获取、传输及存储过程中,由于设备的不完善和各种物理条件的限制,各种噪声的存在无法避免,它们使得图像的质量受到影响,同时也会掩盖图像中重要的细节特征,影响图像的后续处理,如图像分割、图像的特征提取、图像编码等。所以,去噪效果的好坏直接影响图像处理的质量。假设图像灰度函数 $u:\Omega\rightarrow\mathbf{R}$ ,其中 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是一个矩形区域, $f$ 是观察到的带有噪声的图像,则图像可分解为两部分:

$$f = u + n \quad (1)$$

其中: $u$ 表示需要恢复的原始图像, $n$ 表示噪声。

传统的图像去噪方法一般可分为空间域滤波方法和变换域滤波方法两种。其中,空间域滤波方法首先是选用一定尺寸的模板,要处理的像素点位于模板的中心,随着模板的移动,对图像中所有的像素点进行滤波,经典的中值滤波算法、均值滤波算法和维纳滤波算法<sup>[1]</sup>都属于空间域滤波方法。而变换域滤波方法主要是根据不同的信号在变换域中表现出的不同特征来进行去噪,基于傅里叶变换和小波变换的图像去噪算法<sup>[2]</sup>都属于变换域图像去噪方法。实际上,在对含有噪声的图像进行修复时,去除噪声和保护必要的细节两个方面都非常重要。但由于图像中所包含的细节和噪声信息同属于图像中的高频部分,在利用传统的去噪方法对图像进行去噪时,往往会将图像中的细节信息误认为是噪声信息而过滤掉,导致细节的丢失,图像就会变得模糊。为了改善因噪声而引起的图像质量的下降,并且寻求过滤噪声和保护细节信息两者的平衡,基于偏微分方程(Partial Differential Equation,

PDE)的方法在这些方面表现尤为突出。本文结合现有的几种偏微分方程方法,提出改进模型,有效地利用现有方法各自的优点,改善了这几种模型中存在的缺陷。实验证明,改进模型不仅仅能够有效地去除噪声信息,而且能够较好地保护图像的细节信息。

## 1 相关研究

基于偏微分的图像处理方法可以追溯到1965年Gabor<sup>[3]</sup>和Jain<sup>[4]</sup>有关图像平滑的研究,从这以后出现了一系列基于偏微分方程的方法。1992年,Rudin-Osher-Fatemi提出的全变分(Total Variation,TV)正则化方法<sup>[5]</sup>去噪模型,也称ROF模型,成为了该领域的经典模型之一,并认为,含有噪声的图像与不含噪声的图像相比,其全变分明显地大,所以求全变分的极小值就可以认为是消除了噪声,其基本模型可如下表示:

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx + \lambda \int_{\Omega} (u-f)^2 dx \quad (2)$$

式(2)的梯度下降流可表示为:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - 2\lambda(u-f) = 0, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

其中 $N$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量。

TV模型的数值算法可以参考文献[5]。TV模型数值算法简单、相对较快的特点使得它得到广泛的运用。并且它能够把图像归类于有界变差函数空间,采用全变分作为图像的平滑性度量,从而使得图像在去除噪声的同时,也能够使得边缘信息得到很好的保护。但在图像的平滑区域,ROF模型会

收稿日期:2013-05-02;修回日期:2013-06-17。

作者简介:耿海(1988-),男,江苏南京人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理、图像修复;何小卫(1968-),男,浙江金华人,副教授,主要研究方向:图像处理、人工智能;樊骏笠(1990-),男,浙江绍兴人,硕士研究生,主要研究方向:图像处理、图像修复。

有较强的扩散,从而影响了区域之间的自然、平缓的过渡。区域越平滑,扩散就越强烈,最终导致了图像变成分片的局部常数区域,图像看上去过渡极其不自然,像是由多个区域组成,导致“阶梯”效应。而传统的采用二次平方项  $\|\nabla u\|_1^2$  作为正则化项虽然能够较好处理平滑区域的“阶梯”效应,却可能破坏图像的强边缘信息。自然地,将这两种度量有机地结合在一起是不错的选择。根据图像不同区域的不同特征,自动地调整梯度的模的指数:即在图像的边缘处,指数取接近于 1,则正则化项接近梯度模的 1 范数;而在相对均匀区域,指数取接近于 2 的值,则正则化项接近梯度模的平方。在文献[6]中,Blomgren 就建议采用这样的一种思路,随后 Chen 等在文献[7]中也相继提出类似的观点。在文献[8]中,作者就这种非标准的指数问题作了比较详细的叙述。Li 等<sup>[9]</sup>根据这一思想又提出一种更为灵活的去噪模型,选择了可变指数函数作为正则化项的指数,并取得显著的实验效果。基本模型如下:

$$\min_{u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)} \left\{ E_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u-f)^2 dx \right\} \quad (4)$$

其中:

$$p(x) = 1 + g(x) \quad (5)$$

$$g(x) = \frac{1}{1 + k |\nabla G\sigma * f(x)|} \quad (6)$$

当图像在强边缘区域,梯度信息非常大,  $g$  的值就会非常接近 0,此时模型(4)接近 ROF 模型,从而比较好地保护图像的边缘信息;而在图像相对平滑的区域,梯度信息较小,这时  $g$  的值就接近于 1,模型(4)接近于各向同性平滑,避免产生“阶梯”效应;在图像的其他区域,函数  $p$  的值可以根据图像点的基本信息自动地选取合适的值。模型(4)的梯度下降流如下所示:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial N} = 0, & x \in \partial\Omega \\ \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) - \lambda(u-f) = 0, & x \in \Omega \end{cases} \quad (7)$$

模型(4)的数值算法可参考文献[9]。可变指数函数模型(4)较好地解决了 ROF 中产生的“阶梯”效应,但模型(4)模型采用  $\int |\nabla u|^2$  作为保真项的度量,在去除噪声和图像边缘信息的保护问题上还有待改进。

一些学者也试图改变图像保真项来提高含噪图像的质量。Wu 等<sup>[10]</sup>采取非二次的保真项。Meyer<sup>[11]</sup>提出了一个具有 \* 范数的保真项的分解方法,与 ROF 模型相比,在提取图像的纹理特征时表现出较好的效果。受 Meyer 思想的启发,文献[12-13]提出了在 ROF 模型中选用较弱的范数作为保真项,这种改进使得图像在高频部分分解上表现突出。另外,也有许多学者直接采用 L1 范式作为 ROF 模型保真项的度量,与标准的 TV 模型相比较,采用 L1 范式的保真更具有几何特征,并且使得 TV-L1 模型对正则化参数表现出一定的鲁棒性,为正则化参数的选择提供方便。文献[14-15]中较为详细地展示了 TV-L1 模型在去除盐椒噪声上比 TV-L2 模型更具优越性。文献[16]将文献[17]中的高效求解 TV-L1 模型的方法运用到各种图像修复中,并取得了满意的结果。Chan 等<sup>[18]</sup>具体地考察了 TV-L1 模型的几何特性,将 L1 范数耦合 TV 应用到一般的图像修复问题中,发挥了 L1 范数保持未受损区域图像信息的能力,同时也结合了 TV 模型的修复

功能和良好的边缘保护特性,极大地提高了图像修复的效果。TV-L1 模型的能量泛函可以表示为:

$$\inf_{u(x) \in BV(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u| dx + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |u(x) - f(x)| dx \quad (8)$$

Yin 等<sup>[19]</sup>在模型(8)的基础上,对图像的分解、复原等问题上做出了详细的研究。近来,在文献[20]中又提出了解决 TV-L1 模型的新算法。在文献[21]中,作者基于 TV-L1 模型提出新的修复图像模型,效率得到较大的提高。然而模型(8)采用全变分的 1 次方正则化项,存在着与 ROF 模型同样的不足,就是在图像相对平滑区域容易产生“阶梯”效应。

受以上几种图像去噪方法的启发,我们在去噪模型中采用可变指数函数方程作为模型正则化项的同时,选用 L1 范式作为数据保真项。这样,改进的模型不仅能够保护图像的边缘信息,而且在图像的平滑区域减少了“阶梯”效应。

## 2 改进的模型及数值分析

### 2.1 模型与分析

本文提出改进模型的基本模型如下所示:

$$\min_{u \in W^{1,p(x)}(\Omega) \cap L^1(\Omega)} \left\{ E_{p(x)}(u) = \lambda \int_{\Omega} |u - u_0| dx + \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \right\} \quad (9)$$

其中  $\lambda$  是权重参数;且根据文献[9]设定指数  $p(x) = 1 + g(x)$  和  $g(x) = \frac{1}{1 + k |\nabla G\sigma * f(x)|}$ 。在图像梯度信息较大的边缘区域,  $g \rightarrow 0$ ,  $p$  的值接近 1;而在图像梯度较小的平缓区域,  $g \rightarrow 1$ ,  $p$  的值接近 2。

利用最速下降法,模型(9)相关的热流方程可以通过式(10)~(12)来表示,并且在本文中只研究在 Neumann 边界条件下,因为它在图像处理的应用中更为自然。

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u) - \lambda \left( \frac{u - u_0}{|u - u_0|} \right); (x, t) \in \Omega^T \quad (10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} = 0; (x, t) \in \Omega^T \quad (11)$$

$$u(0) = u_0, (x, t) \in \Omega \times \{t = 0\} \quad (12)$$

若  $F(\nabla u, u, x) = \lambda |u_0 - u| + \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)}$ , 模型(9)就等价于  $u_t = -F'(\nabla u, u, x)$ 。其中  $F'(\nabla u, u, x)$  是  $F$  关于  $u$  的 Gateaux 导数,模型(9)就可以用梯度下降流(式(10))来进行最小化迭代了。下面证明式(10)具有最小解。

**定理 1** 若方程  $F(\xi, z, x) = \lambda |u_0 - u| + \frac{1}{p(x)} |\xi|^{p(x)}$ , 其中函数  $p(x)$  在模型(5)中给出,其能量方程  $E(g) := \int_{\Omega} F(\nabla g, g, x)$  在  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  中是弱下半连续的。

**证明** 根据文献[10]中的引理 2.3 所示,如果  $\xi \rightarrow F(\xi, z, x)$  在每一点  $z \in \mathbf{R}, x \in \Omega$  上都是凸函数,那么  $E(g) := \int_{\Omega} F(\nabla g, g, x)$  在  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  空间是弱下半连续的。众所周知,如果一个多元方程  $F(\xi)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  是二阶可导的,当且仅当任意的  $\xi$  在 Hessian 矩阵  $\nabla^2 F(\xi) = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i \partial \xi_j}$  都是非正定的情况下,  $F$  便是凸函数。

设  $F(\xi, z, x) = \lambda |f - z| + \frac{1}{p(x)} |\xi|^{p(x)}$ , 于是有

$$F_{\xi_i} = \frac{1}{p(\mathbf{x})} p(\mathbf{x}) |\xi|^{p(\mathbf{x})-1} \frac{\xi_i}{|\xi|} = |\xi|^{p(\mathbf{x})-2} \xi_i$$

$$F_{\xi_i \xi_j} = (p(\mathbf{x}) - 2) |\xi|^{p(\mathbf{x})-3} \frac{\xi_i \xi_j}{|\xi|^2} \xi_i + |\xi|^{p(\mathbf{x})-2} \delta_{ij} =$$

$$(p(\mathbf{x}) - 2) |\xi|^{p(\mathbf{x})-4} \xi_i \xi_j + |\xi|^{p(\mathbf{x})-2} \delta_{ij}$$

$$F_{\xi_i \xi_j \eta^i \eta^j} = (p(\mathbf{x}) - 2) |\xi|^{p(\mathbf{x})-4} \xi_i \xi_j \eta^i \eta^j +$$

$$|\xi|^{p(\mathbf{x})-2} \delta_{ij} \eta^i \eta^j; \forall \eta \in \mathbf{R}^n$$

其中用相同的上下标表示从 1 到  $n$  的累加总和。通过柯西不等式

$$\xi_i \xi_j \eta^i \eta^j = \left( \sum \xi_i \eta_i \right)^2 \leq \left( \sum \xi_i^2 \right) \left( \sum \eta_i^2 \right) = |\xi|^2 |\eta|^2$$

并且  $1 < p(\mathbf{x}) \leq 2$ , 可得:

$$F_{\xi_i \xi_j \eta^i \eta^j} \geq (p(\mathbf{x}) - 2) |\xi|^{p(\mathbf{x})-4} |\xi|^2 |\eta|^2 +$$

$$|\xi|^{p(\mathbf{x})-2} |\eta|^2 = (p(\mathbf{x}) - 1) |\xi|^{p(\mathbf{x})-2} |\eta|^2 \geq 0$$

因此,  $F(\xi, g, \mathbf{x})$  在任意的  $\xi$  值下是凸函数。所以

$E(g) := \int_{\Omega} F(\nabla g, g, \mathbf{x})$  在  $W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega)$  空间是弱下半连续的。

**定理 2** 设  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  在 Lipschitz 边界条件下, 且  $f \in W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ , 则模型 (9) 存在一个最小值  $\bar{u} \in W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ 。

**证明** 设  $u \equiv 0$ , 所以  $E_{p(\mathbf{x})}(0) = \lambda \int_{\Omega} |u_0| dx$ , 又因为  $u_0 \in L^1(\Omega)$ , 所以  $E_{p(\mathbf{x})}(0) < +\infty$ 。假设  $u^* \in W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  是  $E_{p(\mathbf{x})}(u)$  的最小解, 于是  $E_{p(\mathbf{x})}(u^*) \leq E_{p(\mathbf{x})}(0) < +\infty$ 。设  $m = E_{p(\mathbf{x})}(u^*)$ , 且  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}, u_k \in W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  是极小化数列, 直至  $E_{p(\mathbf{x})}(u_k) \rightarrow m_0$ 。于是存在连续的值  $M$ , 直至

$$\int_{\Omega} \frac{1}{p(\mathbf{x})} |\nabla u_k|^{p(\mathbf{x})} dx \leq M, \int_{\Omega} |u_k - f| dx \leq M$$

因此  $\int_{\Omega} |u_k| dx \leq M_0$ 。因为  $u_k \in W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega)$ , 且  $1 < p(\mathbf{x}) \leq 2$ , 所以同样推出

$$\int_{\Omega} |\nabla u_k|^{p(\mathbf{x})} dx = 2 \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u_k|^{p(\mathbf{x})} dx \leq$$

$$2 \int_{\Omega} \frac{1}{p(\mathbf{x})} |\nabla u_k|^{p(\mathbf{x})} dx \leq 2M$$

上式结果表明在  $W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega)$  和  $L^1(\Omega)$  空间,  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  中所有的值构成一致的有界序列。因为  $W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  是一个自反巴拿赫空间, 故存在一个子集  $\{u_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ , 函数  $\bar{u} \in W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega) \cap L^1(\Omega), u_{k_j} \rightarrow \bar{u}$ 。由定理 1,  $E_{p(\mathbf{x})}(g)$  在  $W^{1,p(\mathbf{x})}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$  空间是弱下半连续的, 可得

$$E_{p(\mathbf{x})}(\bar{u}) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} E_{p(\mathbf{x})}(u_{k_j}) = m$$

因此,  $\bar{u}$  是  $E_{p(\mathbf{x})}(u)$  的最小化问题 (9) 的解。

### 2.2 数值运算

在本文的所有实验中, 只考虑在二维空间下, 如果图像的大小为  $N \times N$ , 设  $\tau$  为时间步长, 空间步长  $h$  为 1, 若  $x_i = ih, y_j = jh (i, j = 0, 1, \dots, N), t_n = n\tau (n = 0, 1, \dots, N), u_{ij}^n = u(x_i, y_j, t_n), u_{ij}^0 = f(x_i, y_j)$ 。根据模型 (9), 观察到的图像中像素的偏导可以通过计算  $(u_{i+1,j} - u_{i,j}), (u_{i,j+1} - u_{i,j})$  获取, 指数  $p$  通过式 (5) 及 (6) 得到, 其中式 (6) 中的  $G\sigma$  为高斯核函数, 所以可设:

$$(\Delta_x^+ u)_{i,j} = \pm [u_{i+1,j} - u_{i,j}]$$

$$(\Delta_y^+ u)_{i,j} = \pm [u_{i,j+1} - u_{i,j}]$$

$$|(\Delta_x u)_{i,j}| = \{(\Delta_x^+(u_{i,j}))\}^2 +$$

$$(m[\Delta_y^+(u_{i,j}), \Delta_y^-(u_{i,j})])^2 + 0.001\}^{1/2}$$

$$|(\Delta_y u)_{i,j}| = \{(\Delta_y^+(u_{i,j}))^2 +$$

$$(m[\Delta_x^+(u_{i,j}), \Delta_x^-(u_{i,j})])^2 + 0.001\}^{1/2}$$

其中  $m[a, b] = \left( \frac{\text{sign } a + \text{sign } b}{2} \right) \cdot \min(|a|, |b|)$ , 所以有限差分形式可写作:

$$u^{k+1} = u^k + \tau \left( \Delta_x^- \left( \frac{(\Delta_x^+ u^k)}{|\Delta_x u^k|^{1-g}} \right) + \Delta_y^- \left( \frac{(\Delta_y^+ u^k)}{|\Delta_y u^k|^{1-g}} \right) - \lambda \left( \frac{u^k - u_0}{|u^k - u_0|} \right) \right)$$

### 3 实验结果及分析

实验的硬件环境为 Intel Pentium IV 3.0 GHz CPU, 512 MB RAM, 操作系统为 Microsoft Windows XP, 编译环境是 Matlab2010b。

本文首先用一幅名为“plane”的本身就比较模糊的图像作为测试用图, 用改进后的模型处理的过程如图 1 所示。

从图 1(e) 中可以看出, 当迭代次数为 55 时, 图像已经比加噪后的图像清晰许多, 噪声几乎已经看不见, 和图 (a) 中的原图已经非常接近。当迭代次数为 75 时, 如图 1(f) 所示, 处理后的图像已经非常清晰, 其峰值信噪比 (Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR) 的值达到 29.8163 dB。图像的边缘信息也被很好地保护, 可以清晰地观察到图像中飞机的轮廓; 同时, 在相对平滑的区域, 如机身和图像的背景区域, 几乎看不到有“阶梯”效应的产生, 其过渡也比较自然。

接下来将用本文提出的改进模型和 ROF 模型、可变指数函数模型以及 TV-L1 模型作比较, 选择边缘区域信息较明显 (图 2 中数字“5”的边缘、图 3 中椭圆的边缘) 以及平坦区域过渡比较缓和 (图 2 的背景渐变区域、图 3 的背景和椭圆中部渐变区域) 的两幅图作为实验用图, 实验结果如图 2 和图 3 所示。

在所有的对比模型实验中, 处理时迭代都达到 75 次后终止; 时间步长设置成 0.3, 并且  $\sigma$  的值为 0.5。结果表明, 图 2 (b) 和图 3 (b) 分别经过 ROF 模型处理后, 绝大部分噪声依然存在, 如图 2 (c) 和图 3 (c)。虽然 ROF 模型能够较好地保护好图像的边缘信息, 如图 2 (c) 中数字“5”的轮廓和图 3 (c) 中椭圆形的轮廓, 但是在相对较平滑的区域, 如图 2 (c) 和图 3 (c) 中的由黑色渐变到白色的背景区域, “阶梯”效应不可避免。但在图 2 (d) 和图 3 (d) 中, 经过可变指数函数方程处理后图像, 不仅“阶梯”效应得到较好的缓解, 而且图像的强边缘信息也能够像 ROF 模型那样得到很好的保护。然而, 这两种模型的去噪效果仍然不是非常理想。在图 2 (e) 和图 3 (e) 中展示的是经过 TV-L1 模型处理后的图像, 去噪效果比前面两种模型要好很多, 但是由于 TV-L1 模型采用的是  $\int_{\Omega} |\nabla u| dx$  作为正则化项和保真项的度量, “阶梯”效应还是会发生。如图 2 (e) 和图 3 (e) 中由黑色渐变到白色的背景区域, 如图 2 (e) 中数字“5”的倒影和图 3 (e) 中椭圆的中间区域。和这三种模型相比, 经过本文提出的模型处理后的图像图 2 (f) 和图 3 (f), 其 PSNR 值分别达到了 31.3761 dB 和 32.0288 dB, 噪声滤除彻底, 边缘等信息得到较好的保护, 渐变区域变化自然, “阶梯”效应不明显。

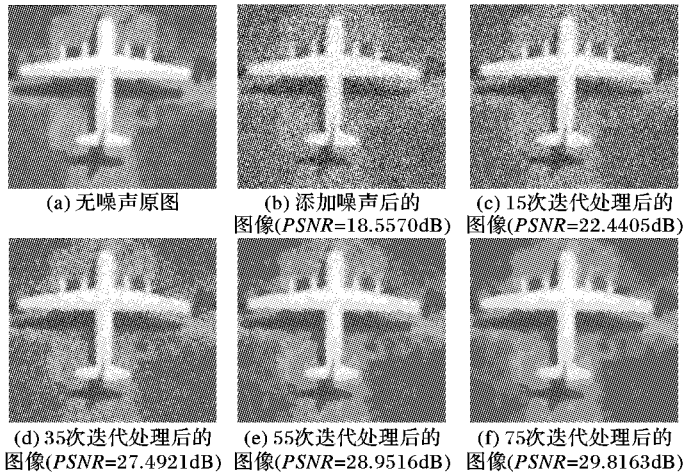


图1 改进模型的去噪过程

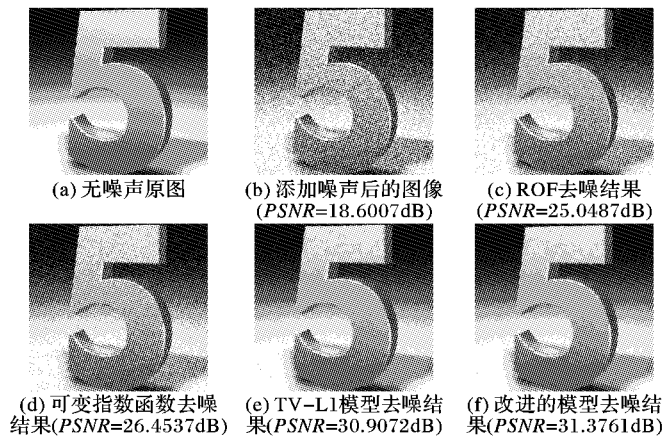


图2 四种去噪模型对比实验 1

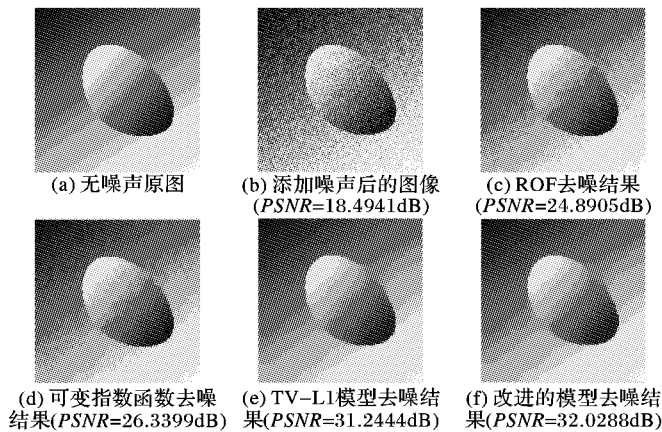


图3 四种去噪模型对比实验 2

#### 4 结语

本文提出一种 TV 模型的改进模型。使用梯度模的可变指数函数作为模型的正则化项约束, L1 范式作为数据保真项。在改进的模型中由于使用可变指数的函数  $\int |\nabla u|^p$  作为正则化项, 函数可以根据图像的梯度信息自动地选择一个合适的值作为指数。对于保真项的选取, 大量文献已经表明 L1 范数的选取会带来更好的实验效果, 虽然它的引入会使得模型的严格凸性受到破坏。尽管改进后的模型在去噪方面达到了显著的成效, 但仍有诸多问题值得关注。比如算法速度的提高, 且如何改进使之适应纹理图像等。

#### 参考文献:

[1] GONZALEZ R C, WOODZ R E. 数字图像处理 [M]. 2 版. 阮秋

琦, 阮宇智, 译. 北京: 电子工业出版社, 2003: 59 - 170.

- [2] MALLAT S. 信号处理的小波引导[J]. 杨力华, 译. 北京: 机械工业出版社, 2002.
- [3] GABOR D. Information theory in electron microscopy[J]. *Laboratory Investigation: a Journal of Technical Methods and Pathology*, 1965(14): 801 - 807.
- [4] JAIN A K. Partial differential equations and finite-difference methods in image processing, part 1: image representation [J]. *Journal of optimization Theory and Applications*, 1977, 23(1): 65 - 91.
- [5] RUDIN L I, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1992, 60(1): 259 - 268.
- [6] BLOMGREN P, CHAN T F, MULET P, *et al.* Variational PDE models and methods for image processing[J]. *Research Notes in Mathematics*, 2000, 420: 43 - 68.
- [7] CHEN Y, LEVINE S, RAO M. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2006, 66(4): 1383 - 1406.
- [8] HARJULEHTO P, HASTO P, LE U V. Overview of differential equations with non-standard growth[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 2010, 72(12): 4551 - 4574.
- [9] LI F, LI Z B, PI L. Variable exponent functionals in image restoration[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2010, 216(3): 870 - 882.
- [10] WU C, ZHANG J, TAI X C. Augmented Lagrangian method for total variation restoration with non-quadratic fidelity[J]. *Inverse Problems and Imaging*, 2011, 5(1): 237 - 261.
- [11] MEYER Y. Oscillating patterns in image processing and non-linear evolution equations: the fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis memorial lectures[M]. Boston: American Mathematical Society, 2001.
- [12] VESE L A, OSHER S J. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2003, 19(1/2/3): 553 - 572.
- [13] OSHER S, SOLE A, VESE L. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the H1 [J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2003, 1(3): 349 - 370.
- [14] NIKOLOVA M. Minimizers of cost-functions involving nonsmooth data-fidelity terms. Application to the processing of outliers[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2002, 40(3): 965 - 994.
- [15] NIKOLOVA M. A variational approach to remove outliers and impulse noise[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1/2): 99 - 120.
- [16] YANG J, ZHANG Y, YIN W. An efficient TVL1 algorithm for deblurring multichannel images corrupted by impulsive noise[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, 31(4): 2842 - 2865.
- [17] GUO X, LI F, NG M K. A fast L1-TV algorithm for image restoration[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2009, 31(3): 2322 - 2341.
- [18] CHAN T F, ESEDOGLU S. Aspects of total variation regularized L1 function approximation[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2005, 65(5): 1817 - 1837.
- [19] YIN W, GOLDFARB D, OSHER S. The total variation regularized L1 model for multiscale decomposition[J]. *Multiscale Modeling & Simulation*, 2007, 6(1): 190 - 211.
- [20] MICCHELLI C A, SHEN L, XU Y. Proximity algorithms for image models: denoising[J]. *Inverse Problems*, 2011, 27(4): 045009.
- [21] SHI Y, YANG X. New total variation regularized L1 model for image restoration[J]. *Digital Signal Processing*, 2010, 20(6): 1656 - 1676.