

电动帆轨迹优化及其性能分析

齐乃明, 霍明英, 袁秋帆
(哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150006)

摘要: 电动帆是一种新兴的无推进剂损耗的推进方式, 利用太阳风的动能冲力飞行。电动帆由数百根长而细的金属链所组成, 这些金属链通过空间飞行器自旋展开, 太阳能电子枪向外喷射电子, 使金属链始终保持在高度的正电位, 这些带电的金属链会排斥太阳风质子, 利用太阳风的动能冲力推动空间飞行器驶向目标方向。针对电动帆轨迹优化问题, 提出采用 Gauss 伪谱法进行轨迹优化, 克服了间接法对协态变量初值敏感的缺点。考虑在太阳风暴等原因造成特征加速度改变的情况, 基于 Gauss 伪谱法实现电动帆在线轨迹重新规划, 提高电动帆对太阳风不确定性的适应能力。最后以太阳系外探测任务为例, 对电动帆和太阳帆的性能进行对比, 仿真结果表明电动帆在星际远航任务中所用时间较短。

关键词: 电动帆; Gauss 伪谱法; 轨迹优化; 性能分析

中图分类号: V412.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2013)05-0634-08

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2013.05.006

Electric Sail Trajectory Optimization and Performance Analysis

QI Nai-ming, HUO Ming-ying, YUAN Qiu-fan
(Harbin Institute of Technology, Harbin 150006, China)

Abstract: The electric sail is an innovative propulsion concept which uses the solar wind dynamic pressure to produce a thrust without the need for propellant mass. The electric sail is consisted of many metal tethers which are connected to a solar-powered electron gun. The electron gun emits electrons to maintain the tethers at a high positive potential. The electric field generated by these metal tethers reflects the solar wind ions to generate a thrust. In this paper, the Gauss pseudospectral method is proposed for the trajectory optimization of electric sail. The Gauss pseudospectral method overcomes the shortcomings of the indirect method which is sensitive to the initial value of the costate variable. Considering the case of the characteristic acceleration changed under solar storms, the electric sail trajectory is generated online based on the Gauss pseudospectral method, thus improving the adaptability to the uncertainty of the solar wind. Finally, an outer solar system exploration mission is taken as a reference mission to compare the performance of electric sail and solar sail. The simulation results show that electric sail is faster than solar sail in the outer solar system exploration mission.

Key words: Electric sail; Gauss pseudospectral; Trajectory optimization; Performance analysis

0 引言

电动帆是由 Janhunen 于 2004 年提出的一种新兴的推进方式, 与太阳帆不同的是, 电动帆的动力来源不是太阳光压, 而是太阳风的动能冲力。电动帆由数百根长而细的金属链所组成, 这些金属链通过空间飞行器自旋展开, 展开后空间飞行器继续进行缓慢的自

旋运动。空间飞行器上的太阳能电子枪向外喷射电子, 使金属链始终保持在高度的正电位, 这些带电的金属链会排斥太阳风质子, 利用太阳风的动能冲力推动空间飞行器驶向目标方向^[1], 其原理示意图如图 1 所示。电动帆可以使空间飞行器在无推进剂损耗的情况下完成星际间轨道转移, 甚至太阳系外科学探测。由于可以更快且更廉价地进入太阳系, 电动帆使

人类经济地利用小行星资源变为可能。

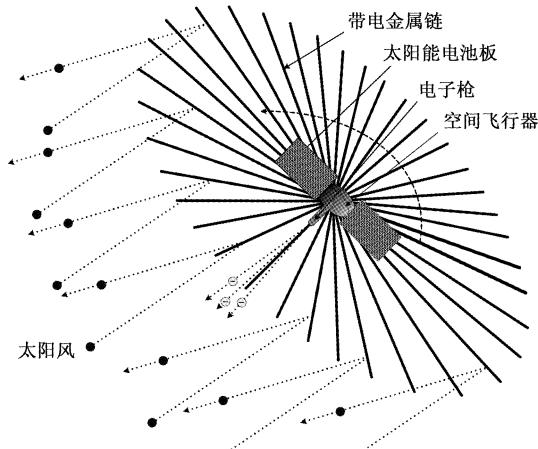


图1 电动帆原理示意图

Fig. 1 Conceptual sketch of an electric sail

在距离太阳一个天文单位位置处,太阳风产生的平均动能推力为 2nPa 左右,这一数值是太阳光压的 $1/5000$ 。因此,也许有人会认为电动帆依靠太阳风获得的推力性能会远差于太阳帆依靠太阳光压获得的推力性能。然而电动帆的反射区域是由带电细链产生的正电场,一根直径很小的带电金属链在太空环境中能够产生 20m 左右的反射宽度。因此,相比于由薄膜结构反射光子产生推力的太阳帆而言,在同样推力要求的情况下,电动帆的自身结构质量可以更轻^[1]。据电动帆 2009 年研究进展报告显示,100kg 的电动帆推进系统(包括电动帆体和电子枪等)能够持续产生大约 1N 的推力,这是其他推进系统很难做到的^[2]。

目前,欧洲在电动帆研究领域较为领先。欧盟于 2010 年 12 月在芬兰气象学院组织召开电动太阳帆项目启动会议,资助电动帆研究项目 170 万欧元资金,目标是在 3 年内完成原型样机的研制。电动帆的飞行原理已经经过空间飞行测试,其原型样机的测试将在未来的几年内进行,测试卫星为爱沙尼亚的 ESTCube-1 和芬兰的 Aalto-1 纳米卫星。

近年来,国外相关专家对电动帆的原理及应用做了一定的研究。Janhunen 提出电动帆的设想,并通过理论分析和试验研究证明了电动帆应用于空间探测的可能^[2-5]。Quarta 将电动帆应用于太阳系外探测任务,并通过间接优化算法对不同特征加速度电动帆的太阳系外探测轨迹进行了优化设计^[1]。

Mengali 对比了电动帆与太阳帆的性能,通过对比可以看出,太阳帆产生的推力与相对太阳距离平方成反比关系,而电动帆产生的推力与相对太阳距离 $7/6$ 次方成反比。因此,在星际远航任务中,电动帆的推力衰减速度相对于太阳帆的推力衰减速度较慢。而且由于电动帆利用正电场对太阳风质子流进行反射,减少了反射材料质量,因此在同等特征加速度要求下,电动帆相对与太阳帆质量更轻^[6]。

目前,国内还未见学者对电动帆进行相关研究。本文以地球轨道到火星轨道转移轨迹优化为例,提出采用高斯伪谱法对电动帆进行轨迹优化,克服了 Mengali 和 Quarta 所采用的间接优化算法对协态变量初值敏感的问题。并考虑了在飞行过程中由于太阳风暴等原因造成特征加速度改变的情况下,分析电动帆基于 Gauss 伪谱法自主在线重新轨迹规划的可能性。最后以太阳系外探测任务为例对电动帆和太阳帆的性能进行对比。

1 转移轨迹优化问题描述

本文的轨迹优化问题主要参考文献[6]中对电动帆轨迹优化问题的描述。忽略了目标行星公转轨道的轨道倾角,将三维轨迹优化问题简化为二维轨迹优化问题。通过对电动帆二维轨迹优化问题的研究,验证基于 Gauss 伪谱法离线轨迹优化和在线轨迹优化的可行性,并对电动帆性能进行分析。

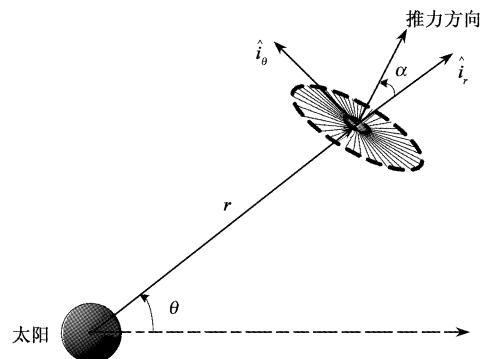


图2 极坐标及推力方向示意图

Fig. 2 Reference frame and thrust angle

1.1 动力学方程

在极坐标系下建立轨道转移模型如图 2 所示。为了提高数值计算效率,引入参考距离和参考时间对电动帆动力学方程^[6]进行无量纲化处理。参考

距离为一个天文单位(1AU), 参考时间为地球相对太阳的公转周期 T_{\oplus} , 电动帆在极坐标系下的动力学方程如下所示:

$$\dot{r} = v_r \quad (1)$$

$$\dot{\theta} = v_{\theta}/r \quad (2)$$

$$\dot{v}_r = v_{\theta}^2/r - \mu_{\odot}/r^2 + a_{\oplus} \cos\alpha (1/r)^{7/6} \quad (3)$$

$$\dot{v}_{\theta} = -v_r v_{\theta}/r + a_{\oplus} \sin\alpha (1/r)^{7/6} \quad (4)$$

其中: r 为电动帆相对太阳的无量纲距离;

θ 为电动帆在极坐标系下的极角, 逆时针为正;

v_r 为电动帆无量纲径向速度;

v_{θ} 为电动帆无量纲切向速度;

α 为推进角, 即推力方向与太阳-电动帆矢量夹角;

μ_{\odot} 为无量纲太阳引力常数;

a_{\oplus} 为电动帆无量纲特征加速度, 即相对太阳距离为 1AU 时的无量纲加速度。

1.2 性能指标函数

由于电动帆在飞行过程中不消耗推进剂, 因此电动帆轨迹优化的性能指标通常为时间最优, 即

$$J = t_f \quad (5)$$

1.3 边界约束

假设电动帆在初始时刻 $t_0 = 0$ 位于地球逃逸抛物线轨迹上, 且逃逸剩余能量 $C_3 = 0 \text{ km}^2/\text{s}^2$, 则电动帆优化轨迹的初始状态为

$$\begin{cases} r(t_0) = r_0 \\ \theta(t_0) = 0 \\ v_r(t_0) = 0 \\ v_{\theta}(t_0) = \sqrt{\mu_{\odot}/r_0} \end{cases} \quad (6)$$

忽略目标行星轨道的偏心率, 则电动帆优化轨迹的终端边界约束为

$$\begin{cases} r(t_f) = r_f \\ v_r(t_f) = 0 \\ v_{\theta}(t_f) = \sqrt{\mu_{\odot}/r_f} \end{cases} \quad (7)$$

其中: r_0 为初始轨道相对太阳的无量纲距离; r_f 为目标轨道相对太阳的无量纲距离。

1.4 不等约束

当电动帆距离太阳越近, 所接触到太阳风高能粒子的密度、速度和温度都会变得越大, 为保证组成电动帆的金属细链能够长期稳定工作, 要求电动帆

在飞行过程中相对太阳的距离不应小于电动帆允许的最小距离 r_{\min} 。依据电动帆现有技术, 估计 r_{\min} 在 0.3AU 到 0.5AU 之间, 本文假设 $r_{\min} = 0.5 \text{ AU}$ 。Mengali 通过理论分析得出结论, 由于电动帆自身结构限制, 当其推进角超过一定数值时电动帆会出现结构不稳现象^[6]。因此, 电动帆推进角的绝对值应小于 α_{\max} , 估计 α_{\max} 在 $20^\circ \sim 35^\circ$ 之间, 本文假设 $\alpha_{\max} = 30^\circ$ 。综上所述, 电动帆在飞行过程中的不等约束主要有:

$$r \geq r_{\min} \quad (8)$$

$$|\alpha| \leq \alpha_{\max} \quad (9)$$

2 基于 Gauss 伪谱法的轨迹优化策略

从理论上分析, 直接应用一般的 Gauss 伪谱法可以求解电动帆的轨迹优化问题, 然而在实际应用中却存在以下困难: 当选取配点较多时, 设计变量数目会比较庞大, 给定设计变量的工作会比较繁琐, 且不恰当的初值会使问题收敛到不可行解。Gauss 伪谱法将动力学方程转化为代数等式约束方程, 当选取配点较多时, 相应的代数约束方程将较多, 在约束较多的情况下, 很难直接找到可行解^[7]。

考虑到 Gauss 伪谱法应用于轨迹优化的问题, 本文先以较少离散点进行 Gauss 伪谱法离散化, 并以等式约束方程偏差平方和为优化指标计算可行解; 然后以较多离散点进行 Gauss 伪谱法离散化, 并以可行解插值结果作为最优解计算的初值, 基于 Gauss 伪谱法的电动帆轨迹优化流程如图 3 所示。

2.1 基于 Gauss 伪谱法离散化

Gauss 伪谱法的基本思想是用全局正交多项式对状态空间和控制空间进行逼近, 将动力学微分约束转化成代数约束, 从而可以用成熟的非线性规划方法求解最优控制问题^[8]。Gauss 伪谱法的配点选取 N 阶 LG 点, 即 N 阶 Legendre 多项式的根。

最优控制问题的时间区间为 $[t_0, t_f]$, 而采用 Gauss 伪谱法需要将时间区间转换到 $[-1, 1]$ 区间内:

$$\tau = \frac{2t - t_f - t_0}{t_f - t_0} \quad (10)$$

用 N 阶拉格朗日插值多项式对状态变量和控制变量进行拟合近似:

$$\mathbf{x}(\tau) \approx \mathbf{X}(\tau) = \sum_{k=1}^N \mathbf{x}(\tau_k) L_k(\tau) \quad (11)$$

$$\mathbf{u}(\tau) \approx \mathbf{U}(\tau) = \sum_{k=1}^N \mathbf{u}(\tau_k) L_k(\tau) \quad (12)$$

其中: $\tau_k, k = 1, \dots, N$ 为 N 个 LG 点, 均在 $(-1, 1)$ 区间内, $\tau_0 = -1, \tau_{N+1} = 1$ 。

状态变量和控制变量的微分可近似为:

$$\dot{\mathbf{x}}(\tau_i) \approx \dot{\mathbf{X}}(\tau_i) = \mathbf{x}(\tau_0) \bar{D}_i + \sum_{k=1}^N \mathbf{x}(\tau_k) D_{ik} \quad (13)$$

其中 $\bar{D}_i = \dot{L}_0(\tau_i), D_{ik} = \dot{L}_k(\tau_i)$ 。

则将动力学微分约束转化成代数约束:

$$\bar{D}_i X(\tau_0) + \sum_{k=1}^N D_{ik} X_k = \frac{t_f - t_0}{2} f(X_k, U_k), \quad i = 1, \dots, N \quad (14)$$

边界约束通过 Gauss 二次积分转化为:

$$X(\tau_f) = X(\tau_0) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k f(X_k, U_k) \quad (15)$$

动力学微分约束方程式(1)~(4)转化成的代数约束方程如式(16)~(19), 离散后的边界约束方程如式(20)~(22), 本问题离散后共 $4N + 3$ 个代数约束方程。

$$h_i = \bar{D}_i r(t_0) + \sum_{k=1}^N D_{ik} r(\tau_k) - \frac{t_f - t_0}{2} v_r(\tau_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (16)$$

$$h_{N+i} = \bar{D}_i \theta(t_0) + \sum_{k=1}^N D_{ik} \theta(\tau_k) - \frac{t_f - t_0}{2} v_\theta(\tau_i) / r(\tau_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (17)$$

$$h_{2N+i} = \bar{D}_i v_r(t_0) + \sum_{k=1}^N D_{ik} v_r(\tau_k) - \frac{t_f - t_0}{2} (v_\theta^2(\tau_i) / r(\tau_i) - \mu_\odot / r^2(\tau_i) + a_\oplus \cos\alpha(\tau_i) (1/r(\tau_i))^{7/6}) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (18)$$

$$h_{3N+i} = \bar{D}_i v_\theta(t_0) + \sum_{k=1}^N D_{ik} v_\theta(\tau_k) - \frac{t_f - t_0}{2} (-v_\theta(\tau_i) v_r(\tau_i) / r(\tau_i) + a_\oplus \sin\alpha(\tau_i) (1/r(\tau_i))^{7/6}) = 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (19)$$

$$h_{4n+1} = r(t_0) - r(t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k (v_r(\tau_k)) = 0 \quad (20)$$

$$h_{4n+2} = v_r(t_0) - v_r(t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k (v_\theta^2(\tau_k) / r(\tau_k) - \mu_\odot / r^2(\tau_k) + a_\oplus \cos\alpha(\tau_k) (1/r(\tau_k))^{7/6}) = 0 \quad (21)$$

$$h_{4n+3} = v_\theta(t_0) - v_\theta(t_f) + \frac{t_f - t_0}{2} \sum_{k=1}^N \omega_k (-v_\theta(\tau_k) v_r(\tau_k) / r(\tau_k) + a_\oplus \sin\alpha(\tau_k) (1/r(\tau_k))^{7/6}) = 0 \quad (22)$$

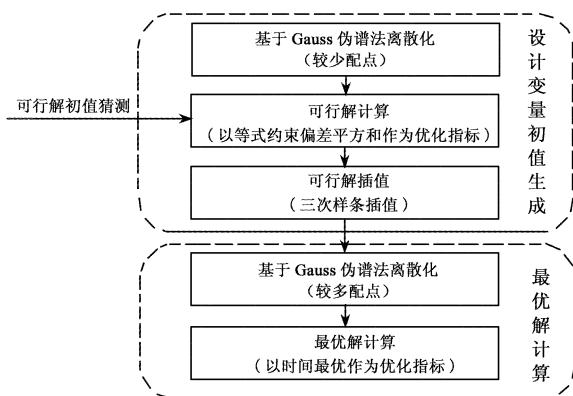


图 3 基于 Gauss 伪谱法的电动帆轨迹优化流程

Fig. 3 The flow chart of electric sail trajectory optimization based on Gauss pseudospectral method

2.2 可行解计算

可行解计算是指不直接寻找满足所有等式和不等式约束的最优解, 而是先将等式约束转换成目标函数, 即先将有等式约束的非线性规划问题转换成无等式约束的非线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & F = \sum_{j=1}^{4N+3} h_j^2 \\ \text{s. t.} \quad & r(\tau_i) \geq r_{\min}, \\ & |\alpha(\tau_i)| \leq \alpha_{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (23)$$

为了得到可行解, 通常选取较少 LG 点, 得到可行解后对其进行插值, 插值结果作为最优解的计算初值。非线性规划问题求解采用 MATLAB 优化工具箱中的 fmincon 函数, 优化策略采用序列二次规

划优化方法。

2.3 最优解计算

最优解计算是以可行解计算结果作为非线性规划问题的初值进行寻优, 性能指标为时间最优。最优解计算所用的优化工具及优化策略与可行解计算一致。最优解计算的非线性规划问题:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min J = t_f \\ \text{s. t. } h_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 4N + 3 \\ r(\tau_i) \geq r_{\min}, \\ |\alpha(\tau_i)| \leq \alpha_{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (24)$$

3 仿真计算与结果分析

基于 Gauss 伪谱法对电动帆进行了一系列的仿真计算。首先基于 Gauss 伪谱法对地球至火星时间最优轨迹进行计算; 然后在此基础上考虑太阳风暴等原因造成电动帆特征加速度改变的情况下, 基于 Gauss 伪谱法进行在线优化轨迹重新生成; 最后通过太阳系外探测任务对电动帆与太阳帆的性能进行对比。

3.1 地球至火星转移轨迹优化

电动帆从地球至火星转移轨迹有如下假设: 电动帆在相对太阳距离为 1AU 情况下, 无量纲加速度 $a_{\oplus} = 3.3298$ (即 0.5mm/s^2)。电动帆推力方向相对太阳 - 电动帆矢量方向的最大允许夹角 $\alpha_{\max} = 30^\circ$ 。地球公转轨道及火星公转轨道的偏心率均为 0, 地球公转轨道半径 $r_0 = 1 \text{AU}$, 火星公转轨道半径 $r_f = 1.52368 \text{AU}$ 。

在可行解计算过程中, 选取 LG 点个数为 10。最优解计算过程中, 选取 LG 点个数为 60。基于电动帆的地球至火星时间最优轨迹如图 4 所示, 相对太阳距离 - 时间曲线、极角 - 时间曲线、径向速度 - 时间曲线、切向速度 - 时间曲线和推进角 - 时间曲线如图 5 ~ 图 9 所示。

由仿真结果可以看出, 当电动帆特征加速度为 0.5mm/s^2 , 最大允许夹角为 30° 时, 地球至火星最小过渡时间为 502.22 天。基于 Gauss 伪谱法的路径规划对初值选取不敏感, 且由于在优化过程中无积分计算, 因此计算效率较高。

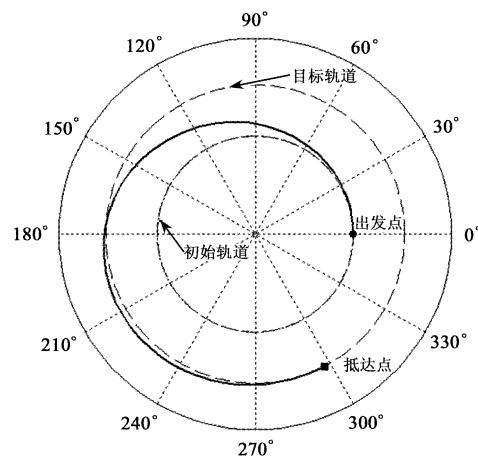


图 4 地球至火星时间最优运动轨迹

Fig. 4 Optimal trajectory for an Earth-Mars transfer

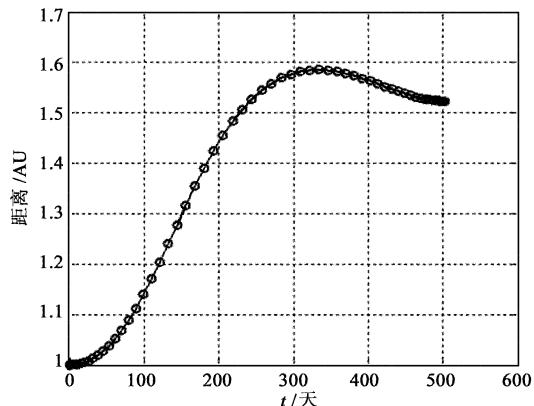


图 5 距离 - 时间曲线

Fig. 5 Time histories of radius

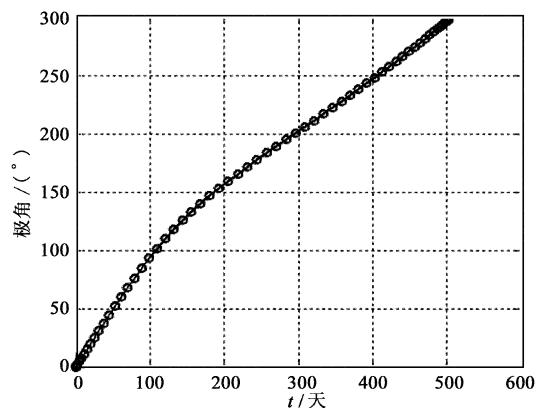


图 6 极角 - 时间曲线

Fig. 6 Time histories of polar angle

3.2 在线轨迹重新规划

当太阳处于活跃期时, 会向外喷射大量离子流, 即所谓的太阳风暴。太阳风暴期间, 太阳风离子密

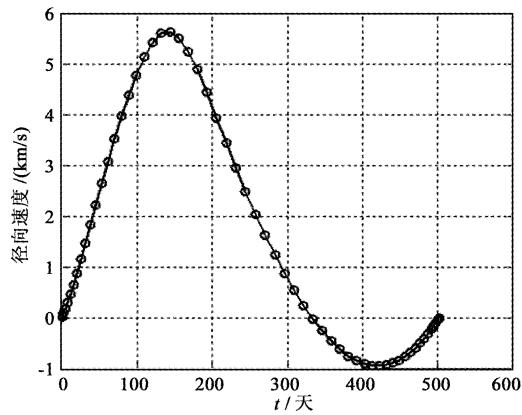


图 7 径向速度-时间曲线

Fig. 7 Time histories of radial velocity

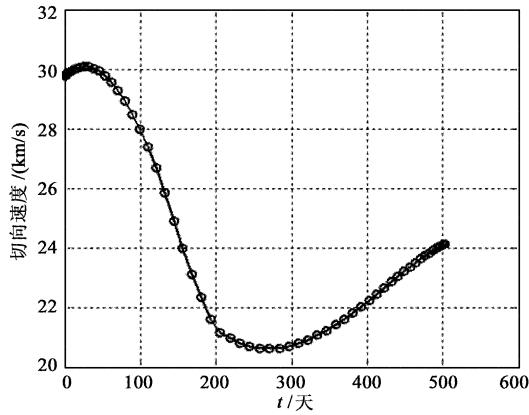


图 8 切向速度-时间曲线

Fig. 8 Time histories of tangential velocity

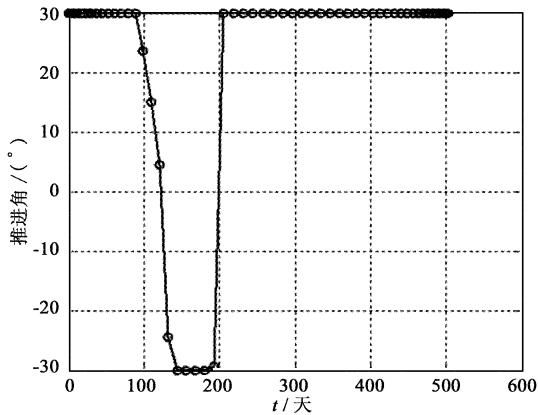


图 9 推进角-时间曲线

Fig. 9 Time histories of thrust angle

度及温度会显著提高,因此电动帆的加速度也会相应提高。为了提高电动帆对太阳风不确定性的适应能力,电动帆应该在检测到太阳风离子状态变化较大的情况下具有在线轨迹重新规划能力。

电动帆在线重新规划的基本思路是电动帆通过“太阳风检测器”定期对太阳风中高能粒子的密度、温度和速度进行检测。当检测到太阳风状态发生较大变化时,根据参考文献[6]中的公式对电动帆当前特征加速度 α_{\oplus} 重新计算,并通过深空自主导航技术获得当前位置及速度。最后,基于 Gauss 伪谱法将新的动力学方程离散化,以原轨迹作为非线性规划问题初值实现电动帆自主在线轨迹重新规划。

假设电动帆离开地球时的特征加速度为 0.5 mm/s^2 ,在运行 100 天后遭遇太阳风暴,特征加速度变为 1 mm/s^2 ,地球至火星重新规划运动轨迹如图 10 所示,其中虚线为遭遇风暴之前的最优轨迹,实线为遭遇风暴后重新规划的最优轨迹。

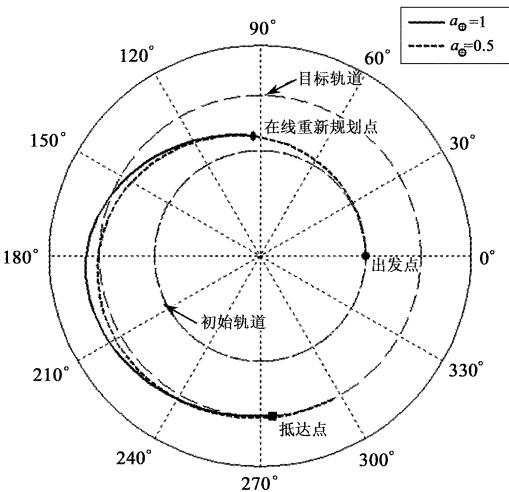


图 10 地球至火星重新规划运动轨迹

Fig. 10 Optimal trajectory for an Earth-Mars transfer

在台式机上电动帆重新规划时间为 61.46s,星载软件的计算时间会进一步降低。电动帆基于 Gauss 伪谱法进行在线轨迹重新规划,不需要像间接优化方法一样对协态变量初值进行猜测,也不需要人为输入非线性规划问题初值猜测,而且计算耗时较短。因此,电动帆基于 Gauss 伪谱法可以实现自主在线轨迹重新规划,提高对太阳风不确定性的适应能力。

3.3 电动帆与太阳帆性能对比

电动帆与太阳帆的工作原理相似,均不需要任何推进剂损耗便可获得连续的推力,不同的是太阳帆依靠高反射率材料反射太阳光中的光子获得推力,而电动帆是通过电场反射太阳风中的带电离子

获得动能。本节以太阳系外探测任务为例,对比电动帆与太阳帆的性能。假设电动帆和太阳帆在相对太阳距离为1AU时的推力加速度均为 0.8mm/s^2 ,初始轨道为地球公转轨道,运动终点为太阳系边缘(相对太阳距离100AU)。

为了对比电动帆与太阳帆的性能,本文对电动帆和太阳帆采用相同的优化策略和优化参数进行轨迹优化。轨迹优化的参数化方法均为Gauss伪谱法,数值优化方法均为序列二次规划算法。可行解计算过程中LG点个数均为10,最优解计算过程中LG点个数均为60,相对约束允许误差均为 1×10^{-9} 。电动帆和太阳帆的运动轨迹如图11所示,距离-时间曲线如图12所示。

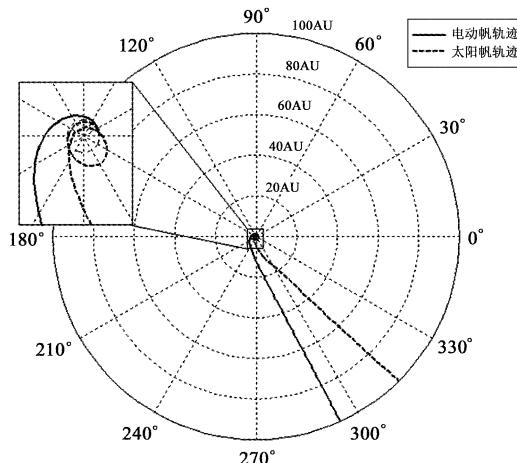


图11 电动帆和太阳帆最优运动轨迹

Fig. 11 Optimal trajectories of the electric sail and solar sail

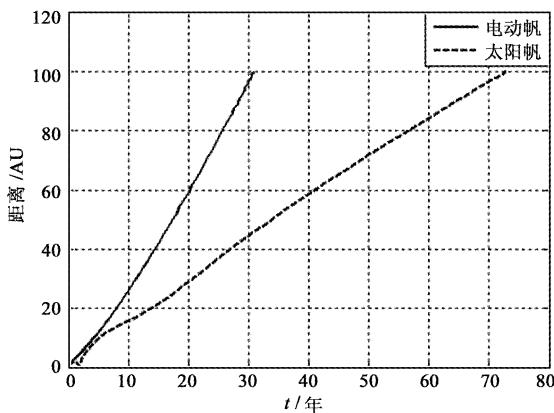


图12 距离-时间曲线

Fig. 12 Time histories of radius

仿真结果表明,虽然电动帆由于结构的原因,在推进角上较太阳帆有一定限制,但是由于太阳帆的

推力加速度与相对太阳距离的平方成反比关系,而电动帆的推力加速度与相对太阳距离的 $7/6$ 次方近似成反比关系。随着相对太阳距离 r 的增加,电动帆推力加速度相对于太阳帆推力加速度衰减较慢,所以电动帆能比太阳帆在更短的时间内完成星际远航探测任务。

4 结 论

本文利用Gauss伪谱法对电动帆的行星间过渡轨迹进行优化设计,选取优化性能指标为时间最优,同时满足路径约束和终端约束,仿真结果表明,所求轨迹能够很好地满足以上性能指标和约束要求。考虑到太阳风暴等原因造成电动帆特征加速度发生较大变化情况下,电动帆需要具有自主在线路径重新规划能力,分析表明由于采用Gauss伪谱法无需对状态变量初值进行猜测,并通过原轨迹获得非线性规划问题初值,且计算时间可以接受,因此电动帆基于Gauss伪谱法进行自主在轨路径重新规划是可行的。最后通过太阳系外探测任务对电动帆和太阳帆的性能进行比较,结果表明,电动帆在星际远航探测任务中占有优势。虽然电动帆目前还处于理论研究和试验阶段,但是前期的应用研究就是其应用于实际任务的第一步。

参 考 文 献

- [1] Quarta A, Mengali G. Electric sail mission analysis for outer solar system exploration[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(3): 740–755.
- [2] Janhunen P. Status report of the electric sail in 2009[J]. Acta Astronautica, 2011, 68:567–571.
- [3] Janhunen P, Sandroos A. Simulation study of solar wind push on a charged wire: basis of solar wind electric sail propulsion[J]. Annales Geophysicae, 2007, 25:755–767.
- [4] Janhunen P. Electrostatic plasma brake for deorbiting a satellite [J]. Journal of Propulsion and Power, 2010, 26(2):370–372.
- [5] Janhunen P. Electric sail for spacecraft propulsion[J]. Journal of Propulsion and Power, 2004, 20(4):763–764.
- [6] Mengali G, Quarta A, Janhunen P. Electric sail performance analysis[J]. Journal of Spacecraft and Rockets, 2008, 45(1): 122–129.
- [7] 唐国金,罗亚中,雍恩米.航天器轨迹优化理论、方法及应用[M].北京:科学出版社,2011:149–151.

- [8] David B. A gauss pseudospectral transcription for optimal control [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2005.
- [9] Guo T D, Jiang F H, Li J F. Homotopic approach and pseudospectral method applied jointly to low thrust trajectory optimization[J]. Acta Astronautica, 2012, 71:38 – 50.
- [10] 涂良辉, 袁建平, 罗建军. 基于伪光谱方法的有限推力轨道转移优化设计[J]. 宇航学报, 2008, 29(2):1189 – 1193.
[Tu Liang-hui, Yuan Jian-ping, Luo Jian-jun. Optimal design of orbital transfer with finite thrust based on legendre pseudospectral method[J]. Journal of Astronautics, 2008, 29 (2) : 1189 – 1193.]

作者简介:

齐乃明(1962 –),男,博士,教授,主要从事飞行器制导与控制、空间机构地面低重力模拟和空间飞行器地面物理仿真研究。

通信地址:哈尔滨工业大学 345 信箱(150006)

电话:(0451)86418119

E-mail :qinmok@163.com

霍明英(1986 –),男,博士生,主要从事飞行轨迹优化设计方法和空间飞行器地面物理仿真研究。本文通信作者。

通信地址:哈尔滨工业大学 345 信箱(150006)

电话:(0451)86418119

E-mail :huomingying123@163.com

(编辑:曹亚君)