

# 分布时滞系统的自适应滑模控制

李碧荣, 李延波

广西师范学院数学科学学院, 南宁 530001

**摘要** 针对一类分布时滞系统, 研究了自适应滑模控制问题。根据分布时滞的特点, 构造了适当的 Lyapunov 泛函, 采用线性矩阵不等式方法给出了闭环系统渐近稳定的充分条件。构造了自适应滑模控制器, 使系统满足滑模到达条件。设计了时滞独立的积分滑模面并简化了滑模控制器的设计。仿真算例验证了方法的有效性。

**关键词** 分布时滞; 自适应控制; 积分滑模

**中图分类号** TP13

**文献标识码** A

**doi** 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.22.009

## Adaptive Sliding Mode Control of Distributed Delay Systems

LI Birong, LI Yanbo

School of Mathematical Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning 530001, China

**Abstract** Based on a class of distributed delay systems, an adaptive sliding mode controller is proposed. According to the distributed delays, a suitable Lyapunov-Krasovskii functional is constructed, and the sufficient conditions of the asymptotical stability of the closed-loop systems are expressed in linear matrix inequalities. The adaptive sliding mode controller is constructed to satisfy the sliding mode reaching conditions. The delay-independent integral sliding mode is obtained and the sliding mode controller is simplified by the method. A numerical example is given to illustrate the validity of the proposed method.

**Keywords** distributed delay; adaptive control; integral sliding mode

### 0 引言

现实系统中存在的时滞常常导致系统性能指标下降甚至破坏了系统的稳定性。近年来, 分布时滞系统已经得到了广泛研究<sup>[1-8]</sup>。文献[1]研究了一类非线性不确定分布时滞系统的滑模控制问题; 文献[2]研究了同时含有分布与离散时滞线性系统的  $H_\infty$  控制; 文献[3]研究了分布时滞系统输出动态反馈镇定; 文献[4]—[8]利用不同的方法研究了含分布时滞的中立型系统的鲁棒镇定。但对分布时滞系统研究自适应滑模控制的报道还比较少见。

本文针对分布时滞系统设计了积分滑模面以及含有分布时滞项的自适应滑模控制器。设计的自适应滑模控制器能确保系统到达滑模面; 通过构造 Lyapunov 泛函, 利用分析矩阵不等式技巧给出了滑模面渐近稳定的一个充分条件。该充分条件以线性矩阵不等式的形式表示, 很容易由 Matlab 求解, 方便工程实际使用。

### 1 问题的描述

考虑分布时滞系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t - \tau_1) + \mathbf{A}_2 \int_{t-\tau_2}^t \mathbf{x}(\theta) d\theta + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^q$  分别为状态、控制输入;  $\tau_1, \tau_2 > 0$  均为时滞常数,  $\tau = \max\{\tau_1, \tau_2\}$ ;  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{B}$  为适当维数的矩阵;  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$  是未知的向量函数。

假设 1  $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B})$  可控, 且状态可量测。

假设 2  $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{B} \mathbf{v}(t, \mathbf{x})$ , 且存在未知的正常数  $g_0, g_1$ , 使其满足

$$\|\mathbf{v}(t, \mathbf{x})\| \leq g_0 + g_1 \|\mathbf{x}(t)\| \quad (2)$$

选取积分滑模面为

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) - \mathbf{C} \int_0^t (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B} \mathbf{K}) \mathbf{x}(s) ds \quad (3)$$

收稿日期: 2012-05-14; 修回日期: 2012-07-02

基金项目: 广西自然科学基金资助项目(2012GXNSFBA053003); 广西教育厅基金资助项目(201010603R08)

作者简介: 李碧荣, 副教授, 研究方向为变结构控制, 电子信箱: apples729@21cn.com; 李延波(通信作者), 副教授, 研究方向为稳定性及滑模变结构控制, 电子信箱: apples729@163.com

其中  $C \in R^{m \times n}$  为满秩常数矩阵, 且  $CB$  非奇异;  $K$  为待定设计矩阵。

将式(3)沿式(1)求导, 得

$$\dot{S}(t) = CA_1x(t-\tau_1) + CA_2 \int_{t-\tau_2}^t x(\theta) d\theta + CBKx(t) + CBu(t) + CBv(t, x) \quad (4)$$

引理 1<sup>[9]</sup> 设  $U_1, U_2, U_3$  是一定维数的实矩阵, 且有  $U_3 = U_3^T > 0$ , 则任给标量  $\beta > 0$ , 下列不等式成立

$$U_3^T U_1 + U_1^T U_2 \leq \beta^{-1} U_3^T U_3^{-1} U_1 + \beta U_3^T U_3 U_2$$

引理 2<sup>[10]</sup> 给定实数  $\alpha, \beta$  及正定矩阵  $S$ , 如果  $\alpha > \beta$ , 那么不等式

$$\left( \int_{\beta}^{\alpha} \omega(\sigma) d\sigma \right)^T S \left( \int_{\beta}^{\alpha} \omega(\sigma) d\sigma \right) \leq (\alpha - \beta) \int_{\beta}^{\alpha} \omega^T(\sigma) S \omega(\sigma) d\sigma$$

对于任意使得积分收敛的向量值函数  $\omega: [\beta, \alpha] \rightarrow R^n$  成立。

## 2 主要结论

定理 1 假设条件 1、2 成立, 系统(1)采用自适应滑模控制器

$$u(t) = -Kx(t) + u_1 + u_2 \quad (5)$$

则从初始状态出发的系统在有限时间内到达滑模面上并且一直保持在滑模面上。其中

$$u_1(t) = -(CB)^{-1} [CA_1x(t-\tau_1) + CA_2 \int_{t-\tau_2}^t x(\theta) d\theta + \varepsilon \text{sgn}(S)], \quad \varepsilon > 0 \quad (6)$$

$$u_2 = -\frac{(B^T C^T S)}{\|S^T CB\|} (\hat{g}_0 + \hat{g}_1 \|x(t)\|) \quad (7)$$

$\hat{g}_0, \hat{g}_1$  分别为  $g_0, g_1$  的估计值, 参数偏差为  $\tilde{g}_0 = \hat{g}_0 - g_0, \tilde{g}_1 = \hat{g}_1 - g_1$ , 且自适应律分别为

$$\dot{\hat{g}}_0 = \|S^T CB\|, \dot{\hat{g}}_1 = \|S^T CB\| \|x(t)\| \quad (8)$$

证明 取 Lyapunov 泛函为

$$V = \frac{1}{2} (S^T S + \tilde{g}_0^2 + \tilde{g}_1^2) \quad (9)$$

沿式(1)求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S^T \dot{S} + \tilde{g}_0 \dot{\tilde{g}}_0 + \tilde{g}_1 \dot{\tilde{g}}_1 \\ &= S^T [CA_1x(t-\tau_1) + CA_2 \int_{t-\tau_2}^t x(\theta) d\theta + CBKx(t) + CBu(t) + CBv(t, x)] + \tilde{g}_0 \dot{\tilde{g}}_0 + \tilde{g}_1 \dot{\tilde{g}}_1 \\ &\leq S^T CBu_2(t) + \|S^T CB\| (g_0 + g_1 \|x\|) + \tilde{g}_0 \dot{\tilde{g}}_0 + \tilde{g}_1 \dot{\tilde{g}}_1 - g_0 \dot{\tilde{g}}_0 - g_1 \dot{\tilde{g}}_1 - \varepsilon S^T (\text{sgn}(S)) \\ &= -\varepsilon S^T (\text{sgn}(S)) \\ &= -\varepsilon \|S\| \\ &< 0 \end{aligned}$$

当系统到达并保持在滑模面时有  $S = \dot{S} = 0$  成立。由此得

$$\dot{S}(t) = CA_1x(t-\tau_1) + CA_2 \int_{t-\tau_2}^t x(\theta) d\theta + CBKx(t) + CBu(t) + CBv(t, x) = 0 \quad (10)$$

于是等效控制为

$$u_{eq}(t) = -(CB)^{-1} [CA_1x(t-\tau_1) + CA_2 \int_{t-\tau_2}^t x(\theta) d\theta + CBKx(t) + CBv(t, x)] \quad (11)$$

把式(11)代入式(1)可得滑动模态方程为

$$\dot{x}(t) = \bar{A}_0x(t) + \bar{A}_1x(t-\tau_1) + \bar{A}_2 \int_{t-\tau_2}^t x(s) ds \quad (12)$$

其中  $\bar{A}_0 = A_0 - BK, \bar{A}_1 = A_1 - B(CB)^{-1}CA_1, \bar{A}_2 = A_2 - B(CB)^{-1}CA_2$ 。证毕。

定理 2 如果存在正定对称矩阵  $P, Q, Q_1, Q_2$  及适当维数的矩阵  $L$ , 使得线性矩阵不等式

$$\begin{pmatrix} \Pi & I & I & Q\bar{A}_1^T & \tau_2 Q\bar{A}_2^T \\ I & -Q_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & -Q_2^{-1} & 0 & 0 \\ \bar{A}_1 Q & 0 & 0 & -Q_1^{-1} & 0 \\ \tau_2 \bar{A}_2 Q & 0 & 0 & 0 & -Q_2^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (13)$$

成立, 则滑模控制系统的滑动模态是渐近稳定的, 且状态反馈控制增益  $K = LQ^{-1}$ 。其中  $\Pi = A_0 Q + Q A_0^T - BL - L^T B^T$ 。

证明 构造 Lyapunov 泛函

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (14)$$

其中

$$V_1(t) = x^T(t) P x(t) \quad (15)$$

$$V_2(t) = \int_{t-\tau_1}^t x^T(s) \bar{A}_1^T Q_1^{-1} \bar{A}_1 x(s) ds \quad (16)$$

$$V_3(t) = \tau_2 \int_{t-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(s) \bar{A}_2^T Q_2^{-1} \bar{A}_2 x(s) ds d\theta \quad (17)$$

则

$$\dot{V}_1(t) = 2x^T(t) P \left[ \bar{A}_0x(t) + \bar{A}_1x(t-\tau_1) + \bar{A}_2 \int_{t-\tau_2}^t x(s) ds \right] \quad (18)$$

由引理 1 得

$$2x^T(t) P \bar{A}_1 x(t-\tau_1) \leq x^T(t) P R_1 P x(t) + x^T(t-\tau_1) \bar{A}_1^T R_1^{-1} \bar{A}_1 x(t-\tau_1) \quad (19)$$

同理, 由引理 1 和引理 2 得

$$\begin{aligned} 2x^T P \bar{A}_2 \int_{t-\tau_2}^t x(\theta) d\theta &\leq x^T(t) P R_2 P x(t) + \\ &\tau_2 \int_{t-\tau_2}^t x^T(s) \bar{A}_2^T R_2^{-1} \bar{A}_2 x(s) ds \end{aligned} \quad (20)$$

此外,

$$\dot{V}_2(t) = x^T(t) \bar{A}_1^T Q_1^{-1} \bar{A}_1 x(t) - x^T(t-\tau_1) \bar{A}_1^T Q_1^{-1} \bar{A}_1 x(t-\tau_1) \quad (21)$$

$$\dot{V}_3(t) = \tau_2^2 x^T(t) \bar{A}_2^T Q_2^{-1} \bar{A}_2 x(t) - \tau^2 \int_{t-\tau_2}^t x^T(s) \bar{A}_2^T Q_2^{-1} \bar{A}_2 x(s) ds \quad (22)$$

取  $R_i = Q_i (i=1, 2)$ , 则由式(19)~(22)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq x^T(t) [P \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T P + P Q_1 P + P Q_2 P + \bar{A}_1^T Q_1^{-1} \bar{A}_1 \\ &\quad + \tau_2^2 \bar{A}_2^T Q_2^{-1} \bar{A}_2] x(t) \end{aligned} \quad (23)$$

根据 Schur 补引理, 有

$$\bar{P} \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T \bar{P} + P Q_1 P + P Q_2 P + \bar{A}_1^T Q_1^{-1} \bar{A}_1 + \tau_2^2 \bar{A}_2^T Q_2^{-1} \bar{A}_2 < 0$$

等价于

$$\begin{pmatrix} \overline{P}A_0 + \overline{A}_0^T \overline{P} & P & P & \overline{A}_1^T & \tau_2 \overline{A}_2^T \\ P & -Q_1^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ P & 0 & -Q_2^{-1} & 0 & 0 \\ \overline{A}_1 & 0 & 0 & -Q_1^{-1} & 0 \\ \tau_2 \overline{A}_2 & 0 & 0 & 0 & -Q_2^{-1} \end{pmatrix} < 0 \quad (24)$$

用  $\text{diag}[P^{-1} \ I \ I \ I \ I]$  分别左乘、右乘式 (24), 并令  $P^{-1} = Q, L = KQ$ , 则  $\dot{V}(t) < 0$ 。由稳定性理论知滑动模式是渐近稳定的。证毕。

### 3 仿真举例

对于系统 (1), 取

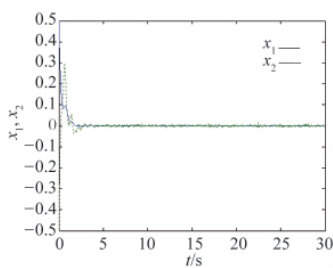


图 1 状态向量  $x(t)$  的时间响应  
Fig. 1 Time response of state vector  $x(t)$

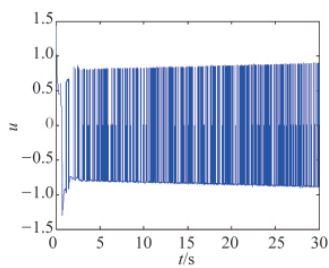


图 2 控制  $u(t)$  的时间响应  
Fig. 2 Time response of control  $u(t)$

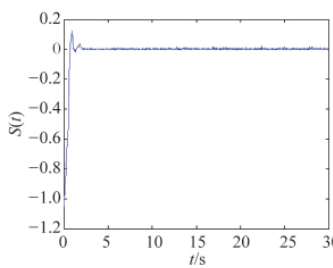


图 3 滑模  $S(t)$  的时间响应  
Fig. 3 Time response of sliding mode  $S(t)$

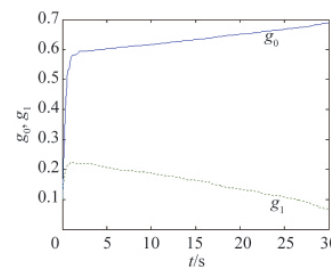


图 4 自适应率的时间响应  
Fig. 4 Time response of adaptive law

从仿真图 1—图 4 可以看出, 本文对分布时滞系统提出的自适应滑模控制是有效的。

### 4 结论

本文研究了分布时滞系统的自适应滑模控制。基于线性矩阵不等式方法得出了滑动模式渐近稳定的充分条件; 构造了自适应滑模控制器。最后, 仿真结果验证了该方法的可行性和有效性。本文的结论丰富了时滞系统的研究成果。

#### 参考文献 (References)

[1] 吴立刚, 胡跃明. 滑模控制一类非线性分布时滞系统 [J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1151-1154.  
Wu Ligang, Hu Yueming. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(6): 1151-1154.

[2] 柴琳, 程明, 费树岷, 等. 一类含分布与离散时滞的线性时滞控制系统的  $H_\infty$  控制 [J]. 控制与决策, 2009, 24(1): 101-106.  
Chai Lin, Cheng Ming, Fei Shumin, et al. *Control and Decision*, 2009, 24(1): 101-106.

[3] 钱伟, 沈国江, 孙优贤. 基于 LMI 的分布时滞系统输出动态反馈镇定 [J]. 控制理论与应用, 2009, 26(4): 446-450.  
Qian Wei, Shen Guojiang, Sun Youxian. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(4): 446-450.

$$A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} -0.1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = [1 \ 1],$$

$v(x, t) = 0.5 + 0.2 \sin(t) + (0 \ 1)x(t), \varepsilon = 1, \tau_1 = \tau_2 = 0.5$   
由 LMI 工具箱求解得

$$Q = \begin{pmatrix} 279.1721 & -69.7930 \\ -69.7930 & 214.6679 \end{pmatrix}, L = (842.8051 \ 114.0141),$$

则

$$K = (3.4306 \ 1.6465)$$

为了仿真, 设置初始条件为  $x(t) = \begin{pmatrix} 0.4 \\ -0.5 \end{pmatrix}, t \in [-0.5 \ 0]$ ,

仿真结果如图 1—图 4 所示。

[4] 李涛, 张合新, 孙鹏. 含离散与分布时滞的不确定中立型系统鲁棒稳定性新判据 [J]. 控制理论与应用, 2010, 27(11): 1537-1542.  
Li Tao, Zhang Hexin, Sun Peng. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(11): 1537-1542.

[5] Du Jun, Jiang Wei. Robust stability of degenerate neutral systems with time-varying discrete and distributed delays [J]. *Journal of Mathematical Study*, 2009, 42(1): 20-29.

[6] Chen Wuhua, Zheng Weixing. Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays [J]. *Automatica*, 2007, 43: 95-104.

[7] He Yong, Wu Min, She Jinhua, et al. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain neutral systems with mixed delays [J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 51: 57-65.

[8] Chen Jenqder. New stability criteria for a class of neutral systems with discrete and distributed time-delays: an LMI approach [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 150: 719-736.

[9] Xu S, Shi P, Chu Y, et al. Robust stochastic stabilization and  $H_\infty$  control of uncertain neutral stochastic time-delay systems [J]. *J Math Anal Appl*, 2006, 314: 1-16.

[10] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems [C]//Proceeding of IEEE International Symposium on Decision Control, Sydney, Australia, 2000: 2805-2810.

(责任编辑 马宇红, 代丽)