

文章编号: 1001-0920(2012)12-1885-05

具有状态时滞的切换随机系统的指数稳定条件

丛 岫¹, 沈 捷², 向峥嵘³

(1. 黑龙江大学 机电工程学院, 哈尔滨 150080; 2. 南京工业大学 自动
化学院, 南京 210008; 3. 南京理工大学 自动化学学院, 南京 210094)

摘 要: 考虑由具有状态时滞的线性 Itô 随机子系统构成的切换系统, 基于多 Lyapunov 泛函方法研究切换与时滞对于稳定性的共同影响, 并以此建立均方指数稳定条件. 在均方意义下噪声对于稳定性的影响基本是负面的, 因此构造一类形式较为一般的 Lyapunov 泛函并运用噪声的统计特性于其解析过程中, 以减少噪声所引起的保守性. 最后, 通过一个仿真算例描述切换与时滞的相互制约关系表明了所提出方法的有效性.

关键词: 切换系统; Brown 运动; 均方稳定; 时滞

中图分类号: TP273

文献标志码: A

Exponential stability conditions for switched stochastic systems with state-delay

CONG Shen¹, SHEN Jie², XIANG Zheng-rong³

(1. School of Electrical & Mechanical Engineering, Heilongjiang University, Harbin 150080, China; 2. School of Automation, Nanjing University of Technology, Nanjing 210008, China; 3. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: CONG Shen, E-mail: shen_tsong@163.com)

Abstract: The switched systems composed of several linear Itô stochastic subsystems with time-delay are considered. Based on the multiple Lyapunov functionals approach, the joint effects of switching and time-delay on stability are investigated so as to establish exponential stability conditions in the mean square sense. As noise in principle plays a negative role in preserving stability in the mean square sense, its statistic property is combined into computing a kind of Lyapunov functional, which is in a rather general form, to reduce the conservatism caused by noise itself. A simulation example is given to describe the mutually constraint relation between switching and time-delay, and illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: switched systems; Brownian motion; stability in the mean square sense; time-delay

1 引 言

切换与时滞广泛存在于描述各种自然现象的数学模型中, 从理论角度而言, 人们关心的是它们影响系统动力学行为的方式. 为此, 文献[1-2]通过推广 Razumikhin 方法研究一般混杂系统模型的稳定性问题; 文献[3-4]则基于多 Lyapunov 泛函方法考虑切换与时滞二者之间的相互耦合与制约作用. 这方面成果的理论价值在一定程度上取决于其保守程度, 这种观念从根本上反映出对于切换与时滞影响系统动力学本质的探求. 另一方面, 系统建模中引入噪声乃是反映不规则振动现象及不确定因素的有效方式. 因此, 需考虑状态受到噪声污染并具有时滞的切换系统, 并分析其在均方意义下的稳定性.

与确定系统相比, 建立与之相应的随机系统的理论体系将更为复杂, 因为很多概念与方法潜在地依赖于具体的微积分法则, 致使其难以推广. 以切换系统为例, 描述切换驱动的状态转移过程是准确分析系统动力学的基础^[5-6]; 对于随机系统, 除一维情形外, 一般无法以闭合的形式刻画状态转移过程, 并以此分析其统计特性^[7]. 在随机分析的理论体系中考虑切换现象时通常假定其演化过程满足一定的统计规律, 即所谓的时齐 Markov 过程. 文献[8-9]阐释了这一假设的理论意义在于, 通过相应的无穷小生成算子间接地反映状态演化过程的统计规律, 并由此分析其渐近性质. 反之, 对于作为确定信号的切换而言, 一般只能分析各个子系统在一定时间内的相继作用所导致的状态

收稿日期: 2011-05-26; 修回日期: 2011-10-31.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60974027).

作者简介: 丛岫(1976—), 男, 副教授, 博士, 从事切换系统与随机系统稳定性的研究; 向峥嵘(1969—), 男, 教授, 博士, 从事切换系统与非线性控制系统等研究.

演化的积累效果,并以此来估计其渐近性质^[10-11].

根据在样本空间上建立拓扑的意义不同,随机稳定性的含义也有所不同,常用的包括:依概率稳定、几乎必然稳定和均方稳定.简言之,这些定义之间的差异体现在刻画噪声影响状态演化规律的过程中所使用的数学方法有所不同.在依概率意义下,一般通过定义“状态离开原点某一邻域”这一事件的发生时刻作为“停时”,以此解析这一事件发生的分布律;然而建立确定意义下的“切换”与随机意义下的“停时”之间的因果关系是非常复杂的.在几乎必然意义下,可以较全面地认识噪声对稳定性的影响,如文献[9,12]指出噪声虽然可能导致不稳定,但在特定情况下也可用于镇定不稳定的系统.然而由于切换所产生的不连续性,无从观察多Lyapunov泛函的统计特性,即论证其是否呈上鞅,并以此通过鞅的收敛性质分析状态演化的渐近性质.在均方意义下噪声对稳定性的影响基本上是负面的,然而有赖于多Lyapunov泛函作为函数空间上的距离所具有的独立于微积分法则的几何相容性,可以着眼于分析切换与时滞的相互耦合及制约作用,同时利用Itô微积分法则及噪声的统计特性来减少结果的保守性.

2 问题描述

在阐述问题前先将记号作以说明: $w(t)$ 为定义于概率空间 $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathcal{P}\}$ 上的一维标准化Brown运动; $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 可认为是由 $w(t)$ 生成的参考族并满足所谓的通常条件; $\mathcal{E}\{\cdot\}$ 为数学期望; $\mathcal{C}([-h, 0], \mathbf{R}^n)$ 表示由 $[-h, 0]$ 到 \mathbf{R}^n 上的所有连续函数在一致范数下构成的Banach空间,而 $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}^b([-h, 0], \mathbf{R}^n)$ 表示由所有取值于 $\mathcal{C}([-h, 0], \mathbf{R}^n)$ 且 \mathcal{F}_t 可测的有界随机变量构成的线性空间;“ \star ”表示对称的矩阵元素.

考虑如下具有状态时滞的切换Itô随机系统:

$$\begin{aligned} dx(t) = & \\ & [A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}x(t-h)]dt + \\ & [C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}x(t-h)]dw(t), \quad t \geq 0. \quad (1) \end{aligned}$$

其中:切换信号 $\sigma(t)$ 为取值于指标集 $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, N\}$ 的右连续逐段常值函数, $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 为状态变量, $h > 0$ 为时滞常数, $\{A_i, B_i, C_i, D_i\}_{i \in \mathfrak{S}}$ 为适当维数矩阵.为方便起见,记 $y_i(t) = A_i x(t) + B_i x(t-h)$, $z_i(t) = C_i x(t) + D_i x(t-h)$.

仅以电力系统为例阐释研究对象的实际背景.事实上,系统状态可能受到各次谐波的污染,并在一些传输环节中存在时滞;同时,开关动作导致的系统拓扑与参数变化可对应于不同模型之间的切换.因此,系统(1)在一定程度上体现了电力系统分散协调控制的特点.本文致力于分析在给定切换信号驱动下系

统(1)保持均方稳定的条件,为此给出稳定性定义并根据切换信号的演化规律对其进行分类.

定义 1 给定切换信号 $\sigma(t)$,系统(1)称为是均方指数稳定的,如果存在 $\lambda > 0$ 及 $\kappa > 0$,使得

$$\mathcal{E}\{|x(t; \sigma, \phi)|^2\} \leq \kappa \mathcal{E}\left\{\sup_{-h \leq \theta \leq 0} |\phi(\theta)|^2\right\} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

其中 $x(t; \sigma, \phi)$ 表示系统(1)对应于初始条件 $(0, \phi)$ 的解, $\phi \in \mathcal{C}_{\mathcal{F}_0}^b([-h, 0], \mathbf{R}^n)$.

定义 2 给定 $T_a > 0$,切换信号 $\sigma(t)$ 称为是属于 \mathcal{S}_{T_a} 的,如果其在任意区间 $[t_1, t_2]$ 内的切换次数不大于 $(t_2 - t_1)/T_a$; T_a 称为此类切换信号的平均驻留时间,是表征其变化剧烈程度的物理量.

3 主要结果

基于多Lyapunov泛函方法分析切换随机系统(1)的均方稳定性,构造子系统所对应的Lyapunov泛函如下:

$$V_i(x_t) = \sum_{k=1}^5 V_{ik}(x_t). \quad (2)$$

其中

$$V_{i1}(x_t) = x'(t)P_i x(t), \quad (3)$$

$$V_{i2}(x_t) = 2x'(t)Q_i \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta, \quad (4)$$

$$V_{i3}(x_t) = \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x'(\theta) d\theta R_i \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta, \quad (5)$$

$$V_{i4}(x_t) = \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x'(\theta) S_i x(\theta) d\theta, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} V_{i5}(x_t) = & \\ & \int_{-h}^0 d\theta \int_{t+\theta}^t e^{\alpha(\sigma-t)} \begin{bmatrix} x(\sigma) \\ y_i(\sigma) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ \star & Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\sigma) \\ y_i(\sigma) \end{bmatrix} d\sigma. \quad (7) \end{aligned}$$

上述泛函各项在相应子系统的无穷小生成算子作用下分别有

$$\mathcal{L}V_{i1}(x_t) = 2x'(t)P_i y_i(t) + z_i'(t)P_i z_i(t), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{i2}(x_t) + \alpha V_{i2}(x_t) = & \\ & 2y_i'(t)Q_i \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta + \\ & 2x'(t)Q_i [x(t) - e^{-\alpha h} x(t-h)], \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{i3}(x_t) + \alpha V_{i3}(x_t) = & \\ & 2[x(t) - e^{-\alpha h} x(t-h)]' R_i \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta - \\ & \alpha \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x'(\theta) d\theta R_i \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_{i4}(x_t) + \alpha V_{i4}(x_t) = & \\ & x'(t)S_i x(t) - e^{-\alpha h} x'(t-h)S_i x(t-h), \quad (11) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}V_{i5}(x_t) + \alpha V_{i5}(x_t) =$$

$$h \begin{bmatrix} x(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ \star & Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} - \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y_i(\theta) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ \star & Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y_i(\theta) \end{bmatrix} d\theta. \quad (12)$$

定理 1 对于任意 $i \in \mathfrak{S}$, 如果存在 $\alpha > 0$ 及矩阵 $P_i, Q_i, R_i, S_i, X_i, Y_i, Z_i, L_{i,q}(q=1 \sim 4), M_{i,pq}(p, q=1, 2)$ 满足下列不等式:

$$S_i > 0, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} P_i & Q_i \\ \star & R_i \end{bmatrix} > 0, \quad (14)$$

$$\Xi_i + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha h})\Gamma_i \leq 0, \quad (15)$$

$$\Pi_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i & \Sigma_i \\ \star & A_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(R_i + L_{i3} + L'_{i3}) & L'_{i3} + \alpha L_{i4} \\ \star & L_{i4} + L'_{i4} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (17)$$

则构成切换系统 (1) 的所有子系统在均方意义下均为指数稳定的. 其中的矩阵块及矩阵元素分别为

$$\Xi_i = \begin{bmatrix} \Xi_{i11} & \Xi_{i12} \\ \star & \Xi_{i22} \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \Sigma_{i11} & \Sigma_{i12} \\ \Sigma_{i21} & \Sigma_{i22} \end{bmatrix}, \Gamma_i = \begin{bmatrix} M_{i11} & M_{i12} \\ \star & M_{i22} \end{bmatrix},$$

$$A_i = \begin{bmatrix} X_i + A'_i Z_i A_i + Y_i A_i + \star & Y_i B_i + A'_i Z_i B_i \\ \star & B'_i Z_i B_i \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \Xi_{i11} &= A'_i P_i + P_i A_i + \alpha P_i + L'_{i1} + L_{i1} + Q'_i + Q_i + S_i + C'_i P_i C_i + \\ & h(A'_i Z_i A_i + X_i + Y_i A_i + A'_i Y'_i), \\ \Xi_{i12} &= P_i B_i + C'_i P_i D_i - e^{-\alpha h} Q'_i + L_{i2} - e^{-\alpha h} L'_{i1} + h(A'_i Z_i B_i + Y_i B_i), \\ \Xi_{i22} &= -e^{-\alpha h}(L'_{i2} + L_{i2} + S_i) + D'_i P_i D_i + h B'_i Z_i B_i, \\ \Sigma_{i11} &= A'_i Q_i + R_i + L_{i3} + L_{i4} A_i - \alpha L'_{i1} - L'_{i1} A_i, \\ \Sigma_{i12} &= (L_{i4} - L'_{i1}) B_i, \\ \Sigma_{i21} &= -e^{-\alpha h}(R_i + L_{i3} + L_{i4} A_i) - L'_{i2} A_i - \alpha L'_{i2}, \\ \Sigma_{i22} &= -(e^{-\alpha h} L_{i4} + L'_{i2}) B_i. \end{aligned}$$

证明 由式 (13), (14) 可知 $\sum_{k=1}^4 V_{ik}(x_t)$ 是正定的,

而由

$$\begin{bmatrix} x(\sigma) \\ y_i(\sigma) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ \star & Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\sigma) \\ y_i(\sigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(\sigma) \\ x(\sigma-h) \end{bmatrix}' A_i \begin{bmatrix} x(\sigma) \\ x(\sigma-h) \end{bmatrix} \quad (18)$$

可知, 当式 (16) 成立时 $V_{i5}(x_t)$ 也是正定的.

另一方面, 根据 Itô 分部积分公式^[7]可知 $x(t) - e^{-\alpha h} x(t-h) - \int_{t-h}^t \alpha e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta -$

$$\int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} dx(\theta) = 0. \quad (19)$$

据此, 结合式 (8)~(12) 得到

$$\begin{aligned} \mathcal{L}V_i(x_t) + \alpha V_i(x_t) &= 2y'_i(t) \left[P_i x(t) + Q_i \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta \right] + \\ & 2 \left[x(t) - e^{-\alpha h} x(t-h) \right]' \times \\ & \left[Q_i x(t) + R_i \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta \right] + \\ & \alpha x'(t) P_i x(t) + z'_i(t) P_i z_i(t) + x'(t) S_i x(t) - \\ & e^{-\alpha h} x'(t-h) S_i x(t-h) + \\ & h \begin{bmatrix} x(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ \star & Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y_i(t) \end{bmatrix} - \\ & \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y_i(\theta) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} X_i & Y_i \\ \star & Z_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\theta) \\ y_i(\theta) \end{bmatrix} d\theta - \\ & \alpha \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x'(\theta) d\theta R_i \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta + \\ & 2 \left[x(t) - e^{-\alpha h} x(t-h) - \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} dx(\theta) - \int_{t-h}^t \alpha e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta \right]' \left[L_{i1} x(t) + L_{i2} x(t-h) + \right. \\ & L_{i3} \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta + L_{i4} \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} y_i(\theta) d\theta \left. \right] + \\ & \left[\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha h}) - \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} d\theta \right] \times \\ & \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} M_{i11} & M_{i12} \\ \star & M_{i22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-h) \end{bmatrix}. \quad (20) \end{aligned}$$

此外, Brown 运动在未来时刻的状态与其现在及过去时刻的状态无关, 即满足所谓的 Markov 性, 这是 Brown 运动的基本特性之一. 根据 Markov 性可知

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ \int_{t-h}^t \left[L_{i1} x(t) + L_{i2} x(t-h) + \right. \right. \\ \left. \left. L_{i3} \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta + \right. \right. \\ \left. \left. L_{i4} \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} y_i(\theta) d\theta \right]' e^{\alpha(\theta-t)} z_i(\theta) dw(\theta) \right\} = 0, \end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \left\{ \left[L_{i1} x(t) + L_{i2} x(t-h) + L_{i3} \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta + \right. \right. \\ \left. \left. L_{i4} \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} y_i(\theta) d\theta \right]' \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} dx(\theta) \right\} = \\ \mathcal{E} \left\{ \int_{t-h}^t \left[L_{i1} x(t) + L_{i2} x(t-h) + \right. \right. \\ \left. \left. L_{i3} \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} x(\theta) d\theta + \right. \right. \\ \left. \left. L_{i4} \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} y_i(\theta) d\theta \right]' e^{\alpha(\theta-t)} y_i(\theta) d\theta \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

在式 (20) 两端同取数学期望并将 (21) 代入, 整理后即得

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}\{\mathcal{L}V_i(x_t) + \alpha V_i(x_t)\} = \\ & \mathcal{E}\left\{\eta'(t) \left[\Xi_i + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha h})\Gamma_i\right]\eta(t)\right\} - \\ & \mathcal{E}\left\{\int_{-h}^0 e^{\alpha\theta} \zeta_t'(\theta) \Pi_i \zeta_t(\theta) d\theta\right\} - \\ & \mathcal{E}\left\{\int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} \begin{bmatrix} y_i(\theta) \\ x(\theta) \end{bmatrix}' d\theta \times \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} L_{i4} + L'_{i4} & \star \\ L'_{i3} + \alpha L_{i4} & \alpha(R_i + L_{i3} + L'_{i3}) \end{bmatrix} \times \right. \\ & \left. \int_{t-h}^t e^{\alpha(\theta-t)} \begin{bmatrix} y_i(\theta) \\ x(\theta) \end{bmatrix} d\theta\right\}, \end{aligned} \tag{22}$$

其中的增广系统变量定义为

$$\begin{aligned} \eta(t) &= [x'(t) \quad x'(t-h)]', \\ \zeta_t(\theta) &= [\eta'(t) \quad x'(t+\theta) \quad x'(t+\theta-h)]'. \end{aligned}$$

结合不等式(15)~(17), 由(22)即可推知

$$\mathcal{E}\{\mathcal{L}V_i(x_t)\} \leq -\alpha \mathcal{E}V_i(x_t).$$

于是, 根据 Dynkin 公式有

$$\begin{aligned} \mathcal{E}V_i(x_t) &= \mathcal{E}V_i(x_s) + \mathcal{E} \int_s^t \mathcal{L}V_i(x_\sigma) d\sigma \leq \\ \mathcal{E}V_i(x_s) - \alpha \int_s^t \mathcal{E}V_i(x_\sigma) d\sigma, \quad t \geq s, \end{aligned}$$

进而, 通过 Gronwall 不等式便得

$$\mathcal{E}V_i(x_t) \leq \mathcal{E}V_i(x_s) e^{-\alpha(t-s)}, \quad t \geq s. \tag{23}$$

至此, 给出了子系统均方意义下指数收敛的估计. □

定理 2 给定 $T_a > 0$, 如果存在 $\alpha > 0$ 及一组矩阵 $\{P_i, Q_i, R_i, S_i, X_i, Y_i, Z_i\}_{i \in \mathfrak{S}}$ 满足定理 1 中的条件, 同时存在 $\chi > 0$ 使得对于任意 $i, j \in \mathfrak{S}$ 有下列不等式成立:

$$T_a - \frac{\ln \chi}{\alpha} \geq 0, \tag{24}$$

$$\begin{bmatrix} P_i & Q_i \\ \star & R_i \end{bmatrix} - \chi \begin{bmatrix} P_j & Q_j \\ \star & R_j \end{bmatrix} \leq 0, \tag{25}$$

$$S_i - \chi S_j \leq 0, \tag{26}$$

$$A_i - \chi A_j \leq 0, \tag{27}$$

则系统(1)在所有属于 \mathcal{S}_{T_a} 的切换信号驱动下都保持均方指数稳定.

证明 由定理 1 的结论可知, 所有子系统均为均方指数稳定的. 另外, 由式(25)~(27)有

$$V_i(x_t) \leq \chi V_j(x_t), \quad \forall i, j \in \mathfrak{S}. \tag{28}$$

对于给定切换信号 $\sigma(t)$, 假设其随时间演化过程可以表示为如下序列形式:

$$\{(t_0 = 0, \sigma(t_0)), (t_1, \sigma(t_1)), \dots, (t_i, \sigma(t_i)), \dots\},$$

其中严格递增序列 $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$ 表示切换时刻, 而 $\sigma(t_i) (i = 0, 1, \dots)$ 表示相应的切换信号取值. 由于 $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, 对于 $\forall t \geq 0$ 必然存在整数 $k \geq$

0 使得 $t \in [t_k, t_{k+1})$; 换言之, 在 t 时刻之前发生 k 次切换. 据此, 结合式(23)和(28)即可知

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}V_{\sigma(t_k)}(x_t) \leq \\ & e^{-\alpha(t-t_k)} \mathcal{E}V_{\sigma(t_k)}(x_{t_k}) \leq \\ & \chi e^{-\alpha(t-t_k)} \mathcal{E}V_{\sigma(t_{k-1})}(x_{t_k}) \leq \\ & \chi e^{-\alpha(t-t_{k-1})} \mathcal{E}V_{\sigma(t_{k-1})}(x_{t_{k-1}}) \leq \dots \leq \\ & \chi^k e^{-\alpha(t-t_0)} \mathcal{E}V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}). \end{aligned} \tag{29}$$

由于 $\sigma(t) \in \mathcal{S}_{T_a}$, 必然有 $k \leq (t - t_0)/T_a$, 由此得到

$$\mathcal{E}V_{\sigma(t_k)}(x_t) \leq \mathcal{E}V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0}) e^{(\ln \chi / T_a - \alpha)(t-t_0)}. \tag{30}$$

进而可知

$$\mathcal{E}|x(t)|^2 \leq \frac{\mathcal{E}V_{\sigma(t_0)}(x_{t_0})}{\min_{i=1,2,\dots,N} \{\lambda_{\min}(P_i)\}} e^{-(\alpha - \ln \chi / T_a)t}, \quad t \geq 0,$$

由此根据式(24)即可推知均方指数的稳定性. □

定理 1 和定理 2 给出了关于时滞大小和切换频率的约束条件, 即二者都必须限制在一定范围内; 更为重要的是, 稳定条件表征了时滞与切换之间的相互制约作用. 这种制约关系可由定理 1 和定理 2 中的待选参数 α 得以体现: 若允许较大的时滞, 则要求 α 较小; 反之, 若允许较为剧烈的切换, 则要求 α 较大. 因此, 为满足稳定条件, 需要通过适当选取 α 以便在时滞大小与切换频率之间取得平衡. 由此可见, 尽可能地减少对时滞大小与切换频率限制条件的保守性具有重要意义. 为此, 采用较为一般的泛函构造形式, 并在其解析过程中通过 Itô 分部积分公式引入松弛矩阵实现变量的灵活分配, 以此避免不等式约束. 特别是, 相对于通过 Itô 同构定理来反映噪声影响的方法, 利用 Brown 运动的 Markov 性有效地减少了被噪声污染部分所导致的保守性.

4 仿真算例

考虑由两个线性时滞随机子系统构成的切换系统, 其子系统矩阵分别如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.1 \\ 0 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ -0.2 & -0.4 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.2 & -0.5 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.4 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.3 \\ -0.4 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.2 \\ 0.4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.2 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix}.$$

为说明时滞和切换影响稳定性的相互制约作用, 给出一组仿真结果(如表 1 所示), 并将其拟合为如图 1 所示的曲线. 可见, 在接近原点时曲线呈现出饱和和趋势, 这说明即便 $h \downarrow 0$ 也不能保证在任意切换下的稳定性, 这与已知的结论是相符的. 此外, 利用图

1 所示曲线还可以通过插值法估算其他时滞与平均驻留时间的上界值。

表 1 时滞与平均驻留时间上限 s

h	0.7	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2	2.5
T_a	0.242	0.276	0.348	0.467	0.611	0.771	0.954

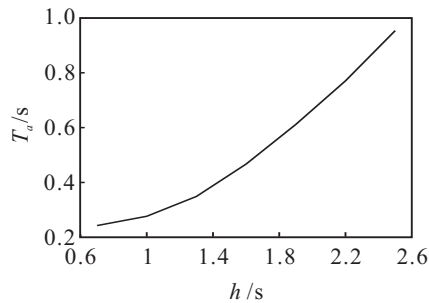


图 1 时滞与平均驻留时间

5 结 论

基于多 Lyapunov 泛函方法研究具有状态时滞的切换 Itô 随机系统的稳定性问题, 所建立的均方意义下指数稳定性条件着重于刻画切换与时滞对于稳定性的共同影响. 在解析证明过程中, 通过 Itô 微积分法则引入适当数量的松弛矩阵并利用噪声的统计性质以减少结论的保守性. 仿真算例验证了本文方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Yuan R, Jing Z, Chen L. Uniform asymptotic stability of hybrid dynamical systems with delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(2): 344-348.
- [2] Liu X, Shen J. Stability theory of hybrid dynamical systems with time delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(4): 620-625.
- [3] Sun X M, Zhao J, Hill D J. Stability and L_2 -gain analysis for switched delay system: A delay-dependent method[J]. Automatica, 2006, 42(10): 1769-1774.
- [4] Lin J X, Fei S M. Robust exponential admissibility of uncertain switched singular time-delay systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(12): 1773-1779.
- [5] Sun Z, Ge S S, Lee T H. Controllability and reachability criteria for switched linear systems[J]. Automatica, 2002, 38(5): 775-786.
- [6] Geromel J C, Colaneri P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems[J]. SIAM J of Control Optimization, 2006, 45(5): 1915-1930.
- [7] Mao X. Stochastic differential equations and their Applications[M]. Chichester: Horwood Publisher, 1997.
- [8] Feng X, Loparo K A, Ji Y, et al. Stochastic stability properites of jump linear systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(1): 38-53.
- [9] Hu G, Liu M, Mao X, et al. Noise suppresses exponential growth under regime switching[J]. J of Mathematical Analysis Application, 2009, 355(2): 783-795.
- [10] Wu L, Ho D W C, Li C W. Stabilization and performance synthesis for switched stochastic systems[J]. IET Control Theory Application, 2010, 4(10): 1877-1888.
- [11] Feng W, Tian J, Zhao P. Stability analysis of switched stochastic systems[J]. Automatica, 2011, 47(1): 148-157.
- [12] Mao X. Stability and stabilization of stochastic differential delay equations[J]. IET Control Theory Application, 2007, 1(6): 1551-1566.
- [17] 高峰, 秦翼鸿, 徐国禹. 互联电力系统模糊负荷频率控制器的优化设计[J]. 中国电机工程学报, 1995, 15(6): 384-390.
(Gao F, Qin Y H, Xu G Y. Optimum design of fuzzy load-frequency controllers for interconnected power systems[J]. Proc of the CSEE, 1995, 15(6): 384-390.)
- [18] Gao W B, Wang Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.
- [19] 米阳, 潘伟, 井元伟. 一类不确定时滞系统的模糊滑模控制[J]. 控制与决策, 2006, 21(11): 1280-1288.
(Mi Y, Pan W, Jing Y W. Fuzzy sliding mode control for a class of uncertain time-delay systems[J]. Control and Decision, 2006, 21(11): 1280-1288.)
- [20] Ju-Jang Lee, Yangsheng Xu. A new method of switching surface design for multivariable variable structure systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(2): 414-419.

(上接第1884页)