第32卷 第12期
2011年12月

宇 航 学 报
Journal of Astronautics

Vol. 32 No. 12
December 2011

多智能体系统旋转一致控制

陈小平[1]，徐红兵[2]，李　彤[3]

（1. 电子科技大学空天科学技术研究院，成都 610054；
2. 电子科技大学自动化工程学院，成都 610054；3. 空军装备研究院，北京 100085）

摘　要：研究了多智能体系统的旋转一致控制问题。在存在时滞条件下提出了一个新的控制协议，利用Lyapunov理论，分析了闭环系统的稳定性，给出了通信拓扑结构不断切换条件下，系统实现旋转一致的条件。最后，通过仿真验证了所得的理论结果。

关键词：多智能体系统；旋转一致控制

中图分类号：TP18　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000-1328(2011)12-2532-05

DOI：10.3873/j.issn.1000-1328.2011.12.010

Rotating Consensus Control of Multi-Agent System

CHEN Xiao-ping[1], XU Hong-bing[2], LI Tong[3]

(1. The Institute of Astronautics and Aeronautics, UESTC, Chengdu 610054, China;
2. The School of Computer Science and Engineering, UESTC, Chengdu 610054, China;
3. Equipment Academy of Air Force, Beijing 100085, China)

Abstract: The rotating consensus control problem of a multi-agent system is investigated in this paper. A new control protocol with time-delay is proposed. With the help of Lyapunov theory, the stability analysis of the closed-loop system is performed and a condition is derived to make all agents achieve a desired rotating consensus with switching topologies and time-delay. Finally, a numerical example is included to illustrate obtained theoretical results.

Key words: Multi-agent system; Rotating consensus control

0 引　言

近年来，多智能体系统受到了越来越多的关注。多智能体系统是由多个可自主计算的智能体组成的系统，具有自主性、分布性及协调性等特点，在系统中每个智能体仅需与邻居智能体交换信息，便能实现一个整体的任务。多智能体系统可应用于生物、经济、工程等领域[1-11]。在多智能体系统的应用中，智能体常常保持一定的通信拓扑结构，并围绕一个共同点做圆周运动，比如，卫星编队飞行，航天器对接并绕地球公转等。现有结果对此类问题研究的并不多，仅最近，Sepulchre 等人[6]基于水下机器人的应用，提出了旋转编队控制问题，并给出了控制律以使每个智能体能够实现恒速编队控制。与此同时，Pavone 等人[7]研究了一类环形编队运动，给出了一条循环跟踪策略。随后，Ren[7]将旋转变换矩阵引入到已有一致性算法，把 Pavone 等人[8]所获结果推广到了三维空间。受文献[6-8]所启发，Lin 等人[9]研究了2维空间中的旋转编队控制问题，所得结果与文献[6-8]不同，期望旋转编队可以任意设定，且多智能体闭环动态系统对控制参数鲁棒。

本文在 Lin 等人的工作的基础上，第一次研究了多智能体系统的旋转一致 H_∞ 控制问题，利用 Lyapunov 理论，分析了协议的稳定性，并给出了多智能体系统实现满足 H_∞ 性能的旋转一致性的条件。

收稿日期：2011-06-13；　修回日期：2011-07-18
基金项目：国家863计划项目（2009AA706060501）

1 图论基础

本节介绍下文中将用到的图论知识[12]。无向图 G 是一个三元组$(\nu,\varepsilon,\boldsymbol{A})$,其中$\nu=\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_n\}$ 称为 G 的节点集,其元素称为 G 的节点;$\varepsilon\subseteq\nu\times\nu$ 称为 G 的边集,其元素称为 G 的边;$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 称为邻接矩阵,$\boldsymbol{A}$ 中的元素非负,且 $a_{ii}=0$, $a_{ij}=a_{ji}$。G 中节点的下标值在集合 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 中取值, 边表示为 $\boldsymbol{e}_{ij}=(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j)$。$\boldsymbol{e}_{ij}\in\boldsymbol{\varepsilon}$ 当且仅当 $\boldsymbol{e}_{ji}\in\boldsymbol{\varepsilon}$,节点 $\boldsymbol{v}_i$ 的邻集表示为 $\boldsymbol{N}_i=\{\boldsymbol{v}_j\in\boldsymbol{v}:(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_j)\in\boldsymbol{\varepsilon}\}$,节点 $\boldsymbol{v}_i$ 的出度定义为 $\deg_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{v}_i)=\sum_j a_{ij}$, 节点的出度矩阵定义为 $\boldsymbol{\Delta}=\mathrm{diag}(\deg_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{v}_1),\deg_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{v}_2),\cdots,\deg_{\mathrm{out}}(\boldsymbol{v}_n))$,图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{\Delta}-\boldsymbol{A}$。如果节点 $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}_j$ 间存在一组边$(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_{k1})$,$(\boldsymbol{v}_{k1},\boldsymbol{v}_{k2})$,$\cdots$,$(\boldsymbol{v}_{kl},\boldsymbol{v}_j)$, 则称从节点 $\boldsymbol{v}_i$ 到节点 $\boldsymbol{v}_j$ 有路。如果图 G 中任意两节点都是连通的,则称无向图 G 是连通的。

2 模型描述

考虑由 n 个智能体组成的多智能体系统。将每个智能体看作无向图 G 中的一个节点。每条边$(s_i,s_k)\in\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示智能体 s_i 和 s_k 之间的一条信息链接。假定每个智能体具有如下动态特性:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}}_i&=\boldsymbol{v}_i\\ \dot{\boldsymbol{v}}_i&=\boldsymbol{u}_i\end{aligned}\tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{r}_i$, $\boldsymbol{v}_i\in\mathbf{C}$ 表示智能体 s_i 的位置和速度,$\boldsymbol{u}_i(t)\in\mathbf{C}$ 表示智能体 s_i 的控制输入(协议)。

在实际应用中,智能体常常需要保持一定的通信拓扑结构并围绕一个共同的点运动,比如,卫星编队围绕地球旋转和航天器交会对接等。为描述此类问题,作如下定义:

定义 1. 称多智能体系统(1)实现了旋转一致,当对任意 $i,k\in I$ 满足以下条件

$$\lim_{t\to+\infty}[\boldsymbol{v}_i(t)-\boldsymbol{v}_k(t)]=0\tag{2}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left[\left(\boldsymbol{r}_i(t)+\mathrm{j}\frac{\boldsymbol{v}_i(t)}{\boldsymbol{\omega}}\right)-\left(\boldsymbol{r}_k(t)+\mathrm{j}\frac{\boldsymbol{v}_k(t)}{\boldsymbol{\omega}}\right)\right]=0\tag{3}$$

$$\lim_{t\to+\infty}[\dot{\boldsymbol{v}}_i(t)-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{v}_i(t)]=0\tag{4}$$

其中,ω 表示期望的角速度。(为方便下文中的分析,假定 $\omega=1$。)

在定义 1 中,$\boldsymbol{r}_i(t)+\mathrm{j}\dfrac{\boldsymbol{v}_i(t)}{\boldsymbol{\omega}}$ 表示智能体在 t 时刻运动轨迹的圆心,条件(3) 表示所有智能体的运动轨迹的圆心趋于相同,条件(4) 表示智能体最终以角速度 ω 运动。综合以上分析,在条件(2) ~ (4)下,所有智能体最终汇聚到一点,并以角速度 ω 围绕共同的点运动。

3 协 议

考虑到在实际应用中的信息传输常常会有延迟,为使多智能体系统能够实现旋转一致,我们采用如下协议:

$$\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{u}_{i1}+\boldsymbol{u}_{i2}\tag{5}$$

其中,

$$\boldsymbol{u}_{i1}=\mathrm{j}\boldsymbol{v}_i$$

且

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_{i2}=&-\sum_{s_k\in N_i}a_{ij}[\boldsymbol{v}_i(t-\tau)-\boldsymbol{v}_k(t-\tau)]-\\&\sum_{s_k\in N_i}a_{ij}[(\boldsymbol{r}_i(t-\tau)+\mathrm{j}\boldsymbol{v}_i(t-\tau))-\\&(\boldsymbol{r}_k(t-\tau)+\mathrm{j}\boldsymbol{v}_k(t-\tau))],\ i\in I\end{aligned}$$

定义 $\boldsymbol{c}_i=\boldsymbol{r}_i+\mathrm{j}\boldsymbol{v}_i$, $\forall i\in I$, $\boldsymbol{\xi}=[\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{c}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n,\boldsymbol{c}_n]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\mathrm{j}&-\mathrm{j}\\0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\-1&1+\mathrm{j}\end{bmatrix}$。

利用协议(5),系统(1)的闭环动态为:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t)=(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{\xi}(t)-(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\xi}(t-\tau)\tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{L}_\sigma$ 表示图 G 的 Laplacian 阵,$\boldsymbol{\sigma}$ 表示图 G 的通信拓扑结构是不断切换的,$\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 维单位矩阵。

注 1. 本文所提出协议仅需要利用智能体相对位置的信息,这与文献[9]不同,所提出的协议需要同时获取智能体相对速度信息和相对位置信息。

4 主要稳定性结果

引理 1. 令 $\boldsymbol{\alpha}(t)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{r}_i(0)+\int_0^t\boldsymbol{\beta}(s)\mathrm{d}s$, $\boldsymbol{\beta}(t)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n\boldsymbol{v}_i(0)\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}$,$\boldsymbol{\delta}(t)=\boldsymbol{\xi}(t)-\boldsymbol{I}_n\otimes[\boldsymbol{\alpha}(t)\quad\boldsymbol{\alpha}(t)+\mathrm{j}\boldsymbol{\beta}(t)]^{\mathrm{T}}$,则:$(\boldsymbol{I}_n^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{\delta}(t)=0$ 且系统(6) 等价于:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(t)=(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{\delta}(t)-(\boldsymbol{L}\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}(t-\tau)\tag{7}$$

另外，所有圆心的平均值为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i(0)+\mathrm{j}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i(0)$。$\boldsymbol{1}_n=[1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$，1 的个数为 n。引理 1 参考了文献[9]。

证. 考虑到图 G 是无向的，有 $\sum_{i=1}^{n}\dot{\boldsymbol{v}}_i(t)=\mathrm{j}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i(t)$，由此可得，$\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i(0)$。即 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i(t)=\boldsymbol{\beta}(t)$。进而 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i(t)=\boldsymbol{\alpha}(t)$。显然，$(\boldsymbol{1}_n^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{\delta}(t)=0$。通过简单计算可得，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\boldsymbol{r}}_i(t)+\mathrm{j}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dot{\boldsymbol{v}}_i(t)=0$。因而，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i(t)+\mathrm{j}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i(t)$ 是一个不变量且等于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{r}_i(0)+\mathrm{j}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{v}_i(0)$。进而可得，系统(6)等价于(7)。

引理 2. 考虑矩阵 $\boldsymbol{\Psi}=n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{1}_n\boldsymbol{1}_n^{\mathrm{T}}$。存在正交矩阵 $\boldsymbol{U}\in\mathbf{R}^{n\times n}$ 使得

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(n\boldsymbol{I}_{n-1},0)$$

且 $\boldsymbol{U}$ 最后一列为 $\frac{\boldsymbol{1}_n}{\sqrt{n}}$，另外，对于给定 Hermite 矩阵 $\boldsymbol{\Xi}$，如果满足 $\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{1}_n=0$，则有

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Xi}\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(*,0)$$

定理 1. 考虑无向变结构多智能体系统。假定图 G 保持连通，利用协议(2)，多智能体系统(1)可实现旋转一致，如果存在正定 Hermite 矩阵 $\bar{\boldsymbol{P}},\bar{\boldsymbol{Q}}\in\mathbf{C}^{2n\times 2n}$ 满足

$$\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{12} & \boldsymbol{H}_{13}\\ \boldsymbol{H}_{12}^{*} & \boldsymbol{H}_{22} & \boldsymbol{0}_{(n-1)\times n}\\ \boldsymbol{H}_{13}^{*} & \boldsymbol{0}_{n\times(n-1)} & -\frac{\boldsymbol{R}}{\tau}\end{bmatrix}<0 \tag{8}$$

其中，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{11}=&\bar{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{I}_{n-1}\otimes\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{I}_{n-1}\otimes\boldsymbol{A}^{*})\bar{\boldsymbol{P}}-\\&\bar{\boldsymbol{P}}(\bar{\boldsymbol{L}}_{\sigma}\otimes\boldsymbol{B})-(\bar{\boldsymbol{L}}_{\sigma}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^{*})\bar{\boldsymbol{P}}+\\&\tau(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})+\bar{\boldsymbol{Q}}\\ \boldsymbol{H}_{12}=&-\tau(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})^{*}\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\,\bar{\boldsymbol{L}}_{\sigma}\otimes\boldsymbol{B})\\ \boldsymbol{H}_{13}=&\bar{\boldsymbol{P}}(\bar{\boldsymbol{L}}_{\sigma}\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{B})\\ \boldsymbol{H}_{22}=&-\tau(\bar{\boldsymbol{L}}_{\sigma}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^{*})\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\,\bar{\boldsymbol{L}}_{\sigma}\otimes\boldsymbol{B})-\bar{\boldsymbol{Q}}\end{aligned}$$

$\bar{\boldsymbol{U}}$ 表示 $\boldsymbol{U}$ 的前 $n-1$ 列，$\bar{\boldsymbol{L}}_{\sigma}=\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_{\sigma}\bar{\boldsymbol{U}}$。

证. 针对系统(6)，构造一个公共 Lyapunov-Krasovskii 函数：

$$V=\boldsymbol{\delta}^{*}(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\delta}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\delta}^{*}(s)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\delta}(s)\mathrm{d}s+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{\delta}}^{*}(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\delta}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta$$

其中，$\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}\in\mathbf{R}^{2n\times 2n}$ 半正定的 Hermite 矩阵且满足 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{1}_n\otimes\boldsymbol{I}_2)=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{1}_n\otimes\boldsymbol{I}_2)=0$，$\mathrm{rank}(\boldsymbol{P})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{Q})=2n-2$，$\boldsymbol{R}\in\mathbf{R}^{2n\times 2n}$ 为正定的 Hermite 矩阵。

显然，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_2&=\mathrm{diag}((\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{P}(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{I}_2),\boldsymbol{0}_{2\times 2})\\&=(\bar{\boldsymbol{P}},\boldsymbol{0}_{2\times 2})\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}_2&=((\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{Q}(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{I}_2),\boldsymbol{0}_{2\times 2})\\&=(\bar{\boldsymbol{Q}},\boldsymbol{0}_{2\times 2})\end{aligned}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{P}}>0$，$\bar{\boldsymbol{Q}}>0$，$\boldsymbol{U}_2=\boldsymbol{U}\otimes\boldsymbol{I}_2$，$\bar{\boldsymbol{U}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{U}$ 前 $n-1$ 列。

考虑到 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$ 最后一行为 $\frac{\boldsymbol{1}_n^{\mathrm{T}}}{\sqrt{n}}$ 和 $(\boldsymbol{1}_n^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{\delta}(t)=0$，有 $\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}(t)=[*\ \cdots\ *\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$。

令 $\bar{\boldsymbol{\delta}}(t)=(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{\delta}(t)$。则 $\boldsymbol{V}$ 可改写为：

$$\begin{aligned}V=&\boldsymbol{\delta}^{*}(t)\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}(t)+\\&\int_{t-\tau}^{t}\boldsymbol{\delta}^{*}(s)\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\boldsymbol{\delta}}^{*}(s)\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{\delta}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\\=&\bar{\boldsymbol{\delta}}^{*}(t)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{\delta}}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\bar{\boldsymbol{\delta}}^{*}(s)\bar{\boldsymbol{Q}}\bar{\boldsymbol{\delta}}(s)\mathrm{d}s+\\&\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\bar{\boldsymbol{\delta}}}^{*}(s)(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{I}_2)\dot{\bar{\boldsymbol{\delta}}}(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

计算 $\dot{\boldsymbol{V}}$，有

$$\begin{aligned}\dot{V}=&2\boldsymbol{\delta}^{*}(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\delta}^{*}(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\delta}(t)\boldsymbol{\delta}(t)-\\&\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{\delta}}^{*}(\theta)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\delta}}(\theta)\mathrm{d}\theta+\tau\dot{\boldsymbol{\delta}}^{*}(t)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\delta}}(t)-\\&2\boldsymbol{\delta}^{*}(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}_{\sigma}\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}(t-\tau)-\\&\boldsymbol{\delta}^{*}(t-\tau)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\delta}(t-\tau)\end{aligned}$$

注意到 $\boldsymbol{\delta}(t-\tau)=\boldsymbol{\delta}(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{\delta}}(s)\mathrm{d}s$，并且对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{C}^{n}$ 和正定 Hermite 矩阵 $\bar{\boldsymbol{R}}\in\mathbf{C}^{n\times n}$，有 $2\boldsymbol{x}^{*}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{x}^{*}\bar{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^{*}\bar{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{y}$，

从而，有

$$-2\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}(t-\tau)$$
$$=-2\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}(t)+\int_{t-\tau}^{t}2((\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})^*\boldsymbol{P}\boldsymbol{\delta}(t))^*\dot{\boldsymbol{\delta}}(s)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant-2\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}(t)+\int_{t-\tau}^{t}\dot{\boldsymbol{\delta}}^*(s)\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\delta}}(s)\mathrm{d}s+\tau\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{L}_\sigma^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\delta}(t)$$

因而,

$$\dot{V}\leqslant2\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}_\sigma\boldsymbol{\delta}(t)+\tau\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{L}_\sigma^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\delta}(t)+\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\delta}(t)-\boldsymbol{\delta}^*(t-\tau)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\delta}(t-\tau)+\tau[(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{\delta}(t)-(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}(t-\tau)]^*\boldsymbol{R}\cdot[(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{\delta}(t)-(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}(t-\tau)]$$

其中,$\boldsymbol{\Phi}_\sigma=\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A}-\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B}$。由引理 2 有:

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_\sigma\boldsymbol{U}=\mathrm{diag}(\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_\sigma\bar{\boldsymbol{U}},0)=\mathrm{diag}(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma,0)$$

从而,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_1&=2\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Phi}_\sigma\boldsymbol{\delta}(t)\\&=\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}_\sigma+\boldsymbol{\Phi}_\sigma^*\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}(t)\\&=\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{U}_2\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_\sigma+\bar{\boldsymbol{\Phi}}_\sigma^*\bar{\boldsymbol{P}}&\boldsymbol{0}_{(2n-2)\times2}\\\boldsymbol{0}_{2\times(2n-2)}&\boldsymbol{0}_{2\times2}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}(t)\\&=\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t)[\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_\sigma+\bar{\boldsymbol{\Phi}}_\sigma^*\bar{\boldsymbol{P}}]\bar{\boldsymbol{\delta}}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_2&=\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{P}(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{L}_\sigma^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{P}\boldsymbol{\delta}(t)\\&=\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{U}_2\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{P}}(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})&\boldsymbol{0}_{(2n-2)\times2}\\\boldsymbol{0}_{2\times(2n-2)}&\boldsymbol{0}_{2\times2}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}^{-1}\cdot\boldsymbol{U}_2\begin{bmatrix}(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\bar{\boldsymbol{P}}&\boldsymbol{0}_{(2n-2)\times2}\\\boldsymbol{0}_{2\times(2n-2)}&\boldsymbol{0}_{2\times2}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}(t)\\&=\boldsymbol{\delta}^*(t)\boldsymbol{U}_2\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{P}}(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B})\\\boldsymbol{0}_{2\times2n}\end{bmatrix}\boldsymbol{R}^{-1}\cdot[(\bar{\boldsymbol{U}}\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\bar{\boldsymbol{P}}\quad\boldsymbol{0}_{2n\times2}]\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}(t)\\&=\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t)\bar{\boldsymbol{P}}(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}^{-1}(\bar{\boldsymbol{U}}\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{\delta}}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{M}_3&=[(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{\delta}(t)-(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}(t-\tau)]^*\cdot\boldsymbol{R}[(\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{A})\boldsymbol{\delta}(t)-(\boldsymbol{L}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{\delta}(t-\tau)]\\&=\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1}\otimes\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{0}_{2\times(2n-2)}\end{bmatrix}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1}\otimes\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{0}_{2\times(2n-2)}\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\delta}}(t)+\\&\quad\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t-\tau)(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\bar{\boldsymbol{\delta}}(t-\tau)-\\&\quad\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t)\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1}\otimes\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{0}_{2\times(2n-2)}\end{bmatrix}^*\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\bar{\boldsymbol{\delta}}(t-\tau)-\\&\quad\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t-\tau)(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}_2\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1}\otimes\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{0}_{2\times(2n-2)}\end{bmatrix}\bar{\boldsymbol{\delta}}(t)\\&=\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t)(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})\bar{\boldsymbol{\delta}}(t)+\\&\quad\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t-\tau)(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\bar{\boldsymbol{\delta}}(t-\tau)-\\&\quad\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t)(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\otimes\boldsymbol{B})\bar{\boldsymbol{\delta}}(t-\tau)-\\&\quad\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t-\tau)(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})\bar{\boldsymbol{\delta}}(t)\end{aligned}$$

其中,$\bar{\boldsymbol{\Phi}}_\sigma=\boldsymbol{I}_{n-1}\otimes\boldsymbol{A}-\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\otimes\boldsymbol{B}$。由舒尔补引理易知,$\boldsymbol{H}<0$ 等价于

$$\begin{bmatrix}\bar{\boldsymbol{H}}_{11}&\bar{\boldsymbol{H}}_{12}\\\bar{\boldsymbol{H}}_{21}&\bar{\boldsymbol{H}}_{22}\end{bmatrix}<0$$

其中,

$$\bar{\boldsymbol{H}}_{11}=\bar{\boldsymbol{P}}\bar{\boldsymbol{\Phi}}_\sigma+\bar{\boldsymbol{\Phi}}_\sigma^*\bar{\boldsymbol{P}}+\tau(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{R}(\bar{\boldsymbol{U}}\otimes\boldsymbol{A})+\bar{\boldsymbol{Q}}+\tau\bar{\boldsymbol{P}}(\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma\bar{\boldsymbol{U}}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}^{-1}(\bar{\boldsymbol{U}}\bar{\boldsymbol{L}}_\sigma^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{B}^*)\bar{\boldsymbol{P}}$$
$$\bar{\boldsymbol{H}}_{12}=\boldsymbol{H}_{12},\bar{\boldsymbol{H}}_{22}=\boldsymbol{H}_{22}$$

即:

$$\boldsymbol{M}_1+\tau\boldsymbol{M}_2+\tau\boldsymbol{M}_3+\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t)\bar{\boldsymbol{Q}}\bar{\boldsymbol{\delta}}(t)-\bar{\boldsymbol{\delta}}^*(t-\tau)<0$$

从而,$\dot{V}<0$。因而:

$$\lim_{x\to+\infty}\boldsymbol{\delta}(t)=\boldsymbol{0}_{2n}$$

即,多智能体系统(1)实现了旋转一致。

注 2. 定理 1 给出存在时滞情况下系统实现旋转一致的条件,所采用的分析方法可直接应用于文献[9]所提出的协议。

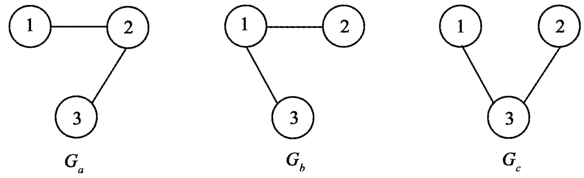

图 1　节点连接图

Fig. 1　Topology of multi-agent

5　仿　真

考虑含有 3 个智能体二阶多智能体系统。所有可能通信拓扑结构如图 1 所示,假定所有边的权值为 1。多智能体系统通信拓扑结构的切换次序为

$\langle G_a, G_b, G_c \rangle$，且每一通信拓扑结构的保持时间为1.2s。显然，通信拓扑结构始终保持连通。利用Matlab中LMI工具箱，求解条件(8)，可得时滞的一个上界为$\tau = 0.11$。

图2为仿真结果。智能体分别初始位置(A;B;C)出发，利用分布式协议(5)，最终会聚到一起，并围绕一个共同点运动，实现了旋转一致。该仿真结果验证了定理1。

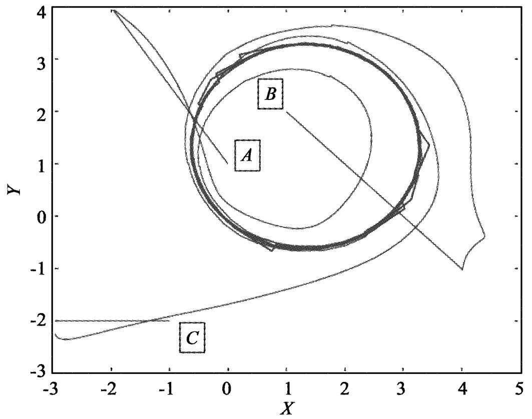

图2 位置状态轨迹

Fig. 2 Track of multi-agent

6 结 论

本文研究了具有时滞的多智能体系统中的旋转一致控制问题。提出了一个新的控制协议，利用Lyapunov理论分析了协议的稳定性，并给出了通信拓扑结构切换条件下，多智能体系统实现旋转一致控制的条件。最后，通过仿真验证了所得理论结果。

参 考 文 献

[1] Ren W. On Consensus algorithms for double-integratordynamics [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(6): 1503 - 1509.

[2] Hong Y, Gao L, Cheng D, et al. Tracking control for multiagentconsensus with an active leader and variable topology [J]. Automatica, 2006, 42(7): 1177 - 1182.

[3] Wang L, Xie G. Consensus control for a class of networks of dynamic agents [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(10 - 11): 941 - 959.

[4] Lin P, Jia Y. Average-consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay [J]. Physica A, 2008, 387(1): 303 - 313.

[5] Lin P, Jia Y. Distributed robust H_1 consensus control in directednet works of agents with time-delay [J]. Systems and Control Letters, 2008, 57(8): 643 - 653.

[6] Sepulchre R, Paley D, Leonard N E. Stabilization of planar collective motion with limited communication [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(3): 706 - 719.

[7] Ren W. Collective motion from Consensus with cartesian coordinate coupling [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(6): 1330 - 1335.

[8] Pavone M, Frazzoli E. Decentralized policies for geometric pattern formation and path coverage [J]. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 2007, 129(5): 633 - 643.

[9] Lin P, Jia Y. Distributed rotating formation control of multi - agent systems [J]. Systems and Control Letters, 2010, 59(10): 587 - 595.

[10] Sun M, Jia Y, Du J, et al. Delay-dependent H_2 control for discrete time-delay systems with D-stability constraints [J]. Progress in Natural Science, 2008, 18(3): 297 - 302.

[11] 张文广，屈胜利. 目标跟踪多智能体一致控制[J]. 宇航学报, 2010, 31(9): 2172 - 2176. [Zhang Wen-guang, Qu Sheng-li. Leader-following multi-agent consensus control [J]. Journal of Astronautics, 2010, 31(9): 2172 - 2176.]

[12] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2001.

作者简介：陈小平(1970 -)，男，博士生，主要从事飞行器控制、卫星导航。

通信地址：电子科技大学空天科学技术研究院(610054)

电话：(028)61831820

E-mail: xpchen@uestc.edu.cn

(编辑：曹亚君)