

# 推力器布设对控制误差的影响分析

岳晓奎, 段辰璐

(西北工业大学航天学院, 西安 710072)

**摘 要:** 航天器推力系统发动机数目及其构型的选择直接影响控制系统的精度和完成要求任务的燃料消耗量。对航天器六自由度控制的推力分配问题进行了研究,参考卫星导航系统中几何精度衰减因子的定义,提出了发动机构型精度衰减因子的概念,用于定义发动机相对几何关系引起的执行误差与分配误差间的比例关系。通过矩阵理论分析得到了构型精度衰减因子随参与分配发动机数目增加而增加的结论,并通过仿真计算对相关结论进行了验证,为航天器发动机数目及其构型的选择提供了理论参考。

**关键词:** 推力器布设; 推力分配; 构型精度衰减因子

**中图分类号:** V448.22      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1000-1328(2011)07-1522-05

**DOI:** 10.3873/j.issn.1000-1328.2011.07.013

## Analysis of Effect of Thruster Configuration on Control Error

YUE Xiao-kui, DUAN Chen-lu

(School of Astronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The control accuracy as well as the propellant consumption is directly affected by the number of thrusters and their configuration. This paper makes a research on the thrust allocation scheme of a spacecraft. On the analogy of GDOP used in satellite navigation system, the concept of thruster configuration dilution of precision (CDOP) is proposed to define the ratio between the thrust allocation error and the error caused by the thruster configuration. The conclusion that the CDOP increases as the number of thrusters is obtained by analysis of matrix theory. Finally, the CDOP concept and the conclusion presented are validated by a simulation, and can provides a reference for the selection of the number of the thrusters and their configuration.

**Key words:** Thruster configuration; Thrust allocation; Configuration dilution of precision

### 0 引 言

进入 21 世纪以来,随着航天技术的快速发展,空间机动与在轨操作技术日益引起人们的重视。美国近年来诸如 DART、轨道快车等多项计划均瞄准该领域的各项关键技术展开演示验证<sup>[1-2]</sup>。

主动航天器轨道和姿态的精确控制是完成快速、精确的空间机动和各类复杂在轨操作(例如:在轨加注、更换和抓捕)任务的前提,这就需要对航天器进行六自由度实时、精确控制,控制分配问题正逐步成为航天器控制系统设计的关键技术之一。

控制分配方法是由控制算法给出的期望控制量出发,在约束条件和最优目标下,将期望控制量在冗余配置的执行机构间进行分配,使执行机构实际控制输出出尽可能与期望控制量相吻合的一种控制设计技术<sup>[3]</sup>。

Servidia P A, Pena R S 等<sup>[4-6]</sup>对航天器实现六自由度控制需要的最少推力器数目展开了探讨,分析了在单个推力器故障的情况下,完成六自由度控制的推力器数目。唐生勇、张世杰<sup>[3]</sup>以燃料消耗最少为目标,采用伪逆法和线性规划算法进行了六自由度控制的分配。陈玮、解永春<sup>[7]</sup>以燃料消耗和控

制精度作为控制分配的目标,采用非线性多目标规划进行了控制量的分配。上述文献要么对实现航天器六自由度的航天器最少的数目或单个推力器故障情况下推力器的最少数目展开讨论,要么是对控制量分配的算法进行了研究。并没有对航天器实现六自由度控制时发动机数目、相对几何关系对分配误差的影响展开研究和讨论。

本文参考卫星导航领域几何精度衰减因子的概念,定义了构型精度衰减因子,用于描述参与分配发动机相对几何关系引起的发动机执行误差与分配误差间的比例关系,并通过理论分析,得到了构型精度衰减因子随参与分配的发动机数目增加而增加的结论。该因子可以作为控制分配时,选取最佳发动机组合的依据。同时,构型精度衰减因子随着发动机数目增加而增加的结论对参与分配的发动机数目进行了限制。

### 1 推力分配问题的数学模型

推力分配问题是将期望的控制力和控制力矩在推力器间进行动态分配的发动机控制技术。

设有  $n$  个推力器安装于航天器上,在体坐标系  $Ox_b y_b z_b$  (主轴与航天器三个惯性主轴重合) 下,它们相对航天器质心的位置矢量矩阵为  $[d_1, d_2, \dots, d_n]$ , 推力器所产生的单位推力矩阵为  $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ 。

若第  $i$  个推力器所产生的推力大小为  $F_i (i = 1, 2, \dots, n)$ , 则它对航天器质心产生的作用力  $U_i$  为:

$$U_i = F_i e_i$$

则,其产生绕质心的作用力矩为:

$$T_i = (\tilde{d}_i e_i) F_i$$

其中,  $\tilde{d}_i$  为  $d_i$  的斜对称矩阵。

设所有推力器产生的推力组成列阵  $F = [F_1, F_2, \dots, F_n]^T$ , 则其在航天器质心处合成的作用力矩可以表示为:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n (\tilde{d}_i e_i) F_i = AF \quad (1)$$

所产生的作用力可以表示为:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n F_i e_i = BF \quad (2)$$

式中,  $A$  为所有推力器的单位推力矢量对航天器的力矩矩阵:

$$A = [\tilde{d}_1 e_1, \tilde{d}_2 e_2, \dots, \tilde{d}_n e_n] \quad (3)$$

$B$  为所有推力器的单位推力矢量对航天器的力矩阵:

$$B = [e_1, e_2, \dots, e_n] \quad (4)$$

令  $C = [T_c; U_c]$ ,  $D = [A; B]$ 。  $T_c$  为期望控制力矩,  $U_c$  为期望控制力。则推力分配的数学描述为:

$$C = DF \quad (5)$$

关于推力分配问题数学模型的详细描述请参阅文献[3]。

### 2 构型精度衰减因子

根据文献[5],在进行航天器六自由度控制分配时,至少需要 7 个发动机。一般情况下,在进行航天器的控制分配时,可同时参与分配的航天器数目是多于 7 个的。现在的问题是怎样在所有安装的发动机中,选择适当的 7 个发动机。当发动机误差一定时,发动机间相对几何关系的差异将直接影响分配误差。所以应该选择相对几何位置最好的 7 个发动机参与分配,保证分配误差最小。

#### 2.1 构型精度衰减因子的定义

为了描述发动机间的相对几何关系,引入构型精度衰减因子的概念。由  $C = DF$  可知,发动机的误差  $\delta F$ , 必将会引起分配误差  $\delta C$ , 可以表达为

$$\delta C = D\delta F \quad (6)$$

相应的协方差可以表示为

$$\text{cov}\delta C = D(\text{cov}\delta F)D^T \quad (7)$$

假设发动机误差均值为零,且对应的方差为  $\sigma^2$ , 则

$$\text{cov}\delta F = \sigma^2 I \quad (8)$$

$$\text{cov}\delta C = \sigma^2 (DD^T)$$

$$= \sigma^2 \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} & h_{16} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} & h_{26} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} & h_{36} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} & h_{45} & h_{46} \\ h_{51} & h_{52} & h_{53} & h_{54} & h_{55} & h_{56} \\ h_{61} & h_{62} & h_{63} & h_{64} & h_{65} & h_{66} \end{bmatrix} \quad (9)$$

另一方面,根据协方差的定义,  $\text{cov}\delta F$  可以表示为

$$\text{cov}\delta\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sigma_{T_x}^2 & \sigma_{T_{xy}} & \sigma_{T_{xz}} & \sigma_{T_x U_x} & \sigma_{T_x U_y} & \sigma_{T_x U_z} \\ \sigma_{T_{yx}} & \sigma_{T_y}^2 & \sigma_{T_{yz}} & \sigma_{T_y U_x} & \sigma_{T_y U_y} & \sigma_{T_y U_z} \\ \sigma_{T_{zx}} & \sigma_{T_{zy}} & \sigma_{T_z}^2 & \sigma_{T_z U_x} & \sigma_{T_z U_y} & \sigma_{T_z U_z} \\ \sigma_{U_x T_x} & \sigma_{U_x T_y} & \sigma_{U_x T_z} & \sigma_{U_x}^2 & \sigma_{U_x U_y} & \sigma_{U_x U_z} \\ \sigma_{U_y T_x} & \sigma_{U_y T_y} & \sigma_{U_y T_z} & \sigma_{U_y U_x} & \sigma_{U_y}^2 & \sigma_{U_y U_z} \\ \sigma_{U_z T_x} & \sigma_{U_z T_y} & \sigma_{U_z T_z} & \sigma_{U_z U_x} & \sigma_{U_z U_y} & \sigma_{U_z}^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

矩阵的中心元素是  $T_{cx}, T_{cy}, T_{cz}, U_{cx}, U_{cy}, U_{cz}$  的方差和协方差。显然,上面两式的对应元素相等,可得

$$\begin{aligned} & (h_{11} + h_{22} + h_{33} + h_{44} + h_{55} + h_{66})^{\frac{1}{2}} \\ &= (\sigma_{T_{cx}}^2 + \sigma_{T_{cy}}^2 + \sigma_{T_{cz}}^2 + \sigma_{U_{cx}}^2 + \sigma_{U_{cy}}^2 + \sigma_{U_{cz}}^2)^{\frac{1}{2}} / \sigma \\ &= \text{tr}(\mathbf{D}\mathbf{D}^T)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (11)$$

以上表达式称为构型精度衰减因子,记作: CDOP(Configuration Dilution of Precision)。

CDOP 反映了发动机相对几何关系造成的执行误差与分配误差间的比例系数。

### 2.2 发动机数目对构型精度衰减因子的影响

从所有发动机中选择参加控制分配发动机的数目不同,构型精度衰减因子的取值也不同,下面分析构型精度衰减因子与参与分配发动机数目之间的关系。

设  $\mathbf{D}_m$  为选择  $m$  个发动机分配时的分配矩阵,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0.4 & -0.4 \\ 0.2 & -0.2 & 0.4 & -0.4 & -0.2 & 0.2 & -0.4 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

而所有推力器的单位推力产生的力矩阵为:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

### 3.2 仿真结果与分析

在上述仿真条件下,冗余配置的发动机总数目为 16,分别对 7 至 16 个发动机数目进行构型精度衰减因子的计算,并采用文献[3]中的期望控制力和期望控制力矩如表 1 所示。在保证构型矩阵满秩的条件下,通过伪逆法<sup>[3]</sup>进行控制量分配,对得到的分配值加上随机误差,模拟发动机的执行误差。分配误差定义为  $\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{D}(\mathbf{F} + \delta\mathbf{F})$ 。

从  $m$  颗卫星中去掉第  $i$  个,得到  $m - 1$  个发动机的分配矩阵  $\mathbf{D}_{m-1}^i$ ,两者有如下关系:

$$\mathbf{D}_m \mathbf{D}_m^T = \mathbf{D}_{m-1}^i (\mathbf{D}_{m-1}^i)^T + \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T \quad (12)$$

其中:  $\mathbf{h}_i = [\tilde{\mathbf{d}}_i \mathbf{e}_i; \mathbf{e}_i]$  为第  $i$  个发动机的构型向量。

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{D}_m \mathbf{D}_m^T) &= \text{tr}(\mathbf{D}_{m-1}^i (\mathbf{D}_{m-1}^i)^T + \mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T) \\ &= \text{tr}(\mathbf{D}_{m-1}^i (\mathbf{D}_{m-1}^i)^T) + \text{tr}(\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T) \end{aligned} \quad (13)$$

则有

$$\text{CDOP}_m^2 = (\text{CDOP}_{m-1}^i)^2 + \text{tr}(\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T) \quad (14)$$

而  $\text{tr}(\mathbf{h}_i \mathbf{h}_i^T) > 0$ ,故  $\text{CDOP}_m^2 > (\text{CDOP}_{m-1}^i)^2$ 。

上式表明 CDOP 随参与分配的发动机数目的增加而单调增加。

### 3 仿真实验

为了对文中定义的构型精度衰减因子特性及其与发动机数目的关系进行验证,完成了一系列的仿真分析。

#### 3.1 仿真条件

对文献[3]中的推力器配置进行改动,发动机的组合形式不变,单个推力器最大推力  $F_i^m = 0.04\text{N}$ , $x$  轴上发动机距质心的力臂为  $L_x = 0.4\text{m}$ , $y$  轴上发动机距质心的力臂为  $L_y = 0.2\text{m}$ 。所有推力器的单位推力所产生的力矩阵为:

表 1 期望控制量

Table 1 Desird output of controller

序号	期望控制量
1	$[0 \ 0 \ 0 \ 0.01 \ 0.01 \ 0.02]^T$
2	$[0.003 \ 0.004 \ 0.005 \ 0 \ 0 \ 0]^T$
3	$[0.003 \ 0.004 \ 0.005 \ 0.01 \ 0.02 \ 0.03]^T$
4	$[0.004 \ 0.001 \ 0.003 \ 0.01 \ 0.02 \ 0.01]^T$
5	$[0.004 \ 0.001 \ 0.012 \ 0.08 \ 0.02 \ 0.01]^T$

表 2 不同构型的仿真结果

Table 2 Simulation of various configurations

发动机数	7	7	8	8	9	9
CDOP	2.7857	2.8071	2.9866	3.0067	3.1749	3.1937
构型个数	3584	7296	7296	384	8832	128
1	$4.8101 \times 10^{-13}$	$4.9157 \times 10^{-13}$	$5.5002 \times 10^{-13}$	$5.6416 \times 10^{-13}$	$6.1886 \times 10^{-13}$	$6.4532 \times 10^{-13}$
2	$4.7937 \times 10^{-13}$	$4.9294 \times 10^{-13}$	$5.4999 \times 10^{-13}$	$5.6075 \times 10^{-13}$	$6.182 \times 10^{-13}$	$6.4214 \times 10^{-13}$
3	$4.8010 \times 10^{-13}$	$4.9629 \times 10^{-13}$	$5.4972 \times 10^{-13}$	$5.6486 \times 10^{-13}$	$6.1876 \times 10^{-13}$	$6.3702 \times 10^{-13}$
4	$4.7998 \times 10^{-13}$	$4.9429 \times 10^{-13}$	$5.4885 \times 10^{-13}$	$5.659 \times 10^{-13}$	$6.1788 \times 10^{-13}$	$6.418 \times 10^{-13}$
5	$4.7937 \times 10^{-13}$	$4.9035 \times 10^{-13}$	$5.487 \times 10^{-13}$	$5.6741 \times 10^{-13}$	$6.1967 \times 10^{-13}$	$6.3345 \times 10^{-13}$

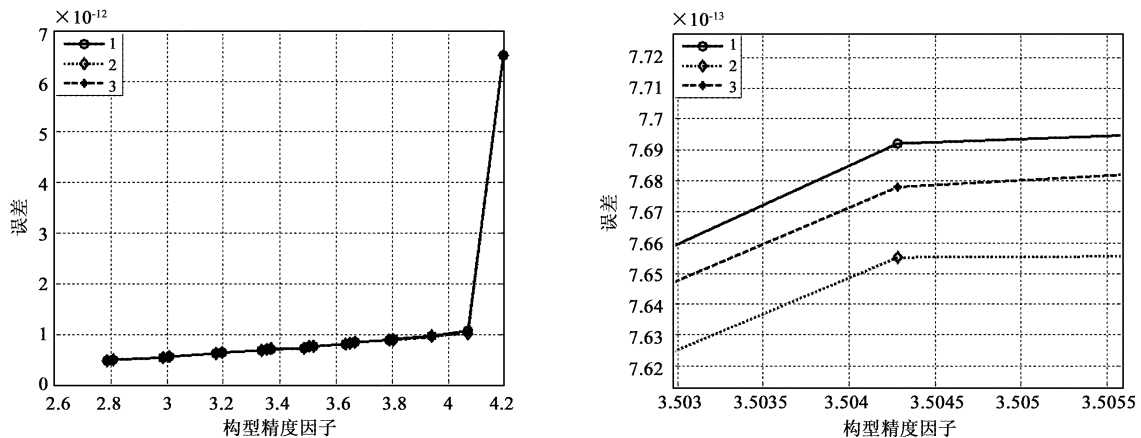


图 1 期望控制量下构型精度衰减因子与分配误差关系

Fig. 1 The relation between CDOP and allocate error

由表 2 可知,在参与分配的发动机数目一定的情况下,由于发动机间相对位置关系不同,构型精度因子也就不尽相同。随着构型精度衰减因子 CDOP 的增大,分配误差也在增大,图 1 也可以直观地看到相同的趋势。证明了构型精度衰减因子是由发动机间相对几何关系造成的执行误差与分配误差间的比例系数。在实际控制量分配中,应该以构型精度因子为依据,选取合适的发动机组合参与控制量的分配。

另外,表中数据显示随着参与分配的发动机数目的增加,构型精度衰减因子 CDOP 也在相应的增加,亦即分配误差在增大,从而证明了 2.2 节中的结论。因此,从减小分配误差的角度考虑,参与分配的发动机数目应该尽可能得少。

#### 4 结论

为解决航天器六自由度控制的推力分配问题,本文类比卫星导航系统的几何精度衰减因子,定义了一个构型精度衰减因子,该因子反映了由参与分配的发动机相对几何关系造成的执行误差与分配误差间的

比例系数。它与坐标系的选取无关,可以作为控制分配选取相对位置最佳的发动机组合的依据,而且还得到了衰减因子随参与分配发动机数目的增加而单调增加的结论,因此,从减小分配误差的角度考虑,参与控制分配的发动机数目应该尽可能少。

下一步的工作可以考虑如何得到最佳构型精度因子的发动机选择优化算法,以及发动机数目、构型与燃料消耗之间的关系。

#### 参 考 文 献

[1] Rumford T E. Demonstration of autonomous rendezvous technology (DART) project summary [C]. Core Technologies for Space Systems Conference, New York, USA, Nov. 28 - 30, 2002.

[2] 林来兴. 美国“轨道快车”计划中的自主空间交会对接技术 [J]. 国际太空, 2005, 2: 23 - 27. [Lin Lai-xing. Autonomous rendezvous and docking technology of ‘Orbital Express’ [J]. Space International, 2005, 2: 23 - 27.]

[3] 唐生勇, 张世杰, 陈闽, 等. 交会对接航天器推力分配算法研究 [J]. 宇航学报, 2008, 29(4): 1120 - 1124. [Tang Sheng-yong, Zhang Shi-jie, Chen Min, et al. Research on a thrust allocation algorithm of spacecraft in RVD [J]. Journal of Astronautics,

- 2008, 29(4):1120-1124. ]
- [4] Pena R S, Alonso R, Anigstein P. Robust optimal solution to the attitude/force control problem [ J ]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2000, 36(3): 784-792.
- [5] Servidia P A, Pena R S. Space thruster control allocation problems [ J ]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(2):245-249.
- [6] Servidia P A, Pena R S. Thruster design for position/attitude control of spacecraft [ J ]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(4):1172-1180.
- [7] 陈玮,解永春. 基于多目标规划的交会对接推力器指令分配方法[ J ]. 航天控制,2007,25(3):33-37. [ Chen Wei, Xie Yongchun. A method of command distributing of thrusters in rendezvous and docking based on multi-objective programming[ J ]. Aerospace Control, 2007, 25(3):33-37. ]
- [8] 丛丽, Ahmed I A, 谈展中. 卫星定位导航因子的分析和仿真[ J ]. 电子学报,2006,34(12): 2204-2208. [ Cong Li, Ahmed I A, Tan Zhan-zhong. Analysis and simulation of the GDOP of satellite navigation[ J ]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(12): 2204-2208. ]
- [9] 袁建平, 罗建军, 岳晓奎, 等. 卫星导航原理与应用[ M ]. 北京:中国宇航出版社,2004:150-152.
- 作者简介:岳晓奎(1970-),男,教授,博士生导师,研究方向为航天器动力学与控制、视觉相对导航。  
通信地址:西北工业大学 251 信箱(710072)  
电话:(029)88493685  
E-mail:xkyue@nwpu.edu.cn

(编辑:曹亚君)