

平滑零范数稀疏度约束下的盲稀疏回溯重构算法

田文彪, 芮国胜

(海军航空工程学院信号与信息处理山东省重点实验室, 烟台 264001)

摘 要: 现有的回溯迭代类算法具有重构速度快、精度高等优点,但实际中其需要已知信号稀疏度的条件有时难以满足。针对以上不足,提出了一种基于平滑零范数稀疏度约束的盲稀疏回溯重构算法,并证明了其收敛性。该算法不需已知稀疏度先验,在截断过程中以平滑零范数来估计信号的稀疏度并确定支撑集。新算法继承了现有回溯迭代类算法的有效性,同时避免了因稀疏度未知或估计不足导致的重构失败。理论分析和实验表明,新算法在无需信号稀疏度先验的条件下,重构性能优于现有典型回溯迭代类算法。

关键词: 压缩感知; 盲稀疏度; 自适应重构; 平滑零范数

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2013)03-0410-07

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2013.03.017

Blind Sparsity Back-Track Reconstruction Algorithm Based on Smooth L_0 Norm Constraint

TIAN Wen-biao, RUI Guo-sheng

(Signal and Information Processing Provincial Key Laboratory in Shandong, Naval Aeronautical
and Astronautical University, Yantai 264001, China)

Abstract: The existing back-track iterative reconstruction algorithms for reconstructing the original signal fast and well always require the prior information of signal sparsity for accurate recovery. But sometimes it's hard to meet the requirement in practice. Aiming at this problem, a new blind sparsity back-track reconstruction algorithm based on smooth ℓ_0 -norm constraint is proposed and its convergence is demonstrated. The new algorithm does not need the sparse prior and the smooth ℓ_0 -norm issued to estimate the sparsity of signal and determine the support set in the truncation process. The new algorithm is effective as other back-track ones and is able to avoid recovery failure due to unknown or underestimated sparsity as well. The theoretical analysis and experiment simulation prove that the performance of the new algorithm is better than that of the existing back-track iterative reconstruction algorithms in the sparsity unknown conditions.

Key words: Compressed sensing; Blind sparsity; Adaptive reconstruction; Smooth ℓ_0 -norm

0 引 言

2004年, Candès 和 Donoho 等人提出一种信号采样的新方法——压缩感知(Compressed Sensing, CS)^[1-3]。该理论指出,只要信号在某个变换域稀疏或可压缩,那么就能够构造一个与变换基不相关的观测矩阵,对高维信号进行投影,映射到一个低维空间上。最终通过求解优化问题,原信号能够从那

些少量的投影中被高概率重构,可以证明低维投影包含了重构原信号的足够信息。该方法被广泛应用于CS雷达、SAR图像分割、无线传感器网络和遥感图像处理等方面^[4-7]。

在压缩感知重构算法中,贪婪算法由于结构简单,运算量小等特点受到重视。近来国外学者提出的回溯迭代类算法,如子空间追踪^[8](Subspace Pursuit, SP)和压缩采样匹配追踪^[9](Compressive

Sampling Matching Pursuit, CoSaMP), 均是通过批量选取原子, 再以信号的真实稀疏度 K 为约束批量剔除冗余原子的回溯手段, 高效准确重构信号。回溯迭代类算法的批量选取和筛选原子的思想使得算法收敛速度提高的同时也引入了新的问题, 即需要已知信号稀疏度作为原子剔除时的约束条件。然而, 实际条件下, 输入信号大多为可压缩信号, 稀疏度时变或难以预先知道, 若对稀疏度估计不足, 则以此估计值为约束时不可能精确重构信号, 若估计过量, 则算法鲁棒性和准确性都会下降。张宗念^[10]等提出在正交匹配追踪算法和子空间追踪算法之间通过设置步长来取折衷, 取得了良好的效果, 但是步长的选择又成为新的难题。杨成^[11]等提出了一种稀疏度估计欠量的判据, 依此逐次试探信号的稀疏度并准确有效重构信号。但这个判据是充分不必要的, 因此稀疏度估计值有偏小的趋势。Thong T. Do^[12]等提出在每次迭代中采用增加固定数目原子的方法估计信号稀疏度, 实现稀疏度自适应匹配追踪 (Signal Adaptive Matching Pursuit, SAMP)。当稀疏度较大时, SAMP 算法由于迭代次数多而导致运算量特别大。H. Huang 等人^[13]提出的 BAOMP 算法通过两次弱匹配过程分别扩充和剔除原子。用弱匹配的方法逐次逼近信号真实支撑集。

有文献指出, 可利用一个连续函数来估计信号的支撑集^[14-15], 即平滑 ℓ_0 范数 (Smooth ℓ_0 -norm, SLO)。它通过一个约束参数 σ 调节逼近程度, 当 $\sigma \rightarrow 0$ 时, SLO 趋于 ℓ_0 范数, 但与此同时其对干扰也趋于敏感。通过权衡抗干扰性和逼近程度, 在信号稀疏度未知的条件下可以利用 SLO 约束信号估计的稀疏度, 参数 σ 则为稀疏度约束引入了自适应特性。

本文延续回退迭代算法批量选取、筛选原子的思路, 提出了基于平滑 ℓ_0 范数稀疏度约束的盲稀疏回溯重构算法 (Blind Sparsity Back-track Reconstruction Algorithm, 以下简称 BSB 算法), 摒弃以信号的真实稀疏度 K 为约束, 引入平滑 ℓ_0 范数, 在原子筛选前估计重构信号稀疏度, 并依此获取对应的信号支撑集用于下一次的原子选取、支撑集扩充过程。

1 盲稀疏回溯重构算法

假设长度为 N 的信号 \mathbf{x} 是 K 项稀疏的, 即 \mathbf{x} 仅有

K 项 ($K \ll N$) 非零, 若用一个非自适应感知矩阵 $\Phi: M \times N$ ($M = cK \log_2(N/K) \ll N$) 对信号 \mathbf{x} 进行观测, 其中 c 为剩余常数 (Overmeasuring constant), 进而得到观测值向量 $\mathbf{y}: M \times 1, \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ 。利用 ℓ_0 范数意义下的优化求解 \mathbf{x} 的估计值 $\hat{\mathbf{x}}$, 即

$$\min \|\mathbf{x}\|_0 \quad s. t. \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (1)$$

但最小 ℓ_0 范数优化求解是一个非多项式复杂度问题, 即 NP 难问题, 且数值计算极不稳定。有文献指出, 求解一个更加简单的 ℓ_1 优化问题会得到同等的解^[16], 即

$$\min \|\mathbf{x}\|_1 \quad s. t. \quad \mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (2)$$

在讨论具体重构算法之前, 还需要讨论分析有限等距性质^[17] (Restricted Isometry Property, RIP), 它是重建信号的重要基础, 其定义为: 若对所有满足 $\|\mathbf{x}\|_0 \leq K$ 的 \mathbf{x} , 矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 都满足式(3)

$$(1 - \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \|\Phi \mathbf{x}\|_2^2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2^2 \quad (3)$$

其中 $K \leq M, 0 < \delta_K < 1$, 则称 Φ 满足参数为 (K, δ_K) 的 RIP 性质。 δ_K 具有单调性, 对任意两个整数 $K \leq K'$, 则有 $\delta_K \leq \delta_{K'}$ 。

引理 1^[9]. (列近似正交性质) 设矩阵 $\Phi \in \mathbf{R}^{M \times N}$ 满足参数为 (K, δ_K) 的 RIP 性质, 索引集 T 的势为 K , 对于任意的 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$

$$\|\Phi_T^T \Phi_T \mathbf{x}\|_2 \leq (1 + \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2 \quad (4)$$

$$\|\Phi_T^T \Phi_T \mathbf{x}\|_2 \geq (1 - \delta_K) \|\mathbf{x}\|_2 \quad (5)$$

$$\|(\Phi_T^T \Phi_T)^{-1} \mathbf{x}\|_2 \leq \frac{1}{1 - \delta_K} \|\mathbf{x}\|_2 \quad (6)$$

$$\|(\Phi_T^T \Phi_T)^{-1} \mathbf{x}\|_2 \geq \frac{1}{1 + \delta_K} \|\mathbf{x}\|_2 \quad (7)$$

成立, 其中 Φ_T 代表以 T 为索引的 Φ 中的列构成的 Φ 的子集。

设 P 和 Q 均为势不大于 K 的索引集, 且 $P \cap Q = \emptyset, |P| + |Q| \leq K$ 则

$$\|\Phi_P^T \Phi_Q\|_{\text{spec}} \leq \delta_{|P|+|Q|} \leq \delta_K \quad (8)$$

其中 $\|\cdot\|_{\text{spec}}$ 表示矩阵谱范数, $|\cdot|$ 表示集合的势。该结论隐含着若 Φ 满足 RIP 性质, 则从中按一定条件抽取出来的列是近似正交的。

不同的算法对观测数目的要求不尽相同, 李小波^[18]在其工作中指出: 在特定的 OMP 重建算法和随机高斯测量矩阵条件下, 稀疏度 K 与测量值 M 关系满足 $M \approx 2K \ln(N)$ 。SP 算法假设感知矩阵对于稀疏

度直至 $3K$ 的信号均满足的 RIP 性质^[8], 实际这蕴含了对观测数目的要求, 因为依据 RIP 的定义, 观测数目 M 不应小于信号稀疏度的最大值 $3K$ 。CoSaMP 算法中也有类似的隐含要求(算法证明过程^[9]中出现了 $4K$ 项稀疏)。本文在讨论算法收敛性时假设 $M \geq 3K$ 。

1.1 算法描述

本文基于平滑 ℓ_0 范数稀疏度约束提出盲稀疏回溯重构算法, 步骤如下:

输入: 观测值向量 $\mathbf{y}_{M \times 1}$, 感知矩阵 $\Phi_{M \times N}$

输出: 重构信号 $\hat{\mathbf{x}}_{N \times 1}$

(1) (初始化) $\hat{\mathbf{x}}^0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{y}$, $l = 0$, $T^0 = \emptyset$;

(2) (计算相关系数) $\mathbf{v} = \Phi^T \mathbf{r}_l$, $l = l + 1$;

(3) (原子扩充) $\Omega = \{\text{前} \lceil M/3 \rceil \text{个最大 } |v_i| \text{ 的索引}\}$, 其中 v_i , $i \in [1, N]$ 代表 \mathbf{v} 中第 i 个元素, $\lceil \cdot \rceil$ 代表向上取整运算, $\tilde{T}^l = \Omega \cup T^{l-1}$;

(4) (原子剔除) 最小二乘信号估计 $\mathbf{x}_p = \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger \mathbf{y}$, $T^l = \{\|\mathbf{x}_p\|_{\text{SLO}}$ 对应的支撑集};

(5) (更新) 残差 $\mathbf{r}_l = \text{resid}(\mathbf{y}, \Phi_{T^l}) \triangleq \mathbf{y} - \Phi_{T^l} \Phi_{T^l}^\dagger \mathbf{y}$, 若 $\|\mathbf{r}_l\|_2 > \|\mathbf{r}_{l-1}\|_2$, 令 $T^l = T^{l-1}$, 输出 $\hat{\mathbf{x}} = \Phi_{T^l}^\dagger \mathbf{y}$, 否则返回(2)进行下一步迭代。

第(3)-(4)步是盲稀疏回溯重构算法的主体, 进行第(3)步的原子扩充时, 找出相关系数中最大的 $\lceil M/3 \rceil$ 项对应的指标构成指标集 Ω 。每次迭代指标集 Ω 都与上次迭代信号支撑集 T^{l-1} 作并集, 得到扩充的支撑集 \tilde{T}^l 。进行第(4)步的原子剔除时, 首先利用扩充的支撑集 \tilde{T}^l 对信号进行试探性重构, 可得 \mathbf{x}_p , 其中 $\Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger$ 代表 $\Phi_{\tilde{T}^l}$ 的伪逆 $(\Phi_{\tilde{T}^l}^T \Phi_{\tilde{T}^l})^{-1} \Phi_{\tilde{T}^l}^T$ 。对 \mathbf{x}_p 求平滑 ℓ_0 范数, 并得到其对应的支持集 T^l , 令 $S^l = |T^l|$, 其余原子则被剔除了。一旦本次迭代残差能量 $\|\mathbf{r}_l\|_2$ 大于上一次迭代的对应值, 则停止迭代。下面具体分析算法的主体部分。

1.2 SLO 稀疏度约束

平滑 ℓ_0 范数^[14] 的基本思想是构造一个平滑函数近似 ℓ_0 范数, 一种可用的函数形式为

$$f_\sigma(s) = \exp(-s^2/2\sigma^2) \quad (9)$$

注意到该函数满足

$$f_\sigma(s) \approx \begin{cases} 1, & |s| \leq \sigma \\ 0, & |s| \geq \sigma \end{cases} \quad (10)$$

则通过控制 σ 可以决定平滑 ℓ_0 范数的逼近 ℓ_0 范数的程度。

定义 1. 泛函 $\pi_i: \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}$, 将 $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 映射到其第 i 个元素上, 即 $\pi_i(\mathbf{x}) = x_i$ 。对于指标集 $I = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$, 有 $\pi_I(\mathbf{x}) = [x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_r}]$ 。

定义 2. 泛函 $F_\sigma: \mathbf{R}^N \mapsto \mathbf{R}$, 对于 $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$ 有

$$F_\sigma(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_{\text{SLO}} = N - \sum_{i=1}^N f_\sigma(x_i)$$

$\|\mathbf{x}\|_{\text{SLO}}$ 为 \mathbf{x} 的 SLO 范数。本文利用 SLO 约束 \mathbf{x}_p 的稀疏度, 下面对其合理性进行一个说明。设信号真实支撑集为 T , 则 $\mathbf{y} = \Phi_T \mathbf{x}_T$, $|T| = K$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p &= \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger \mathbf{y} = \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger \Phi_T \mathbf{x}_T \\ &= \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger \Phi_{T \cap \tilde{T}^l} \mathbf{x}_{T \cap \tilde{T}^l} + \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger \Phi_{T - \tilde{T}^l} \mathbf{x}_{T - \tilde{T}^l} \\ &= \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger [\Phi_{T \cap \tilde{T}^l} \Phi_{T - \tilde{T}^l}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{T \cap \tilde{T}^l} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger \Phi_{\tilde{T}^l} \mathbf{x}_{\tilde{T}^l} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \mathbf{x}_{\tilde{T}^l} + \boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (11)$$

令 $\boldsymbol{\varepsilon} = \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger \Phi_{T - \tilde{T}^l} \mathbf{x}_{T - \tilde{T}^l}$, \mathbf{x}_p 为 $\mathbf{x}_{\tilde{T}^l}$ 的估计, 误差为 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 。因为 \tilde{T}^l 和 $T - \tilde{T}^l$ 不相交, 故由引理 1,

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2 \leq \frac{\delta_{|\tilde{T}^l|+|T-\tilde{T}^l|}}{1 - \delta_{|\tilde{T}^l|}} \|\mathbf{x}_{T-\tilde{T}^l}\|_2 \leq \frac{\delta_{\lceil M/3 \rceil + S^l - 1 + K}}{1 - \delta_{\lceil M/3 \rceil + S^l - 1}} \|\mathbf{x}_{T-\tilde{T}^l}\|_2 \quad (12)$$

矩阵 Φ 的列正交性越好, 则 $\delta_{M/3+S^l-1+K}$ 的值也越趋近于 0, 且其值总不大于 δ_M , 这是因为 $K \leq M/3$, 据此可通过调整 σ 限制 S , 使之也不大于 $M/3$ 。且若扩充的支持集 \tilde{T}^l 包含了信号真实支撑集 T , 则式(11)中结果的第二项 $\boldsymbol{\varepsilon} = \Phi_{\tilde{T}^l}^\dagger \Phi_{T-\tilde{T}^l} \mathbf{x}_{T-\tilde{T}^l} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_{\tilde{T}^l}$ 。

$\|\mathbf{x}_p\|_{\text{SLO}}$ 对应的支撑集定义为

$$\text{supp}_{\text{SLO}}(\mathbf{x}_p) = \{i \mid |f_\sigma[\pi_i(\mathbf{x}_p)]| < a\} \quad (13)$$

其中 $a = \exp\left(-\frac{\delta_M^2 \|\mathbf{x}_p\|_\infty^2 \cdot \sigma^{-2}}{2(1 - \delta_M)^2}\right)$ 。根据 SLO 的性质, 式(13)还等效为

$$\text{supp}_{\text{SLO}}(\mathbf{x}_p) = \{i \mid |\pi_i(\mathbf{x}_p)| > \sigma \sqrt{2 \ln a}\} \quad (14)$$

考虑到 δ_M 值较小, 综合式(11)、式(12), 因此, \mathbf{x}_p 的 SLO 支撑集可视作由 \tilde{T}^l 捕获的信号 $\mathbf{x}_{\tilde{T}^l} = \mathbf{x}_{T \cap \tilde{T}^l}$ 构成, 即将 $\text{supp}_{\text{SLO}}(\mathbf{x}_p)$ 视作 $\tilde{T}^l \cap T$ 的估计。正是基于这个特性, 可利用 SLO 约束信号估计的稀疏度。

在实际应用时, 要解决两个问题: σ 的选取和 δ_M 的估计。其中参数 σ 是 SLO 进行稀疏度约束的逼近参数, σ 越大则稀疏度约束能力越弱, σ 越小则对干扰项 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 越敏感, 这里 σ 取值应该由输入信号来决定。通过控制 σ 使得估计支撑集的势

$|\text{supp}_{\text{SLO}}(\mathbf{x}_p)| = |T^l|$ 总不小于信号估计中有效部分 $\mathbf{x}_{\tilde{T}^l}$ 的支撑集 $|\tilde{T}^l \cap T|$ 。怎样选取最佳的 σ 值是下一步要研究的问题。另外,参数 δ_M 无法直接计算得到,确定该参数是一个 NP 难题。本文中逆向利用了杨成^[11] 等人稀疏度试探的结论(即已知 δ_M 可以试探出信号稀疏度),用一组稀疏度已知的信号来逆向试探感知矩阵的 RIP 参数 δ_M 。下面针对算法的收敛性进行讨论。

1.3 算法收敛性

首先通过一个定理将算法收敛性给出。

定理 1. 令信号 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N$, 真实稀疏度 $K \leq M/3$, 其观测值为 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \in \mathbf{R}^M$, 若 Φ 满足参数为 (M, δ_M) 的 RIP 性质, 且 $\delta_M < 0.206$, 则 BSB 算法能够保证由 \mathbf{y} 经有限次迭代重构 \mathbf{x} , 即算法是收敛的。

证. 可由文献[8]定理3、定理4推广。要证明算法收敛,就是要证明每次迭代后,未被捕获信号能量逐次减少,即 $\|\mathbf{x}_{T^l}\|_2 \leq C \cdot \|\mathbf{x}_{T^{l-1}}\|_2, 0 < C < 1$ 。

(1) 先证 $\|\mathbf{x}_{T^l}\|_2 \leq c_1 \|\mathbf{x}_{\tilde{T}^l}\|_2$

考虑任意索引集满足 $T' \subset \tilde{T}^l$, 势为 $|\tilde{T}^l - T^l|$ 且与 T 不相交。必然存在这样的索引集, 是因为 $|T^l| \geq |\tilde{T}^l \cap T| \Rightarrow |\tilde{T}^l - T^l| \geq |\tilde{T}^l - T^l|$, 又因为 $\pi_{T'}(\mathbf{x}_p) = \pi_{T'}(\mathbf{x}_{\tilde{T}^l}) + \pi_{T'}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0} + \pi_{T'}(\boldsymbol{\varepsilon})$, 可得 $\|\pi_{T'}(\mathbf{x}_p)\|_2 \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2$ 。定义迭代中被剔除投影系数的索引集为 $\Delta T = \tilde{T}^l - T^l$, 则 $\|\pi_{\Delta T}(\mathbf{x}_p)\|_2 \leq \|\pi_{T'}(\mathbf{x}_p)\|_2 \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2$ 由式(11)有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{\Delta T}\|_2 &\leq \|\pi_{\Delta T}(\mathbf{x}_p)\|_2 + \|\pi_{\Delta T}(\boldsymbol{\varepsilon})\|_2 \\ &\leq \|\pi_{\Delta T}(\mathbf{x}_p)\|_2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2 \end{aligned} \quad (15)$$

因为 $\mathbf{x}_{\Delta T} = \mathbf{x}_{T \cap \Delta T}$ (\mathbf{x} 以 T 为支撑 $\mathbf{x}_{T^c} = \mathbf{0}$), 所以

$$\|\mathbf{x}_{T \cap \Delta T}\|_2 \leq 2\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2 \quad (16)$$

结合式(12)和式(16), 因为 $\mathbf{x}_{T^l} = [\mathbf{x}_{T \cap \Delta T}^T, \mathbf{x}_{\tilde{T}^l}^T]^T$ 可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{T^l}\|_2 &\leq \|\mathbf{x}_{T \cap \Delta T}\|_2 + \|\mathbf{x}_{\tilde{T}^l}\|_2 \\ &\leq 2\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2 + \|\mathbf{x}_{\tilde{T}^l}\|_2 \\ &\leq \left(\frac{2\delta_{\lceil M/3 \rceil + S^{l-1} + K}}{1 - \delta_{\lceil M/3 \rceil + S^{l-1}}} + 1 \right) \|\mathbf{x}_{\tilde{T}^l}\|_2 \\ &\leq \frac{1 + \delta_{\lceil M/3 \rceil + S^{l-1} + K}}{1 - \delta_{\lceil M/3 \rceil + S^{l-1} + K}} \|\mathbf{x}_{\tilde{T}^l}\|_2 \\ &\leq \frac{1 + \delta_M}{1 - \delta_M} \|\mathbf{x}_{\tilde{T}^l}\|_2 \end{aligned} \quad (17)$$

(2) 再证 $\|\mathbf{x}_{T^l}\|_2 \leq c_1 \|\mathbf{x}_{T^{l-1}}\|_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{l-1} &= \text{resid}(\mathbf{y}, \Phi_{T^{l-1}}) \\ &= \text{resid}(\Phi_{T^l - T^{l-1}} \mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}}, \Phi_{T^{l-1}}) + \\ &\quad \text{resid}(\Phi_{T \cap T^{l-1}} \mathbf{x}_{T \cap T^{l-1}}, \Phi_{T^{l-1}}) \\ &= \text{resid}(\Phi_{T^l - T^{l-1}} \mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}}, \Phi_{T^{l-1}}) + 0 \\ &= \Phi_{T^l - T^{l-1}} \mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}} - \Phi_{T^{l-1}} \Phi_{T^l - T^{l-1}}^\dagger \Phi_{T^l - T^{l-1}} \mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}} \\ &= [\Phi_{T^l - T^{l-1}} \quad \Phi_{T^{l-1}}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}} \\ \mathbf{x}_{p, T^{l-1}} \end{bmatrix} \\ &= \Phi_{T \cup T^{l-1}} \mathbf{x}_r^{l-1} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $*$ = $\Phi_{T \cap T^{l-1}} \mathbf{x}_{T \cap T^{l-1}} \in \text{span}(\Phi_{T^{l-1}})$, $\mathbf{x}_{p, T^{l-1}} \triangleq -(\Phi_{T^{l-1}}^\dagger \Phi_{T^{l-1}})^{-1} \Phi_{T^{l-1}}^\dagger \Phi_{T^l - T^{l-1}} \mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}} \in \mathbf{R}^{|\tilde{T}^{l-1}|}$, $\mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}}$ 是未被 T^{l-1} 捕获的部分信号, \mathbf{x}_r^{l-1} 为残差 \mathbf{r}_{l-1} 对应的系数, 由 RIP 性质

$$\|\mathbf{x}_{p, T^{l-1}}\|_2 \leq \frac{\delta_{S^{l-1} + K}}{1 - \delta_{S^{l-1}}} \|\mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}}\|_2 \quad (19)$$

第 l 次迭代被原子扩充过程捕获的索引为 T_Δ : $= \tilde{T}^l - T^{l-1}$, $|T_\Delta| = \lceil M/3 \rceil \geq |T|$, 且由 T_Δ 的意义(前 $\lceil M/3 \rceil$ 个最大相关系数的索引)

$$\|\Phi_{T_\Delta}^T \mathbf{r}_{l-1}\|_2 \geq \|\Phi_{T^l}^T \mathbf{r}_{l-1}\|_2 \geq \|\Phi_{T^l - T^{l-1}}^T \mathbf{r}_{l-1}\|_2$$

去掉 T_Δ 与 $T - T^{l-1}$ 相交的部分, 不等式仍然成立

$$\|\Phi_{T_\Delta - T}^T \mathbf{r}_{l-1}\|_2 \geq \|\Phi_{T^l - T^{l-1} - T_\Delta}^T \mathbf{r}_{l-1}\|_2 = \|\Phi_{\tilde{T}^l - T^{l-1}}^T \mathbf{r}_{l-1}\|_2 \quad (20)$$

式(20)左侧:

$$\begin{aligned} \|\Phi_{T_\Delta - T}^T \mathbf{r}_{l-1}\|_2 &= \|\Phi_{T_\Delta - T}^T \Phi_{T \cup T^{l-1}} \mathbf{x}_r^{l-1}\|_2 \\ &\leq \delta_{\lceil M/3 \rceil + K + S^{l-1}} \cdot \|\mathbf{x}_r^{l-1}\|_2 \end{aligned} \quad (21)$$

式(20)右侧:

$$\begin{aligned} \|\Phi_{\tilde{T}^l - T^{l-1}}^T \mathbf{r}_{l-1}\|_2 &\geq \|\Phi_{\tilde{T}^l - T^{l-1}}^T \Phi_{\tilde{T}^l - T^{l-1}} \pi_{\tilde{T}^l - T^{l-1}}(\mathbf{x}_r^{l-1})\|_2 - \\ &\quad \|\Phi_{\tilde{T}^l - T^{l-1}}^T \Phi_{(T \cup T^{l-1}) - (T - \tilde{T}^l)} \pi_{(T \cup T^{l-1}) - (T - \tilde{T}^l)}(\mathbf{x}_r^{l-1})\|_2 \\ &\geq (1 - \delta_K) \|\pi_{\tilde{T}^l - T^{l-1}}(\mathbf{x}_r^{l-1})\|_2 - \\ &\quad \delta_{\lceil M/3 \rceil + S^{l-1} + K} \|\mathbf{x}_r^{l-1}\|_2 \end{aligned} \quad (22)$$

将不等式(21)、不等式(22)代入不等式(20)可得

$$\begin{aligned} \|\pi_{\tilde{T}^l - T^{l-1}}(\mathbf{x}_r^{l-1})\|_2 &\leq \frac{2\delta_{\lceil M/3 \rceil + S^{l-1} + K}}{1 - \delta_K} \|\mathbf{x}_r^{l-1}\|_2 \\ &\leq \frac{2\delta_M}{1 - \delta_M} \|\mathbf{x}_r^{l-1}\|_2 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_r^{l-1}\|_2 &\leq \|\mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}}\|_2 + \|\mathbf{x}_{p, T^{l-1}}\|_2 \\ &\leq \left(1 + \frac{\delta_{S^{l-1} + K}}{1 - \delta_{S^{l-1}}} \right) \|\mathbf{x}_{T^l - T^{l-1}}\|_2 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{1 - \delta_M} \|\mathbf{x}_{T-T^{l-1}}\|_2 \quad (24)$$

结合式(23)、式(24), 又因 $\pi_{T-T^{l-1}}(\mathbf{x}_r^{l-1}) = \mathbf{x}_{T-T^{l-1}}$ 且 $T - \tilde{T}^l \subset T - T^{l-1}$, 所以 $\pi_{T-\tilde{T}^l}(\mathbf{x}_r^{l-1}) = \mathbf{x}_{T-\tilde{T}^l}$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{T-\tilde{T}^l}\|_2 &= \|\pi_{T-\tilde{T}^l}(\mathbf{x}_r^{l-1})\|_2 \\ &\leq \frac{2\delta_M}{(1 - \delta_M)^2} \|\mathbf{x}_{T-T^{l-1}}\|_2 \end{aligned} \quad (25)$$

综合式(17)、式(25)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_{T-T^l}\|_2 &\leq \frac{2\delta_M(1 + \delta_M)}{(1 - \delta_M)^3} \|\mathbf{x}_{T-T^{l-1}}\|_2 \\ &= C(\delta_M) \cdot \|\mathbf{x}_{T-T^{l-1}}\|_2 \end{aligned} \quad (26)$$

$C(\delta_M)$ 在区间 $[0, 1]$ 内随 δ_M 增加单调增加, $\delta_M < 0.206$ 时, $C(\delta_M) < 1$, 即算法收敛, 证毕。

特别需要说明的是, 定理是充分不必要的, 证明过程中假设真实稀疏度 $K \leq M/3$, 进而将原子空间算法的收敛定理推广得到 $\delta_{3K} \leq \delta_M < 0.206$ 时 BSB 算法收敛。但算法的收敛性不限于稀疏度 $K \leq M/3$ 的情况, 如实验 2 所示, 算法真实性能超出了稀疏度假设的限制, 当 $K/N = 0.4 (M/K \approx 2.2)$ 时, BSB 重构概率仍然逼近 100%。

2 仿 真

选取长度为 $N = 512$ 的一维稀疏测试信号, 稀疏度 $K = 10$, 压缩比 M/N 从 0.02 至 0.5 变化。考察典型算法如 OMP、BAOMP、SAMP、CoSaMP (SP 算法与之类似故省略) 与 BSB 算法的性能。BSB 算法中, SLO 参数 σ 取 0.01, 感知矩阵 RIP 参数 δ_M 取估计值 0.2, SAMP 中步长设为 3, BAOMP 中两个弱匹配参数分别选取文献 [13] 中给出的最佳值 0.4 和 0.6。认为重构信噪比 R-SNR 大于 40dB 即成功重构, 其中

$$R - \text{SNR} = 10 \lg \frac{\|\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|_2} \quad (27)$$

迭代 2000 次统计的成功重构概率随压缩比 M/N 变化曲线对比如图 1, 在相同信号条件下, 与同类算法相比 BSB 重构要求的观测数目最少, 明显优于 SAMP 和 BAOMP。另外, BSB 和 CoSaMP 算法都采取了回溯筛选原子策略, 从图 1 中看出, 当信号稀疏度较小时, 这两种算法精确重构信号所要求的观测数量基本一致, 同逐个扩充原子的 OMP 算法相当。但这

其中, 只有 BSB 算法既兼顾原子扩充的效率 (每次扩充 $\lceil M/3 \rceil$ 个) 又可以做到盲稀疏度精确重构, 且所需的观测数目最少。实验验证了 BSB 算法的收敛性以及较少观测值应用条件下的有效性。

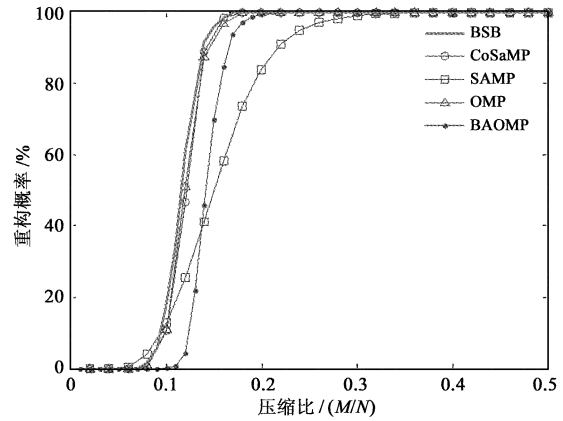


图 1 不同算法重构概率随压缩比变化情况

Fig. 1 Simulation of the reconstruction probability vs. M/N

图 2 中表示的是迭代 2000 次统计的多种算法成功重构信号概率随压缩比 K/N 变化的曲线。选取长度为 $N = 512$ 的一维稀疏测试信号, 变化信号稀疏度, 令稀疏比 K/N 从 0.02 至 0.5 变化, 观测值满足 $M = \lceil 1.67 \cdot K \log_2(N/K) \rceil$ 随稀疏度 K 变化 (即剩余常数 c 取 1.67)。其它参数设置与重构概率随压缩比变化实验相同。从图中可看出, BSB 算法重构性能最好, 稀疏比直至 0.4 仍能依高概率重构, 优于比较中的其它算法。这是因为 BSB 算法先大批量扩充原子, 即使信号稀疏度较大, 原子扩充过程也能够包含所有有效的原子 (真实支撑集中的原子)。而接着采取 SLO 范数约束重构信号的稀疏度的冗余原子剔除策略, 比较准确地估计出重构信号的支撑集, 从而从中筛选出几乎所有有效的原子, 进而精确重构原信号。实验表明了 BSB 算法的收敛性以及较大稀疏比应用条件下的有效性。

如第 1 节中所述不同的算法对观测数目的要求不尽相同。信号稀疏度 $K = 10 (K/N \approx 0.02)$, 实验 1) 时, BSB、CoSaMP 和 OMP 算法重构概率相近。而当信号稀疏度从 0.02 增加至 0.5, M 随信号稀疏度依规律 $\lceil 1.67 \cdot K \log_2(N/K) \rceil$ 变化, 几种算法的重构概率区分度明显。这是因为, 对于某个固定的稀疏度 K , 剩余常数 c 取 1.67 时的观测数足以使 BSB 算法表现出实验 2 中较好的重构性能, 相较之下, 这样的

观测数目却不足以使其它算法在较高稀疏比下,特别是 $K/N > 0.3$ 时高概率重构信号。目前,国内外对剩余常数 c 最佳取值的研究还较少,这里也只是给出了BSB算法剩余常数 c 取值的一种实验结论。其最佳取值可作为下一步研究的重要内容之一。

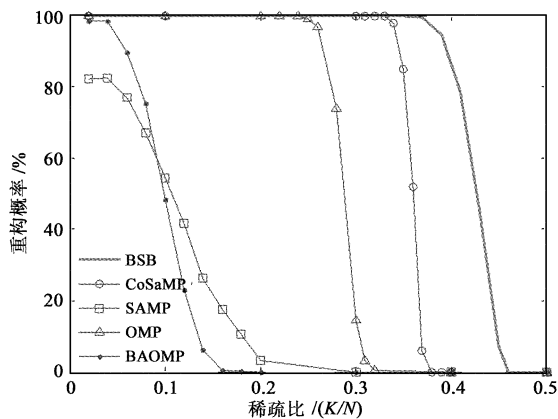


图2 不同算法重构概率随稀疏比变化情况

Fig.2 Simulation of the reconstruction probability vs. K/N

3 结论

在压缩感知理论框架下,针对目前现有重构速度快、精度高的回溯迭代类贪婪算法均需要已知原信号稀疏度的缺陷。提出了一种基于平滑 ℓ_0 范数稀疏度约束的盲稀疏回溯迭代算法,首先依据信号观测值的维度,最大化扩充原子的数目,再通过引入SLO范数,估计重构信号的真实支撑集,基于此筛选出有效的原子,进而精确重构原信号。理论证明了算法的收敛性。仿真结果表明,与同类算法相比,在较少观测值以及较大稀疏比应用条件下,BSB算法有一定的优势。下一步可致力于剩余常数 c 以及SLO范数中参数 σ 最佳取值的研究。

参 考 文 献

[1] Baraniuk R G. Compressive sensing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2007, 24(4): 118 - 121.
 [2] Donoho D L. Compressed sensing[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2006, 52(4): 1289 - 1306.
 [3] 石光明,刘丹华,高大化,等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5): 1070 - 1081. [Shi Guang-ming, Liu Dan-hua, Gao Da-hua, et al. Advances in theory and application of compressed sensing[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(5): 1070 - 1081.]
 [4] 杨萌,张弓. 基于CS的SAR图像自动目标分割算法[J]. 宇

航学报. 2011, 32(12): 2575 - 2581. [Yang Meng, Zhang Gong. Automatic target segmentation in SAR images using CS[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(12): 2575 - 2581.]
 [5] 韦顺军,张晓玲. 基于压缩传感的线阵SAR三维成像方法研究[J]. 宇航学报, 2011, 32(11): 2403 - 2409. [Wei Shun-jun, Zhang Xiao-ling. Linear array SAR 3-D imaging based on compressed sensing[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(11): 2403 - 2409.]
 [6] 贺亚鹏,李洪涛,王克让,等. 基于压缩感知的高分辨率DOA估计[J]. 宇航学报, 2011, 32(6): 1344 - 1349. [He Ya-peng, Li Hong-tao, Wang Ke-ang, et al. Compressive sensing based high resolution DOA estimation[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(6): 1344 - 1349.]
 [7] 何劲,张群,杨小优,等. 基于压缩感知理论的合成孔径激光雷达成像算法[J]. 宇航学报, 2011, 32(11): 2395 - 2402. [He Jin, Zhang Qun, Yang Xiao-you, et al. SAL imaging algorithm based on compressed sensing theory[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(11): 2395 - 2402.]
 [8] Dai W, Milenkovic O. Subspace pursuit for compressive sensing signal reconstruction[J]. IEEE Trans. on Information Theory, 2009, 55(5): 2230 - 2249.
 [9] Needell D, Tropp J A. CoSaMP: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples[J]. Communications of the ACM, 2010, 53(12): 93 - 100.
 [10] 张宗念,黄仁泰,闫敬文. 压缩感知信号盲稀疏度重构算法[J]. 电子学报, 2011, 39(1): 18 - 22. [Zhang Zong-nian, Huang Ren-tai, Yan Jing-wen. A blind sparsity reconstruction algorithm for compressed sensing signal[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(1): 18 - 22.]
 [11] 杨成,冯巍,冯辉,等. 一种压缩采样中的稀疏度自适应子空间追踪算法[J]. 电子学报, 2010, 38(8): 1914 - 1917. [Yang Cheng, Feng Wei, Feng Hui, et al. A sparsity adaptive subspace pursuit algorithm for compressive sampling[J]. Acta Electronica Sinica, 2010, 38(8): 1914 - 1917.]
 [12] Do T T, Gan L, Nguyen N S. Sparsity adaptive matching pursuit algorithm for practical compressed sensing[C]. Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, Pacific Grove, California, 2008.
 [13] Huang H, Makur A. Backtracking-based matching pursuit method for sparse signal reconstruction[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(7): 391 - 394.
 [14] Mohimani H, Babaie-Zadeh M, Jutten C. A fast approach for overcomplete sparse decomposition based on smoothed ℓ_0 norm[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(1): 289 - 301.
 [15] Mohimani G, Babaie-Zadeh M, Jutten C. Fast sparse representation based on smoothed ℓ_0 norm[J]. Independent Component Analysis and Signal Separation, 2007: 389 - 396.

- [16] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A. Atomic decomposition by basis pursuit[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 1998, 20(1): 33-61.
- [17] Candès E J. The restricted isometry property and its implications for compressed sensing[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 2008, Series I(346): 589-592.
- [18] 李小波. 基于压缩感知的测量矩阵研究[D]. 北京: 北京交通大学, 2010. [Li Xiao-bo. Research on measurement matrix based on compressed sensing [D]. Beijing: Beijing Jiaotong

University, 2010.]

作者简介:

田文颢(1987-),男,博士研究生,主要研究压缩感知理论及直接信息采样技术。

通信地址:山东烟台二马路 188 号 海军航空工程学院 研究生三队(264001)

电话:13863848375

E-mail:twbi5si@gmail.com

(编辑:余 未)