

浸入边界-格子 Boltzmann 模型耦合 网格比数值特性

李汉军

北京理工大学生命学院, 北京 100081

摘要 为对浸入边界-格子 Boltzmann 方法框架 (IB-LBM) 下浸入边界点数量的设置提供依据, 本文采用雷诺数 $Re=40$ 和 100 下的圆柱绕流作为理论验证模型, 对不同耦合网格比 CRG (Coupling Ratio of Grid) 下的计算稳定性进行研究。分别采用 D_{p4-p} (4-point Piecewise Delta) 函数和 D_{c4-p} (4-point Cosine Delta) 函数作为平滑函数, 通过分析 $Re=40$ 圆柱绕流充分发展后的流线分布、尾涡长度和阻力系数等指标, 获得了在 D_{p4-p} 下 CRG 的相对稳定范围大致为 $0.2-2$ 之间, 在 D_{c4-p} 下相对稳定范围大致为 $1.5-2$ 之间。在 $Re=100$ 下, 通过细分 CRG 对圆柱绕流进行计算, 对照阻力系数的变化, 与 $Re=40$ 时的情况基本一致, 表明 D_{p4-p} 有更宽的稳定取值范围, 这为 IB 应用过程中合理选择 Delta 函数及相应的 CRG 取值提供了参考。

关键词 浸入边界-格子 Boltzmann 模型; 耦合网格比; 圆柱绕流

中图分类号 TQ050.4*25

文献标识码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2012.18.002

Numerical Character of Grid Coupling Ratio for the Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Model

LI Hanjun

School of Life Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China

Abstract In order to provide the foundation for immersed boundary points setting in the Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Model (IB-LBM) frame, the numerical stability with the different Coupling Ratio of Grid (CRG) between the IB and LBM is studied. As the theoretical model to be verified for the applicable coupling ratio, flows around a circular cylinder with the Reynolds number of $Re=40$ and 100 are calculated, respectively. The distribution of streamline, the length of wake vortex, and the drag coefficient are analyzed for the case of $Re=40$ with the 4-point Piecewise Delta function being adopted in IB, the calculating results indicate that an acceptable range for CRG is $0.2-2$, it is also essentially true for the case of $Re=100$. However, a different CRG range of $1.5-2$ is found while the 4-point Cosine Delta function is used, the fact indicates that the 4-point Piecewise Delta function has a wider range for setting CRG, it is of great value to the optimal choices for Delta function and corresponding CRG in the IB applications.

Keywords immersed boundary-lattice Boltzmann model; coupling ratio of grid; flow around a circular cylinder

0 引言

浸入边界法 (Immersed Boundary, IB) 最初由 Peskin 在 1972 年提出, 它的基本思想是将复杂结构的边界模化成流场中的体力, 并使用简单的笛卡尔网格作为背景网格, 本身则由可移动点依序连接而成^[1]。格子 Boltzmann 方法 (Lattice Boltzmann Method, LBM) 是近年发展起来的一种新的流体计算方法, LBM 从微观的粒子尺度出发, 以简单规则的微观粒

子运动代替复杂多变的宏观现象。该方法具有计算规则简单、复杂边界处理灵活、易于并行计算等特点^[2]。由于 LBM 通常采用与 IB 相匹配的网格, 因而两者易结合形成 IB-LBM 数值建模框架用以处理流固耦合问题。当前, IB-LBM 已在生物游动、生物飞行、生物瓣膜运动、流体中颗粒输运、纤丝摆动等的机理研究获得了广泛应用^[3-4]。

为方便建模, IB 边界点通常采用均匀设置, 其数量以边

收稿日期: 2012-03-23; 修回日期: 2012-05-14

基金项目: 北京理工大学基础研究基金项目 (3160012211104)

作者简介: 李汉军, 副研究员, 研究方向为生物力学, 电子信箱: hjl@bit.edu.cn

界上相邻点的距离与背景网格宽度之比来衡量,本文称为耦合网格比(Coupling Ratio of Grid, CRG),该比值越小表示边界点越密集,反之越稀疏。关于 CRG 疏密程度的确定,理论上采用不同的平滑函数应有不同的参考范围,但对不同平滑函数下的数值计算差异探讨较少,这使得平滑函数的选择缺乏实践指导依据。为此,本文以 IB-LBM 框架下 CRG 的数值特性为研究对象,重点探讨两种常用平滑函数在圆柱绕流计算中的数值特性,归纳其对应的稳定取值范围并进行比较,为 IB-LBM 建模中选择不同平滑函数时选择合适的 CRG 值提供了参考。

1 IB-LBM 框架

在 IB 中,固体边界 Γ 浸入在流场中,通过采用一系列施加在边界点周围流体上的体力密度 F 来表示其边界对流体的作用。设 X 为边界 Γ 的位置,采用 Delta 平滑函数 $D(x)$,通过函数

$$f(x, t) = \int_{\Gamma} F(s, t) D(x - X(s, t)) ds \quad (1)$$

可将边界点上的体力密度 F 加权转移到该点周围的背景网格上^[5],其中 $D(x)$ 为

$$D(x - X) = \prod_{i=1}^n \phi(x_i - X_i) \quad (2)$$

其中,函数 ϕ 存在多种具体的形式,4-point ϕ 函数最为常用。4-point ϕ 函数中有两种最为常见,第 1 种为^[3-5]

$$\phi(r) = \begin{cases} (3 - 2|r| + \sqrt{1 + 4|r| - 4r^2})/8, & |r| \leq 1 \\ (5 - 2|r| - \sqrt{-7 + 12|r| - 4r^2})/8, & 1 \leq |r| \leq 2 \\ 0, & |r| \geq 2 \end{cases} \quad (3)$$

相应的平滑函数称为 4-point Piecewise Delta 函数,记为 D_{p4-p} ;另一种 4-point ϕ 函数为^[5-6]

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + \cos(\frac{\pi r}{2})), & |r| \leq 2 \\ 0, & |r| \geq 2 \end{cases} \quad (4)$$

相应的平滑函数称为 4-point Cosine Delta 函数,记为 D_{c4-p} 。

Peskin 和 McQueen^[7]曾对 D_{p4-p} 和 D_{c4-p} 做过比较,前者能完全满足 Delta 函数定义的 5 个条件,后者只能满足其中的 4 个条件。对比认为,这两种平滑函数在空间分布上相似,差别不大,因此两种函数在其后的研究中一直被并行使用。然而,本文在进行圆柱绕流的升阻力验证时,发现两种平滑函数在数值稳定性上存在一定的差异,为此对这种差异进行了细致的研究。图 1 为 D_{c4-p} 对 D_{p4-p} 函数在三维空间的数值误差,两者的相对误差范围约为 $\pm 1.7\%$,这说明两种平滑函数在空间数值分布上比较接近,但确存在一定的差异。

采用

$$U(X(s, t)) = \int_{\Omega} u(x, t) D(x - X(s, t)) dx \quad (5)$$

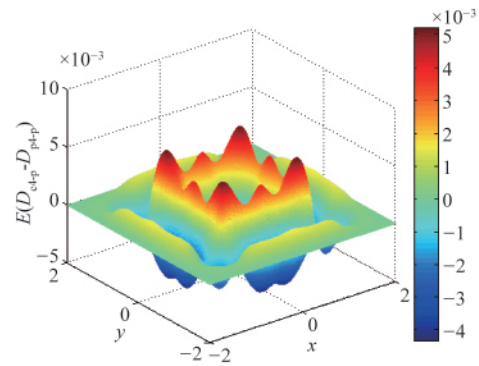


图 1 D_{c4-p} 对 D_{p4-p} 函数在三维空间的数值误差

Fig. 1 3D numerical error of D_{c4-p} to D_{p4-p}

可将浸入边界附近背景网格点的速度转化为相应 IB 点的速度^[3-4];若边界发生移动,则以

$$\frac{\partial X}{\partial t} = U(s, t) \quad (6)$$

更新边界点的位置^[3-4]。

对于流体计算,本文采用单松弛因子的标准 LBM,其描述的流体的宏观运动规律满足如下控制方程^[6]

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) + \nabla p = \mu \nabla^2 u + f \quad (7)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (8)$$

其中, u 为二维速度向量, f 为二维体力密度向量, p 为压力, ρ 为密度。在微观层次, LBM 的演化方程为^[6]

$$g_i(x + e_i \Delta t, t + \Delta t) - g_i(x, t) = -\frac{1}{\tau} [g_i(x, t) - g_i^{eq}(x, t)] + \Delta t G_i \quad (9)$$

$g_i(x, t)$ 为粒子在位置 x 和时刻 t 时的速度分布函数, Δt 为时间步长, $g_i^{eq}(x, t)$ 为平衡态分布函数, τ 为无量纲松弛时间, G_i 为体力项。对于二维九速模型(D2Q9)^[2],其粒子分布函数和方向如图 2 所示,每个格点上 9 个方向的速度 e_i 为

$$e_0 = (0, 0)$$

$$e_i = \left(\left(\frac{\cos \pi(i-1)}{2} \right), \sin \left(\frac{\pi(i-1)}{2} \right) \right) \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (10)$$

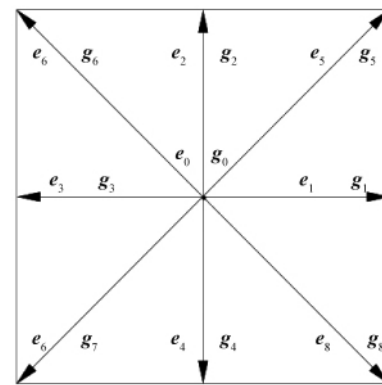


图 2 二维九速格子模型(D2Q9)

Fig. 2 Two-dimensional nine-speed lattice model (D2Q9)

$$e_i = \left(\left(\frac{\cos \pi(i-4.5)}{2} \right), \sin \left(\frac{\pi(i-4.5)}{2} \right) \right) \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad i=5, 6, 7, 8$$

其中 Δx 为格子宽度。 $g_i^{eq}(x, t)$ 和 G_i 由下式计算:

$$g_i^{eq} = \omega_i \rho \left[1 + \frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{uu : (e_i e_i - c_s^2 I)}{2c_s^4} \right] \quad (11)$$

$$G_i = \left(1 - \frac{1}{2\tau} \right) \omega_i \left[\frac{e_i \cdot u}{c_s^2} + \frac{(e_i \cdot u)}{c_s^4} e_i \right] \cdot f \quad (12)$$

其中 ω_i 为权重, $\omega_0 = 4/9$, 当 $i=1, 2, 3, 4$ 时 $\omega_i = 1/9$, 当 $i=5, 6, 7, 8$ 时, $\omega_i = 1/36$; c_s 为格子声速, 定义为 $c_s = \Delta x / \sqrt{3} \Delta t$; I 为单位矩阵。运动黏度由下式计算:

$$\nu = (\tau - 0.5) c_s^2 \Delta t \quad (13)$$

密度、速度和压力分别由下式给出:

$$\rho = \sum_i g_i \quad (14)$$

$$u = \frac{\sum_i e_i g_i + 0.5 f \Delta t}{\rho} \quad (15)$$

$$p = \sum_i \rho c_s^2 \quad (16)$$

在 IB-LBM 框架中, 流固耦合过程可总结如下:

- (1) 计算边界点上的体力;
- (2) 将体力平滑分布到边界周围的 Euler 点上;
- (3) 流体受到体力的影响, 运动状态发生变化;
- (4) 用 Delta 函数将流体速度平滑加和到边界上;
- (5) 更新边界的位置, 返回(1)。

2 CRG 数值特性分析

2.1 基于 IB-LBM 的圆柱绕流

黏性不可压缩流体绕圆柱的流动随着雷诺数改变会呈现不同的流动状态。随着雷诺数从低到高变化, 流动状态分别经历贴体流动、出现对称尾涡、尾流失稳出现卡门涡街, 最终形成紊流。由于在圆柱绕流中, 在不同雷诺数下存在确定的可观指标, 如尾涡长度、升力系数、阻力系数、斯特鲁哈数等, 因此本文采用圆柱绕流计算结果作为分析依据。按照不同雷诺数下的流态差异, 主要选择 $Re=40$ 和 $Re=100$ 下的圆柱绕流来研究 CRG 的数值特性。

采用的计算区域与边界条件如图 3 所示。首先考虑 $Re=40$ 的情况, 依据文献[8]—[9]中推荐的 CRG 的范围 0.4—0.9,

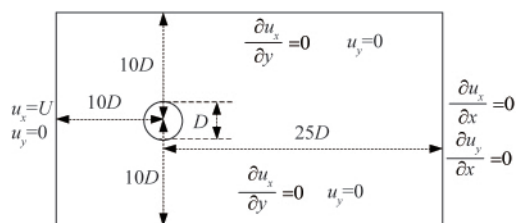


图 3 圆柱绕流计算域及边界设置

Fig. 3 Computational domain and boundary setting for the circular cylinder

在计算采用平滑函数 D_{p4-p} 时设置 $CRG=0.5$ 。采用 D_{c4-p} 进行计算时发现, $CRG=0.5$ 时计算升力系数和阻力系数时收敛情况较差, 而当 CRG 升至大约 1.5 时, 才出现稳定的计算结果。

升力系数和阻力系数采用下式计算:

$$C_d = \frac{F_d}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \quad (17)$$

$$C_l = \frac{F_l}{\frac{1}{2} \rho U^2 D} \quad (18)$$

其中, ρ 是流体密度, U 是未受干扰的自由来流速度, D 为圆柱直径, F_d 为圆柱上的阻力, F_l 为圆柱上的升力。本文计算结果及相关文献结果见表 1, 其中 h 为单位网格的宽度。

表 1 数值计算结果比较

Table 1 Comparison between the numerical results

出处	$Re=40$		$Re=100$	
	C_d	L/D	C_d	C_l
Niu 等 ^[10]	1.589	2.26	—	—
Le 等 ^[11]	1.580	2.59	1.39	± 0.346
Shin 等 ^[12]	1.572	2.40	1.40	± 0.343
Wu 和 Shui ^[13]	1.565	2.31	1.36	± 0.344
Wang 等 ^[14]	1.660	2.35	1.38	± 0.357
Tian 等 ^[3-4]	1.620	—	1.44	—
Present ($D=20h, D_{p4-p}, CRG=0.5$)	1.649	2.34	1.45	± 0.368
Present ($D=30h, D_{p4-p}, CRG=0.5$)	1.637	2.26	1.43	± 0.356
Present ($D=40h, D_{p4-p}, CRG=0.5$)	1.635	2.25	1.42	± 0.354
Present ($D=20h, D_{c4-p}, CRG=1.5$)	1.655	2.36	1.46	± 0.370
Present ($D=30h, D_{c4-p}, CRG=1.5$)	1.641	2.28	1.43	± 0.357
Present ($D=40h, D_{c4-p}, CRG=1.5$)	1.638	2.27	1.43	± 0.355

表 1 说明, 采用两种平滑函数, 本文方法对 $Re=40$ 和 $Re=100$ 的计算结果与部分文献的结果吻合较好, 这说明本文的圆柱绕流计算模型是有效的。

通过等比例改变网格规模计算表明, 网格规模对计算结果有一定的影响, 但当网格规模到达一定数量后, 计算结果趋于稳定。依据表 1, $D=30h$ 和 $D=40h$ 对应网格规模的计算结果比较接近, 为了确保计算结果正确的同时减小计算量, 本文选用 $D=30h$ 时对应的网格规模进行分析。

2.2 $Re=40$ 下 CRG 的响应差异分析

过小的 CRG 设置, 将会增加 IB 点数量而导致很大的计算开销, 过大的 CRG 设置会破坏浸入边界的连续性, 从而导致计算模型失效。此外, CRG 也是一个影响计算稳定性的重要因素, 尽管有文献给出了一些 IB 点数量取值的经验性参考范围, 然而在具体的计算问题中, 不同的平滑函数应如何取值还缺乏定量的参考。

首先考虑平滑函数为 D_{p4-p} 时的情况。通过改变 CRG, 观察图 4 所示 4 种情况下的流线情况发现, 尾涡的长度与圆柱

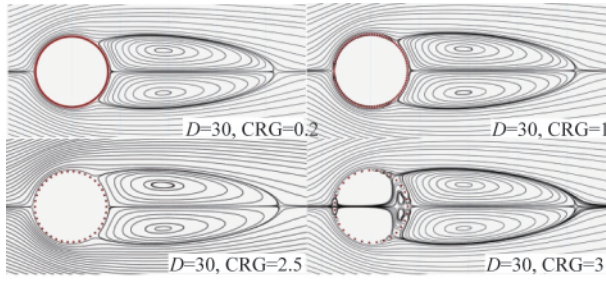


图 4 D_{p4-p} 下 4 种 CRG 对应的流线分布

Fig. 4 Streamline distribution under D_{p4-p} for 4 cases of CRG

直径之比均为 2.26 左右,然而当 $CRG=3$ 时有明显的流穿越相邻的 IB 点,尾涡前端变形, $CRG=0.2,1,2.5$ 时,尾涡的大度基本相同,没有发现有明显的流线直接穿越圆柱的情况,这说明在 $Re=40$ 时, CRG 在 0.2—2.5 范围内结果是基本稳定的。

考虑平滑函数为 D_{c4-p} 时的情况。通过改变 CRG ,观察图 5 所示 4 种情况下的流线情况发现,尾涡的长度与圆柱直径之比均为 2.28 左右,然而当 $CRG=2.5$ 时有少量的流线穿越相邻的 IB 点,这说明在 $Re=40$ 时,对于平滑函数 D_{c4-p} , CRG 在 0.2—2 范围内结果是基本稳定的。

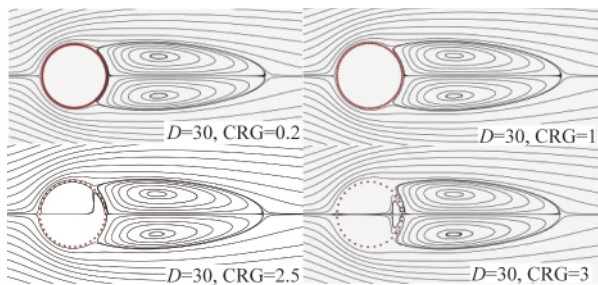


图 5 D_{c4-p} 下 4 种 CRG 对应的流线分布

Fig. 5 Streamline distribution under D_{c4-p} for 4 cases of CRG

圆柱绕流阻力系数是一个常用的定量比较标准。通过对比两种平滑函数在充分发展后的阻力系数发现:对于 D_{p4-p} ,计算结果均能达到稳定,其稳定区间大约为 0.2—2 之间;对于 D_{c4-p} , CRG 为 0.2,0.5,1 时,在进行 50000 次迭代后,阻力系数仍有增加的趋势,没有严格收敛;从 $CRG=1.5$ 开始,其后的计算结果严格收敛,稳定范围为 1.5—2,其阻力系数变化情况如图 6 所示。这说明 D_{p4-p} 下的计算结果有更好的数值稳定性。

2.3 $Re=100$ 时 CRG 的响应差异分析

为了进一步比较两种平滑函数对圆柱绕流计算结果的影响,细化 CRG 的取值,对 $Re=100$ 时圆柱绕流的阻力系数进行研究。图 7 给出了 8 种 CRG 下圆柱阻力系数的整体演变情况,其中, CRG 的变化范围选取参考了本文 $Re=40$ 时 CRG 稳定范围的结论。

图 7 中,在采用 D_{c4-p} 进行计算时, CRG 在 0.4 到 1.2 内的取值对应的阻力系数均有增加并远离期望值(期望值为 1.43)的趋势, CRG 的取值在 1.4 到 1.8 间的取值能较好地逼

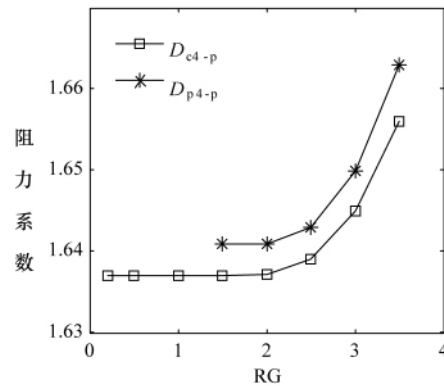


图 6 两种平滑函数下阻力系数随 CRG 的变化

Fig. 6 Drag coefficient changes with CRG under D_{p4-p} and D_{c4-p} , respectively

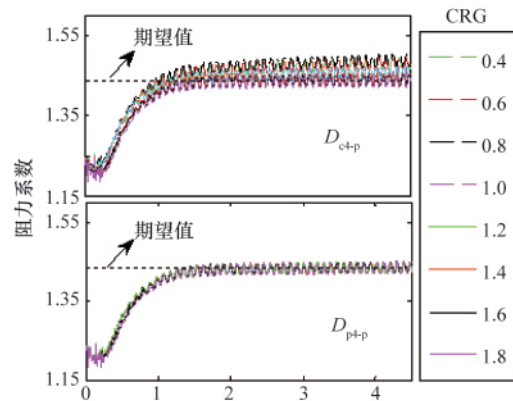


图 7 阻力系数的整体演化情况

Fig. 7 Evolutional processes of drag coefficient

近期望值。相比之下,采用 D_{p4-p} 进行计算时,所有的 CRG 取值均能较好地逼近期望值,这说明 CRG 的取值在 0.4 到 1.8 之间时,采用 D_{p4-p} 进行计算均能达到稳定。图 8 显示了图 7 中迭代次数在 40000 到 45000 之间的阻力系数变化细节。

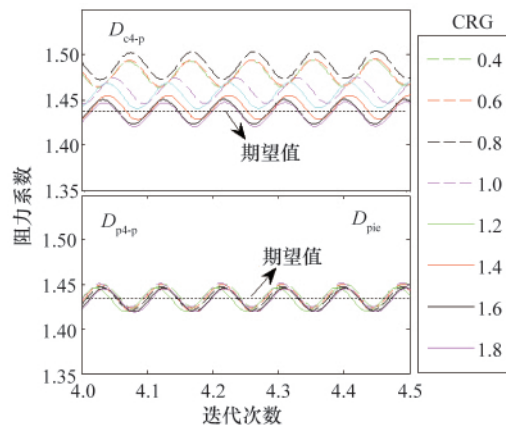


图 8 阻力系数细节变化

Fig. 8 Detail changing of drag coefficient

以上研究结果表明,在 IB-LBM 中,采用 D_{p4-p} 和 D_{c4-p} 构建 Delta 函数进行数值模拟时,定性的计算结果差别较小,但在定量计算中发现, D_{p4-p} 有更宽的稳定取值范围。此外,对于 D_{p4-p} , 由于 IB 常用于弹性变形体的模拟, 因此采用 0.4—0.9 的参考范围是合理的,这考虑了边界点之间距离被压缩或拉伸时的稳定性,但是对于 D_{c4-p} ,其稳定取值范围较窄,在定量研究时需充分考虑。

3 结论

根据 $Re=40$ 的计算结果,从流线分析角度可知采用 D_{p4-p} 和 D_{c4-p} 构建 Delta 函数时,流线分布结构基本相似。在不同的 CRG 下分析阻力系数时发现,在流场充分发展后, D_{c4-p} 下的阻力系数计算结果在 CRG 值位于 0.2—1.5 间时不同程度地偏离期望值,位于 1.5—2 间时计算结果达到稳定,与期望值相符;相比之下, D_{p4-p} 下的阻力系数计算结果均与期望值吻合,这说明 D_{p4-p} 比 D_{c4-p} 有更宽的稳定取值范围。 $Re=100$ 时的阻力系数分析进一步验证了 $Re=40$ 时得出的结论。总的分析结果表明,在 IB-LBM 框架下,采用 D_{p4-p} 构建平滑函数可获得更好的数值稳定性。

致谢 感谢田方宝博士、王勇博士在论文完成中给予的指导。

参考文献 (References)

- [1] Peskin C S. Flow patterns around heart valves: A digital computer method for solving the equations of motion [D]. New York: Yeshiva University, 1972.
- [2] 何雅玲, 王勇, 李庆. 格子 Boltzmann 方法的理论及应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2009.
He Yalin, Wang Yong, Li Qing. Theory and application of lattice Boltzmann method[M]. Beijing: Science Press, 2009.
- [3] Tian F B, Luo H, Zhu L, et al. Interaction between a flexible filament

- and a downstream rigid body[J]. *Phys Rev E*, 2010, 82: 026301.
- [4] Tian F B, Luo H, Zhu L, et al. An efficient immersed boundary-lattice Boltzmann method for the hydrodynamic interaction of elastic filaments [J]. *J Comput Phys*, 2011, 230: 7266-7283.
- [5] Peskin C S. The immersed boundary method [J]. *Acta Numerica*, 2002, 11: 479-517.
- [6] Hao J, Zhu L. A lattice Boltzmann based implicit immersed boundary method for fluid-structure- interaction [J]. *Comput Math Appl*, 2010, 59 (1): 185-193.
- [7] Peskin C S, McQueen D M. A general method for the computer simulation of biological systems interacting with fluids[J]. *Symposia of the Society for Experimental Biology Fluid Dynamics*, 1995, 49: 265-276.
- [8] Silva A L, Silveira-Neto A, Damasceno J J. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method[J]. *J Comput Phys*, 2003, 189(2): 351-370.
- [9] Bringley T T. Analysis of the immersed boundary method for Stokes flow [D]. New York: New York University, 2008.
- [10] Niu X D, Shu C, Chew Y T, et al. A momentum exchange-based immersed boundary-lattice Boltzmann method for simulating incompressible viscous flows[J]. *Physics Letters A*, 2006, 354(3): 173-182.
- [11] Le D V, Khoo B C, Lim K M. An implicit-forcing immersed boundary method for simulating viscous flows in irregular domains [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 197 (25-28): 2119-2130.
- [12] Shin K, Kang K, Yassin A. A comparative study of direct-forcing immersed boundary-lattice Boltzmann methods for stationary complex boundaries [J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 2011, 66(9):1132-1158.
- [13] Wu J, Shu C. Implicit velocity correction-based immersed boundary-lattice Boltzmann method and its applications [J]. *J Comput Phys*, 2009, 228(6): 1963-1979.
- [14] Wang Z, Fan J, Cen K. Immersed boundary method for the simulation of 2D viscous flow based on vorticity-velocity formulations [J]. *J Comput Phys*, 2009, 228(5): 1504-1520.

(责任编辑 马宇红,代丽)

·学术动态·

“动物行为及其在水产中 应用研讨会”征稿



中国水产学会、中国动物学鱼类学分会拟于 2010 年 9 月 26—28 日在上海市举办“动物行为及其在水产中应用研讨会”。

征稿范围:基础行为学、行为生态学、化学生态学、感觉生物学、分子行为学、行为进化等

全文截稿日期:2012 年 8 月 25 日

联系电话:021-65809358

电子信箱:zd_fit@hotmail.com

大会网站: <http://www.csfish.org.cn/cs/showInfo.asp?id=755>