

基于 T-H 方程的卫星轨迹模型参考输出跟踪控制方法

付艳明, 李 伟, 段广仁

(哈尔滨工业大学控制理论与制导技术研究中心, 哈尔滨 150001)

摘 要: 当目标卫星沿椭圆轨道运行时,描述追踪星与目标星相对运动的线性化方程为 T-H 方程。将描述航天器相对运动的 T-H 方程变换为周期系统的状态空间形式,并给出卫星轨迹跟踪控制问题的数学描述。基于周期系统的参量 Lyapunov 方法和模型参考跟踪控制理论,提出了卫星轨迹跟踪控制器的设计方法。利用该方法设计了带有收敛速率保障的反馈镇定控制器和具有自由参数的前馈控制器。对追踪星相对目标星悬停任务进行了数值仿真,仿真结果表明提出的控制方案是有效的。

关键词: 卫星轨迹跟踪; 周期系统; 模型参考; 悬停

中图分类号: V412.1 文献标识码: A 文章编号: 1000-1328(2013)04-0496-07

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2013.04.007

Satellite Trajectory Model Reference Output Tracking Control Based on T-H Equation

FU Yan-ming, LI Wei, DUAN Guang-ren

(Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The linearized T-H equation is suitable for describing the relative motion between the chaser satellite and the target satellite when the target satellite moves along the elliptical orbit. The T-H equation for illustrating the relative motion is transformed to the state-space form of periodic systems in this paper and the mathematic description of the trajectory tracking control problem is put forward. Then a general approach is proposed for the satellite trajectory tracking problem by using the parametric Lyapunov method based on periodic systems and the model reference theory. A feedback stabilizing controller with convergence rate guarantee and a feed-forward tracking controller with free parameters are built by using this method. The designed controllers are successfully applied to the satellite control system, and simulation results are provided under the conditional hovering over command signal, which demonstrate the validity of the proposed method.

Key words: Satellite trajectory tracking; Periodic systems; Model reference; Hovering over

0 引 言

在空间操作中,有时需要设计一颗小卫星悬停在目标星下方,时刻监视目标星的飞行状态、外形结构变化以及检查被追踪的飞行器是否正常工作等。这就要求追踪星与目标星的相对位置始终保持不变,即追踪星运行于目标星轨道下方的某个轨道上,

并且要求追踪星和目标星的轨道相位与轨道角速度均相同,这样追踪星就仿佛“悬停”在目标星的下方,这就是空间悬停问题^[1]。

空间交会,空间绕飞,空间规避,空间悬停等问题都可以归结为卫星轨迹跟踪控制问题。关于卫星轨迹跟踪控制方面的研究,文献[2]基于 C-W 方程提出了一种卫星轨迹跟踪控制的参数化方法,基于

模型参考输出跟踪方法给出了实现空间悬停时控制器的参数化设计方法。而文献[3]给出了卫星的悬停轨道的一种开路轨迹控制策略,并且验证了在一段时间内能够实现对空间目标的悬停。文献[4]对卫星相对空间目标任意位置实现悬停进行了受力分析,并给出了实现任意位置悬停的非开普勒轨道的开环控制方案,同时分析了对不同高度目标在不同位置实现悬停的能量消耗代价。文献[5]基于相对运动状态转移方程,提出了利用双脉冲校正伴随卫星的运动状态,并利用遗传算法对脉冲控制量进行了优化设计。这些结果都是假设目标星沿圆轨道运动,利用 C-W 方程描述航天器的相对运动,然而对目标星沿圆轨道运动的假设使得所提出的方法在空间应用中受到了限制。比如在卫星编队飞行中,主星的运动轨道多为任意的椭圆轨道,这时描述卫星相对运动的动力学方程应采用 T-H 方程。文献[9]针对目标星沿任意椭圆轨道的交会问题,提出了受饱和和控制约束的基于参量 Lyapunov 方法的控制器设计方法。

本文基于描述卫星间相对运动的 T-H 方程,将一般意义下的卫星轨迹跟踪问题归结为一个模型参考输出跟踪问题;然后采用参量 Lyapunov 方法和模型参考跟踪控制理论,给出了控制器的设计方法并进行了仿真验证。

1 问题的描述

在研究交会对接过程中,一般采用在目标星轨道坐标系内来描述追踪星与目标星的相对运动特性。当目标星沿椭圆轨道运动时,描述相对运动的线性化方程即为 T-H 方程^[6]。T-H 方程线性化过程中的假设条件仅为追踪星与目标星间的距离远小于目标星与中心天体间的距离,故其适用范围较广。

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k\omega^{\frac{3}{2}}x + 2\omega\dot{z} + \dot{\omega}z + \omega^2x + a_x \\ \ddot{z} = 2k\omega^{\frac{3}{2}}z - 2\omega\dot{x} - \dot{\omega}x + \omega^2z + a_z \\ \ddot{y} = -k\omega^{\frac{3}{2}}y + a_y \end{cases} \quad (1)$$

其中 k 为定义的常数, ω 为目标星轨道角速度, $\dot{\omega}$ 为目标星轨道角加速度, a_x , a_y , a_z 为相应方向上推力产生的加速度。目标星轨道坐标系与相关定义如图 1 所示。

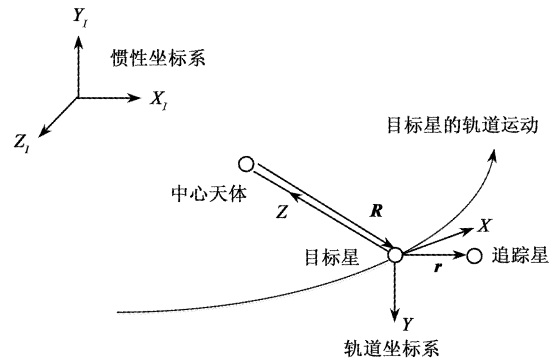


图1 目标星轨道坐标系与相关定义
Fig.1 Target satellite's orbit coordinate and related definitions

由于真近点角 θ 是时间 t 的单调增函数,故上述关于时间变量的方程可以转换为关于真近点角的方程。由数学上的求导法则易得对任意变量 a 求导有:

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{da}{d\theta} \quad (2)$$

进一步有:

$$\frac{d^2a}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{da}{dt} \right) = \omega \frac{d\omega}{d\theta} \frac{da}{d\theta} + \omega^2 \frac{d^2a}{d\theta^2} \quad (3)$$

记任意变量 a 相对真近点角 θ 的一阶导数与二阶导数分别为:

$$\frac{da}{d\theta} = a', \quad \frac{d^2a}{d\theta^2} = a''$$

则方程(1)可通过式(2)、(3)表示为相对于真近点角 θ 的方程:

$$\begin{cases} \omega^2 x'' + \omega \omega' x' = (\omega^2 - k\omega^{\frac{3}{2}})x + 2\omega^2 z' + \omega \omega' z + a_x \\ \omega^2 y'' + \omega \omega' y' = -k\omega^{\frac{3}{2}}y + a_y \\ \omega^2 z'' + \omega \omega' z' = (\omega^2 + 2k\omega^{\frac{3}{2}})z - 2\omega^2 x' - \omega \omega' x + a_z \end{cases} \quad (4)$$

由目标星轨道角动量 $h = \omega R^2$, 可得:

$$\omega = \frac{h}{R^2} = \frac{h}{\rho^2} (1 + e \cos \theta)^2 = k^2 \rho^2 \quad (5)$$

其中 $k \equiv \frac{\mu}{h^2}$, $\rho = 1 + e \cos \theta$, μ 为引力常数。进一步可得:

$$\omega' = 2k^2 \rho \rho' = -2k^2 e \sin \theta \rho \quad (6)$$

将(5)、(6)代入到方程(4)中可得:

$$\begin{cases} \rho \ddot{x}'' - 2\epsilon \sin\theta \dot{x}' - \epsilon \cos\theta x = \\ \quad 2\rho \dot{z}' - 2\epsilon \sin\theta z + \frac{1}{k^4 \rho^3} a_x \\ \rho \ddot{y}'' - 2\epsilon \sin\theta \dot{y}' = -y + \frac{1}{k^4 \rho^3} a_y \\ \rho \dot{z}'' - 2\epsilon \sin\theta \dot{z}' - (3 + \epsilon \cos\theta) z = \\ \quad -2\rho \dot{x}' + 2\epsilon \sin\theta x + \frac{1}{k^4 \rho^3} a_z \end{cases} \quad (7)$$

再做一个变量代换:

$$[\tilde{x}(\theta) \quad \tilde{y}(\theta) \quad \tilde{z}(\theta)]^T = \rho(\theta)[x(t) \quad y(t) \quad z(t)]^T$$

则方程(7)可等价地表示为:

$$\begin{cases} \tilde{x}'' = 2\tilde{z}' + \frac{1}{k^4 \rho^3} a_x \\ \tilde{y}'' = -\tilde{y}' + \frac{1}{k^4 \rho^3} a_y \\ \tilde{z}'' = 3\frac{\tilde{z}'}{\rho} - 2\tilde{x}' + \frac{1}{k^4 \rho^3} a_z \end{cases} \quad (8)$$

由方程(8)可知 y 方向的运动与 $x-z$ 平面内的运动解耦。故可分别考虑下面的两个子系统:

$$\begin{cases} \tilde{x}'' = 2\tilde{z}' + \frac{1}{k^4 \rho^3} a_x \\ \tilde{z}'' = 3\frac{\tilde{z}'}{\rho} - 2\tilde{x}' + \frac{1}{k^4 \rho^3} a_z \end{cases} \quad (9)$$

与

$$\tilde{y}'' = -\tilde{y}' + \frac{1}{k^4 \rho^3} a_y \quad (10)$$

对系统(1~9)取状态向量、控制向量、输出向量为:

$$\xi_i(\theta) = [\tilde{x}(\theta) \quad \tilde{z}(\theta) \quad \tilde{x}'(\theta) \quad \tilde{z}'(\theta)]^T,$$

$$u_i(\theta) = [a_x(\theta) \quad a_z(\theta)]^T,$$

$$\eta_i(t) = \frac{1}{\rho} [\tilde{x}(\theta) \quad \tilde{z}(\theta)]^T$$

则系统(9)可以表示为:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i'(\theta) = A_i(\theta)\xi_i(\theta) + B_i(\theta)u_i(\theta) \\ \eta_i(t) = C_i(\theta)\xi_i(\theta) \end{cases} \quad (11)$$

其中:

$$A_i(\theta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{3}{\rho} & -2 & 0 \end{bmatrix}, B_i(\theta) = \frac{1}{k^4 \rho^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_i(\theta) = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

易知系统(11)为 2π 周期连续线性系统。

问题 1. 对系统(11)以及给定参考信号 $\bar{\eta}_i(t)$, 求取控制律 $u_i(\theta)$ 使闭环系统输出 $\eta_i(t)$ 渐近跟踪 $\bar{\eta}_i(t)$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} [\eta_i(t) - \bar{\eta}_i(t)] = \mathbf{0}$ 。

说明 1. 由(8)可知 y 方向与 $x-z$ 平面内的运动解耦, 而 y 方向上的运动作为一个单输入、单输出系统, 轨迹跟踪控制问题是问题 1 的简化形式, 所以本文主要对 $x-z$ 平面内的控制问题进行求解。

说明 2. 在本文中, 具体的卫星轨迹跟踪选择空间悬停形式, 则参考信号可以表示为:

$$\bar{\eta}_r(t) = \begin{bmatrix} \bar{\eta}_{ir}(t) \\ \bar{\eta}_{or}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_d \\ z_d \\ y_d \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中 (x_d, y_d, z_d) 为期望的悬停点在目标星轨道坐标系中的坐标。

2 轨迹跟踪控制器存在条件

轨迹跟踪控制问题的基本要求是保证闭环系统稳定并可实现对给定参考指令的渐进跟踪。故实质上轨迹跟踪控制问题可归结为一个模型参考输出跟踪问题^[7], 其中参考信号可视为由如下的参考模型生成:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_r(t) = A_r \xi_r(t) \\ \eta_r(t) = C_r \xi_r(t) \end{cases} \quad (13)$$

其中 $\xi_r(t) \in \mathbf{R}^p$ 与 $\eta_r(t) \in \mathbf{R}^m$ 分别为参考模型的状态向量和输出向量, A_r 和 C_r 分别为相应维数的已知矩阵。

要使闭环系统的输出 $\eta(t)$ 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\eta(t) - \eta_r(t)] = \mathbf{0} \quad (14)$$

则所设计的控制律选为受控模型与参考模型的状态组合, 即

$$u = K(t)\xi + K_r(t)\xi_r \quad (15)$$

对于上述形如式(15)的控制器存在条件, 我们有如下定理。

定理 1. 对于一个 ω 周期连续线性系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)u(t) \\ \eta(t) = C(t)\xi(t) \end{cases} \quad (16)$$

假设矩阵对 $(A(t) \quad B(t))$ 可镇定, 且存在矩阵 $G(t) \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 和 $H(t) \in \mathbf{R}^{r \times p}$ 满足

$$\begin{cases} \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t) - \mathbf{G}(t)\mathbf{A}_r = \dot{\mathbf{G}}(t) \\ \mathbf{C}(t)\mathbf{G}(t) - \mathbf{C}_r = \mathbf{0} \end{cases} \quad (17)$$

则对于系统(16)的任何一个状态反馈镇定律的增益阵 $\mathbf{K}(t)$ 和如下定义的控制律:

$$\mathbf{K}_r(t) = \mathbf{H}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{G}(t) \quad (18)$$

控制律(15)可以使系统(16)的输出满足式(14)。

证. 记 $\delta\xi = \xi(t) - \mathbf{G}(t)\xi_r(t)$, $\delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) - \mathbf{H}(t)\xi_r(t)$, $\delta\eta(t) = \eta(t) - \eta_r(t)$, 则有:

$$\begin{cases} \delta\dot{\xi} = \dot{\xi}(t) - \dot{\mathbf{G}}(t)\xi_r(t) - \mathbf{G}(t)\dot{\xi}_r(t) \\ \quad = \mathbf{A}(t)\delta\xi + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u} + [\mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t) + \\ \quad \quad \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t) - \dot{\mathbf{G}}(t) - \mathbf{G}(t)\mathbf{A}_r]\xi_r(t) \\ \delta\eta = \eta(t) - \eta_r(t) = \mathbf{C}(t)\delta\xi + \\ \quad [\mathbf{C}(t)\mathbf{G}(t) - \mathbf{C}_r]\xi_r(t) \end{cases} \quad (19)$$

当下式

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{G}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{H}(t) - \mathbf{G}(t)\mathbf{A}_r \\ \mathbf{C}_r = \mathbf{C}(t)\mathbf{G}(t) \end{cases} \quad (20)$$

成立时,(19)简化为

$$\begin{cases} \delta\dot{\xi} = \mathbf{A}(t)\delta\xi + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{u} \\ \delta\eta = \mathbf{C}(t)\delta\xi \end{cases} \quad (21)$$

系统(21)与系统(16)具有完全相同的结构,故对于系统(16)的任意状态反馈镇定律

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\xi(t) \quad (22)$$

选取如下形式的状态反馈律

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{K}(t)\delta\xi \quad (23)$$

一定能够镇定系统(21),也即能够保证 $\lim_{t \rightarrow \infty} \delta\eta = \lim_{t \rightarrow \infty} [\eta(t) - \eta_r(t)] = \mathbf{0}$ 。

将 $\delta\mathbf{u}$ 与 $\delta\xi$ 的具体表达式应用到式(23),其可以等价地写为

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}(t)\xi(t) + [\mathbf{H}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{G}(t)]\xi_r(t) \quad (24)$$

从而结论得证。

3 控制器设计

根据定理1中控制器存在条件可知,问题1的求解分为两部分,即反馈镇定控制器和前馈补偿器

的设计。

3.1 反馈镇定控制器的设计

对于周期连续线性系统(16),我们采用一种参量 Lyapunov 方法来设计反馈镇定律。下面对系统(16)考虑最优能量控制问题。关于该问题的求解由下面的引理给出。

引理1. 对于 ω 周期的连续线性系统(16),其带有终端约束的最优控制问题为:

$$\begin{aligned} \inf_{\mathbf{u}(t)} \{ \int_{t_0}^{\infty} (\exp(\int_{t_0}^t \gamma(s) ds) \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) dt) \\ \text{s. t. } \lim_{t \rightarrow \infty} (\exp(\frac{1}{2} \int_{t_0}^t \gamma(s) ds) \mathbf{x}(t)) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (25)$$

其中 $\gamma(t)$ 为一连续函数且满足 $\gamma(t + \omega) = \gamma(t)$, $\forall t \in \mathbf{R}$; 并且 $\mathbf{R}(t + \omega) = \mathbf{R}(t) > \mathbf{0}$, $\forall t \in \mathbf{R}$ 。假设 $(\mathbf{A}(t) \quad \mathbf{B}(t))$ 可镇定,则优化问题(24)有解当且仅当

$$\int_0^{\omega} \gamma(s, \varepsilon) ds \neq -2\ln(|\mu|), \forall \mu \in \Psi(\mathbf{A}(t)) \quad (26)$$

满足,这里 $\Psi(\mathbf{A}(t))$ 表示 $\mathbf{A}(t)$ 的特征乘子集合。如果上述条件满足,则优化问题(24)的解可表示为

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\mathbf{W}^{-1}(t)\mathbf{x}(t), \forall t \in \mathbf{R} \quad (27)$$

其中 $\mathbf{W}(t)$ 为当 $\gamma(t)$ 满足

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega} \gamma(s) ds > \max \{ -\ln(\min_{\mu \in \Psi(\mathbf{A}(t))} \{ |\mu| \}) , \\ -2\ln(\min_{\mu \in \Psi(\mathbf{A}(t))} \{ |\mu| \}) \} \end{aligned} \quad (28)$$

时的 ω 周期 Lyapunov 微分方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{W}(t)(\mathbf{A}(t) + \frac{1}{2}\gamma(t)\mathbf{I}_n)^T + \\ (\mathbf{A}(t) + \frac{1}{2}\gamma(t)\mathbf{I}_n)\mathbf{W}(t) - \\ \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t) \end{aligned} \quad (29)$$

的唯一 ω 周期对称正定解。

3.2 前馈控制器的求解

本节根据定理1中控制器存在条件计算前馈补偿器。前馈控制器求解的核心问题是求解满足方程组(20)的矩阵 $\mathbf{G}(t) \in \mathbf{R}^{n \times p}$ 和 $\mathbf{H}(t) \in \mathbf{R}^{r \times p}$ 。

由矩阵分析中的相关理论可知当 $\mathbf{B}(t)$ 列满秩,且存在 $\mathbf{C}(t)$ 的广义逆 $\mathbf{C}^-(t)$ 使得 $\mathbf{C}(t)\mathbf{C}^-(t)\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_r$ 时,方程组(20)的解可以表示为:

$$\begin{cases} \mathbf{G}(t) = \mathbf{C}^{-}(t)\mathbf{C}_r + [\mathbf{I}_n - \mathbf{C}^{-}(t)\mathbf{C}(t)]\mathbf{Y}(t) \\ \mathbf{H}(t) = [\mathbf{B}^T(t)\mathbf{B}(t)]^{-1}\mathbf{B}^T(t) \\ \quad [\dot{\mathbf{G}}(t) + \mathbf{G}(t)\mathbf{A}_r - \mathbf{A}(t)\mathbf{G}(t)] \end{cases} \quad (30)$$

其中, $\mathbf{Y}(t)$ 是与 $\mathbf{G}(t)$ 同维数的自由变量矩阵。

3.3 问题1的求解算法

问题1即为对系统(11)求取控制器 $\mathbf{u}_i(\theta)$ 使其能成功实现对期望指令的跟踪。系统(11)满足控制器的下述存在条件:

(1) 由秩判据定理易得 $(\mathbf{A}_i(\theta) \quad \mathbf{B}_i(\theta))$ 完全可控, 故反馈镇定控制器存在。

(2) 对系统(11), $\mathbf{B}_i(\theta)$ 列满秩, 并且 $\mathbf{C}_i(\theta)$ 行满秩, 所以存在 $\mathbf{C}_i(\theta)$ 的广义逆 $\mathbf{C}_i^{-}(\theta)$, 使得 $\mathbf{C}_i(\theta)\mathbf{C}_i^{-}(\theta)\mathbf{C}_r = \mathbf{C}_r$, 故方程组

$$\begin{cases} \mathbf{G}'(\theta) = \mathbf{A}_i(\theta)\mathbf{G}(\theta) + \mathbf{B}_i(\theta)\mathbf{H}(\theta) - \frac{1}{\omega}\mathbf{G}(\theta)\mathbf{A}_r \\ \mathbf{C}_r = \mathbf{C}_i(\theta)\mathbf{G}(\theta) \end{cases}$$

可解。

由前面的论述可知, 对航天器轨迹跟踪控制问题, 反馈镇定控制器增益阵可以通过(27)求解, 前馈补偿增益阵可以通过(30)进行求解。并且在反馈补偿增益阵中含有自由参数矩阵 $\mathbf{Y}(\theta)$, 这就给控制律的设计带来了自由度。从节省燃料的角度出发, 本文中的前馈控制器求解问题可以进一步转化为下述非线性优化问题:

$$\min_{\mathbf{Y}(\theta)} \|\mathbf{K}_r(\theta)\|_2 \quad (31)$$

其中 $\mathbf{K}_r(\theta) = \mathbf{H}(\theta) - \mathbf{K}_i(\theta)\mathbf{G}(\theta)$ 。

基于轨迹跟踪控制器的存在条件, 并结合上面的分析, 给出问题1的求解算法。

第一步: 选取参考模型的参数矩阵 $\mathbf{A}_r, \mathbf{C}_r$ 与参数 $\gamma_i, \mathbf{R}_i(\theta), \theta_0$;

第二步: 基于下述 2π 周期 Lyapunov 微分方程求解 $\mathbf{W}_i(\theta)$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_i'(\theta) &= \mathbf{W}_i(\theta) \left(\mathbf{A}_i(\theta) + \frac{1}{2}\gamma_i\mathbf{I}_4 \right)^T + \\ &\quad \left(\mathbf{A}_i(\theta) + \frac{1}{2}\gamma_i\mathbf{I}_4 \right) \mathbf{W}_i(\theta) - \\ &\quad \mathbf{B}_i(\theta)\mathbf{R}_i^{-1}(\theta)\mathbf{B}_i^T(\theta) \end{aligned}$$

第三步: 求解反馈镇定控制器增益

$$\mathbf{K}_i(\theta) = -\mathbf{R}_i^{-1}(\theta)\mathbf{B}_i^T(\theta)\mathbf{W}_i^{-1}(\theta), \theta \geq \theta_0$$

第四步: 求解优化问题(31)获得 $\mathbf{Y}(\theta)$, 然后基于下述方程获得 $\mathbf{G}(\theta)$ 与 $\mathbf{H}(\theta)$

$$\begin{cases} \mathbf{G}(\theta) = \mathbf{C}_i^{-}(\theta)\mathbf{C}_r + [\mathbf{I}_4 - \mathbf{C}_i^{-}(\theta)\mathbf{C}_i(\theta)]\mathbf{Y}(\theta) \\ \mathbf{H}(\theta) = [\mathbf{B}_i^T(\theta)\mathbf{B}_i(\theta)]^{-1}\mathbf{B}_i^T(\theta) \left[\mathbf{G}'(\theta) + \right. \\ \quad \left. \frac{1}{\omega}\mathbf{G}(\theta)\mathbf{A}_r - \mathbf{A}_i(\theta)\mathbf{G}(\theta) \right] \end{cases}$$

进一步可求得前馈增益矩阵

$$\mathbf{K}_r(\theta) = \mathbf{H}(\theta) - \mathbf{K}_i(\theta)\mathbf{G}(\theta)$$

第五步: 基于第三步与第四步求得的前馈增益阵与反馈增益阵求解控制器

$$\mathbf{u}(\theta) = \mathbf{K}_i(\theta)\xi_i(\theta) + \mathbf{K}_r(\theta)\xi_r$$

说明3. 本文中对于航天器的轨迹跟踪问题的研究, 只针对了悬停这种简单情形。此时追踪星相与目标星相对运动的动态特性不明显, 其所跟踪的轨迹可以近似地看作是阶跃信号, 这时参考模型(13)的参数矩阵可取为: $\mathbf{A}_r = \mathbf{0}_{2 \times 2}, \mathbf{C}_r = \mathbf{I}_2$ 。

说明4. 记目标星椭圆轨道的偏近点角和平近点角分别为 E 和 M , 其中真近点角 θ 与偏近点角 E 有关系, $E = 2\arctan\left[\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$; 偏近点角 E 与平近点角 M 有关系, $M = E - e\sin E$, 平近点角 M 与时间 t 成线性关系。

说明5. 本文中引用了参量 Lyapunov 方法来求解 2π 周期连续线性系统的状态反馈控制器。值得注意的是该控制器是带有一定收敛速率 ($\exp(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \gamma(t)ds)$) 保障的能量最优控制, 关于 2π 周期 Lyapunov 微分方程的求解参见文献[9]。

说明6. 很多与航天器相对运动有关的问题都可以归结为模型参考输出跟踪问题, 比如卫星编队飞行中的队形保持问题、航天器的碰撞规避问题等, 其核心问题是参考模型中参数矩阵的选取。本文中只考虑了悬停这种简单情形, 而对于其它情形下参考模型矩阵的选取还有待进一步研究。

4 仿真结果及分析

在本节中, 为了验证前面对于椭圆轨道悬停跟踪所设计的控制器的有效性, 我们进行数值仿真。目标星的轨道参数: 半长轴 $a = 2.4616 \times 10^7$ m, 偏心率 $e = 0.73074$, 轨道周期 $T = 38436$ s, 角动量 $h = 6.762 \times 10^{10}$ m²/s, $k = 2.267 \times 10^{-2}$ (-s^{1/2}), 引力常

数 $\mu = 3.986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ 。

数值仿真中选取两航天器相对运动的初始状态为: $\xi_i = [-3000 \ 140000 \ -5 \ 5]^T$, 期望的悬停位置为: $\eta_r = [5000 \ 10000]^T$, 仿真时选取真近点角的初值 $\theta_0 = 0.2\pi$, 并选取参数 $\gamma_i = 1.3$, $R_i = \frac{1}{k^8 \rho^6} I_2$ 。

仿真得到的反馈增益阵, 前馈增益阵, 控制输入与系统输出曲线如图 2 ~ 图 5 所示。

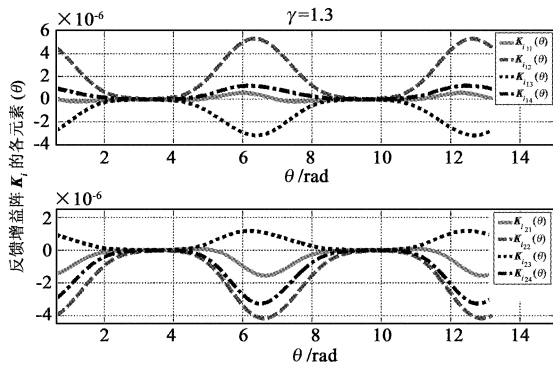


图 2 反馈增益阵 K_i 各元素曲线图

Fig. 2 Elements of feedback gain matrix K_i

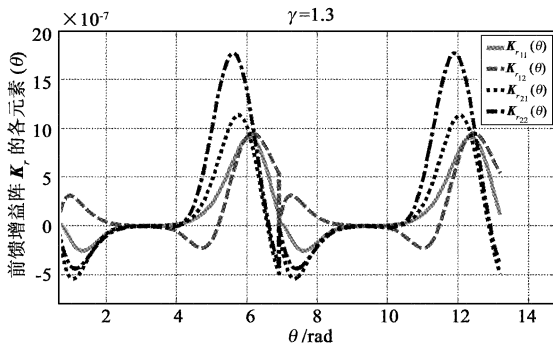


图 3 前馈增益阵 K_f 各元素曲线图

Fig. 3 Elements of feed-forward gain matrix K_f

仿真分析与结论:

(1) 从图 2 与图 3 中可以看出增益阵 K_i 与 K_f 各元素均为 2π 周期, 通过理论分析易知本文采用参量 Lyapunov 方法设计的反馈镇定器 K_i 应为 2π 周期的形式; 另一方面, H, G 与 K_i 都是 2π 周期的, 故理论上 K_f 应为 2π 周期的形式。

(2) 从图 4 中可以看出控制 u 并不是收敛到零的, 这是因为要实现追踪星相对目标星的悬停, 则追踪星的运行轨道为非开普勒轨道, 故要实现长时间的

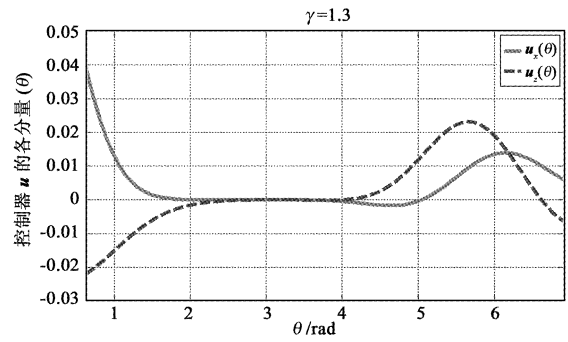


图 4 控制 u 各元素曲线图

Fig. 4 Elements of control signal u

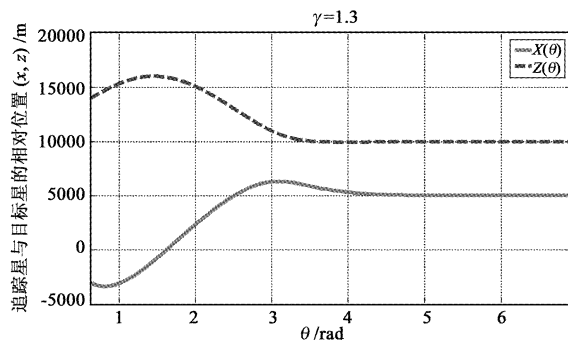


图 5 空间悬停中的运动轨迹

Fig. 5 Motion trajectory of space hovering

悬停, 则控制信号 u 理论上应该实时地作用于系统。

(3) 从图 5 中可以看到本文设计的控制器能够很好的实现对悬停指令的跟踪, 从初始位置到悬停点所需时间约为目标星运行周期的三分之二, 验证了本文中设计的控制器的快速性与准确。

5 结论

本文讨论了卫星轨迹跟踪的控制器设计问题, 通过分析描述追踪卫星和目标卫星的相对运动的 T-H 方程, 得到了具有 2π 周期的周期时变系统形式的航天器相对运动方程, 基于该方程给出了卫星轨迹跟踪控制问题的一般数学描述。进一步地采用模型参考跟踪控制思想给出了卫星轨迹跟踪控制器的存在条件, 基于周期系统参量 Lyapunov 方法和矩阵方程理论提出了轨迹跟踪控制器的设计算法。文中对追踪星相对目标星悬停进行了数值仿真, 结果表明所设计的控制器能够快速、准确地实现追踪星对目标星的悬停, 从而验证了本文所提控制方案的有效性。

参 考 文 献

- [1] 林来兴. 绕飞轨道动力学和控制策略[J]. 宇航学报, 2000, 21(4): 100-106. [Lin Lai-xing. Fly-around orbit dynamics and control strategy[J]. Journal of Astronautics, 2000, 21(4): 100-106.]
- [2] 段广仁, 谭峰, 张世杰, 等. 卫星轨迹跟踪控制的参数化方法[J]. 空间控制技术与应用, 2008, 34(5): 3-7. [Duan Guang-ren, Tan Feng, Zhang Shi-jie, et al. A parametric approach to satellite trajectory tracking control [J]. Aerospace Control and Application, 2008, 34(5): 3-7.]
- [3] 林来兴, 黎康. 卫星对空间目标悬停的轨道动力学与控制方法研究[J]. 中国空间科学技术, 2008, (1): 9-12. [Lin Lai-xing, Li Kang. Orbit dynamics and control of satellites hovering over space target [J]. Chinese Space Science and Technology, 2008, (1): 9-12.]
- [4] 阎野. 卫星相对空间目标任意位置悬停的方法研究[J]. 中国空间科学技术, 2009, (1): 1-5. [Yan Ye. Study of hovering method at any selected position to space target[J]. Chinese Space Science and Technology, 2009, (1): 1-5.]
- [5] 王志刚, 陈士橧, 袁建平. 伴随卫星轨道保持[J]. 宇航学报, 2004, 25(4): 398-400. [Wang Zhi-gang, Chen Shi-Lu, Yuan Jian-ping. On concomitant satellite orbital maintenance [J]. Journal of Astronautics, 2004, 25(4): 398-400.]
- [6] Koji Y, Finn A. New state transition matrix for relative motion on an arbitrary elliptical orbit[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2002, 25(1): 60-66.
- [7] 段广仁, 强文义, 冯文剑, 等. 模型参考控制系统设计的一种完全参数化方法[J]. 宇航学报, 1994, 15(2): 7-13. [Duan Guang-ren, Qiang Wen-yi, Feng Wen-jian, et al. A complete parametric approach for model reference control system design[J]. Journal of Astronautics, 1994, 15(2): 7-13.]
- [8] 周彬. 具有饱和和非线性的控制系统设计的参量 Lyapunov 方法及其应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2010. [Zhou Bin. Parametric lyapunov approach to the design of control systems with saturation nonlinearity and its applications[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2010.]
- [9] Zhou B, Lin Z L, Duan G R. Lyapunov differential equation approach to elliptical orbital rendezvous with constrained controls [J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2011, 34(2): 345-358.

作者简介:

付艳明(1978-), 男, 博士, 副教授, 主要从事鲁棒控制理论、卫星姿态与轨道控制等方面的研究。

通信地址: 哈尔滨工业大学 416#(150001)

电话: 13936300661

E-mail: fuyanming@hit.edu.cn

(编辑: 张宇平)