

限制性四体问题中的时间相关不变流形

祁 瑞, 徐世杰

(北京航空航天大学宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 借助有限时间 Lyapunov 指数 (FTLE) 定义了拉格朗日拟序结构 (LCS), 并将 LCS 作为不变流形的替代物。针对日-地-月双圆模型 (BCM), 利用 LCS 研究了限制性四体问题 (R4BP) 中的时间相关不变流形 (TDIM) 的性质。采用数值方法验证了 TDIM 是运动分界面和轨道不变集。继而, 利用二分法对给定 Poincare 截面上的 LCS 进行了精确提取, 通过一系列等能量面上的 LCS 描绘出 TDIM 在给定截面上的构形。最后, 借助 TDIM, 初步研究了低能奔月轨道在非自治系统 BCM 中的直接构建。

关键词: 限制性四体问题; 时间相关不变流形; 拉格朗日拟序结构; 低能奔月轨道; 庞加莱截面

中图分类号: V412.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-1328(2013)08-1055-08

DOI: 10.3873/j.issn.1000-1328.2013.08.004

Time-Dependent Invariant Manifolds in the Restricted Four-Body Problem

QI Rui, XU Shi-jie

(School of Astronautics, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: The lagrangian coherent structure (LCS) is defined as ridges of finite-time Lyapunov exponent (FTLE) fields, and it is demonstrated that an understanding of time-dependent invariant manifold (TDIM) can be obtained by use of LCS. Taking Sun-Earth-Moon bicircular model (BCM) as an example and LCS as a tool, the property of the TDIM of restricted 4-body problem (R4BP) is demonstrated numerically that TDIM is invariant set of orbits and acts as separatrix. Dichotomy is then used to extract the LCS on the Poincare section, and the configuration of TDIM on specified section is illustrated by a series of LCS with regularly spaced energy. Finally, low energy transfer from the Earth to the Moon is constructed in BCM directly.

Key words: R4BP; Time-dependent invariant manifold; LCS; Low energy transfer; Poincare section

0 引 言

相比限制性二体模型, 限制性三体模型因其对自然引力场更为精确的模拟, 在深空探测轨道设计方面表现出巨大的应用优势。特别是平面圆型限制性三体问题 (Planar Circular Restricted 3-Body Problem, PCR3BP) 共线平动点附近周期轨道的不变流形, 以其渐近性质和运动分界特点被广泛用于小推力转移、低能奔月以及编队飞行等相关任务研究, 并取得了一系列有价值的理论与工程实践结果^[1-5]。然而, 这些研究只适用于 PCR3BP 等自治

系统, 对于限制性四体问题 (Restricted 4-Body Problem, R4BP), 由于不存在合适的参考系使系统摆脱对时间的显性依赖, 相关研究难以推广。

在自治系统中, 流形生长法是用于计算不变流形的经典算法^[6]。对于非自治系统中依赖于时间的不变流形, 由瞬时不变集出发进行流形生长是很自然的推广。然而, Shadden 等人^[7]对双漩涡流场的研究表明, 该时间周期系统的不变流形并不与瞬时不动点相连接。这说明, 流形生长法在非自治系统中并不适用。

在流体力学领域, 学者们采用拉格朗日拟序结

构(Lagrangian Coherent Structures, LCS)作为时变流场中的不变流形来研究动力系统的相空间。近年来, LCS 相关理论被推广应用到航天器轨道动力学领域。Gawlik 等人利用 LCS 分析了椭圆型限制性三体问题的相空间,并借此解释了欧空局-日本联合水星探测任务 Bepicolombo 探测器轨道设计的思路^[8]。最近,普渡大学的 Short 和 Howell 在多个模型下计算了 LCS,并将其应用于从 LEO 到地-月系 L_1 点附近区域的转移轨道设计^[9]。

到目前为止,国外关于 LCS 在航天器轨道设计领域的应用研究还处于起步阶段,尚未应用于非自治的四体模型和低能奔月转移轨道设计,而国内在这方面的研究尚未起步。本文以日-地-月双圆模型(Bicircular Model, BCM)为研究框架,利用 LCS 研究了该模型中依赖于时间的不变流形的性质和构型,并以此为基础在 BCM 中对低能奔月轨道进行了直接构建。

1 基础理论

1.1 限制性四体问题的双圆模型

假设地球和月球围绕其公共质心作匀速圆周运动,同时该公共质心绕太阳匀速转动。忽略黄白交角,且假定航天器只在黄道平面内运动。

建立地月质心旋转系:原点位于地球和月球质心; x 轴由地球指向月球; y 轴由 x 轴在黄道平面内逆时针旋转 90° 确定。在此参考系中,太阳围绕原点沿顺时针方向匀速旋转。

引入无因次量纲:长度单位 DU 为地月间距;质量单位 MU 为地月质量之和;时间单位 TU 为地月绕其公共质心的旋转周期与 2π 的比。

注 1. 本文中出现的变量,未经特殊声明,均为无因次量纲。

在上述坐标系和无因次量纲下,容易得到航天器运动微分方程^[10]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \end{cases} \quad (1)$$

其中:

$$\bar{U} = -\frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{1 - \mu}{r_E} - \frac{\mu}{r_M} - \frac{m_S}{r_S} +$$

$$\alpha_S x_S x + \alpha_S y_S y - \frac{1}{2} \mu (1 - \mu) \quad (2)$$

为有效势函数; μ 为月球质量; r_E 、 r_M 和 r_S 分别为航天器到地球、月球和太阳的距离; m_S 为太阳质量; α_S 、 x_S 和 y_S 是与太阳所处位置有关的量,相关算式如下:

$$\begin{cases} \alpha_S = m_S a_S^{-3} \\ x_S = a_S \cos \theta_S \\ y_S = a_S \sin \theta_S \end{cases} \quad (3)$$

其中, a_S 为太阳到原点的距离; θ_S 为太阳在参考坐标系中的相位角。

1.2 Hill 区域

与 PCR3BP 不同的是, R4BP 不存在能量积分,但是容易证明,系统(1)的 Hamilton 函数为

$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \theta_S) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \bar{U}(x, y, \theta_S) \quad (4)$$

我们称其为系统的“能量”。

由于存在太阳的周期摄动,有效势函数 $\bar{U}(x, y, \theta_S)$ 在地-月系统附近的区域作小幅周期变化。且沿航天器的轨道, H 并不保持为常量。因而 Hill 区域并不是定常的,而是随 θ_S 和 H 的改变而发生变化。时变 Hill 区域的详细理论与数值仿真研究可参考国内学者的专著^[11]。为了直观地界定平动点区域,从而区分出穿越轨道与非穿越轨道,我们采用航天器在某一状态时的瞬时 Hill 区域。这样处理带来的问题是:航天器轨道可能与瞬时运动禁止区发生小范围截交。本文将允许此情况发生。

1.3 时间相关不变流形与 Poincare 截面

首先给出时间相关不变流形(Time-Dependent Invariant Manifold, TDIM)在数学上的严格定义。圆型限制性三体模型下的 Halo 轨道在更高精度的非自治系统模型下就不存在了,被拟周期的准 Halo 轨道所取代。因此,这里关于 TDIM 的定义以准 Halo 轨道为双曲集。对于定义在 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的相流: $\phi^t: z \rightarrow \phi^t(z)$,若记准 Halo 轨道状态集合为 H ,则分别称

$$W^s(H, \phi) = \{z \in D \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi^t(z), H) = 0\} \quad (5)$$

$$W^u(H, \phi) = \{z \in D \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi^t(z), H) = 0\} \quad (6)$$

为相应于准 Halo 轨道状态集 H 的时间相关稳定流

形与不稳定流形。其中, $d(\cdot, \cdot)$ 为 \mathbf{R}^n 上的二元欧氏距离函数。时间相关稳定流形与不稳定流形统称时间相关不变流形。

由于系统(1)不存在能量积分, TDIM 并不受常值能量流形的约束, 因而对于系统(1)中不变流形的研究应当在完整的 4 维相空间里进行。为了尽可能减少涉及的变量和维数, 我们采用如下两类 Poincare 截面:

$$U = \{(x, \dot{x}) \mid y = \text{const}, H = \text{const}\} \quad (7)$$

$$V = \{(y, \dot{y}) \mid x = \text{const}, H = \text{const}\} \quad (8)$$

其中, const 代表常量。

本文针对截面 $x = \text{const}$ 和 $y = \text{const}$ 分别以坐标系统 (x, y, \dot{y}, H) 和 (x, y, \dot{x}, H) 来刻画相空间, 并在相应的 Poincare 截面上研究 TDIM 与该截面的截交线。

在 Poincare 截面上, 系统(1)的不变流形的截线是闭曲线。随着能量 H 减小, 位于地 - 月系 L_1 点附近的 Hill 区域开口逐渐缩小直至闭合, 不变流形在 Poincare 截面上的截线也逐渐收缩为一点。因而, 在截面 $x = \text{const}$ (或 $y = \text{const}$) 上, 以坐标 (y, \dot{y}, H) (或 (x, \dot{x}, H)) 刻画的 TDIM 应当为变形的抛物面。

1.4 拉格朗日拟序结构

本文采用 Hall^[12] 所给出的定义, 将 LCS 定义为有限时间 Lyapunov 指数 (Finite-Time Lyapunov Exponent, FTLE) 域中的脊线。粗略地说, FTLE 是在相流作用下, 邻近两点在有限时间内的平均最大分离速率, 度量了系统对于初值的敏感依赖性。

对于定义域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上的相流映射:

$$\begin{aligned} \phi_{t_0}^{t_0+T}: D &\rightarrow \mathbf{R}^n \\ z &\rightarrow \phi_{t_0}^{t_0+T}(z) \end{aligned} \quad (9)$$

由高等代数理论易知, 相流在 $z \in D$ 处的最大拉伸方向是相应于矩阵

$$\Delta_{t_0}^T(z) = (\nabla \phi_{t_0}^{t_0+T}(z))^T \nabla \phi_{t_0}^{t_0+T}(z) \quad (10)$$

最大特征值的特征方向。沿该方向的拉伸因子为矩阵 $\nabla \phi_{t_0}^{t_0+T}(z)$ 的谱范数, 即 $\Delta_{t_0}^T(z)$ 最大特征值的平方根 γ :

$$\gamma = \sqrt{\lambda_{\max}(\Delta_{t_0}^T(z))} \quad (11)$$

从而, 有限时间 Lyapunov 指数被定义为:

$$\sigma_{t_0}^T(z) = \frac{1}{|T|} \ln \sqrt{\lambda_{\max}(\Delta_{t_0}^T(z))} \quad (12)$$

对于整个定义域 D , 由式(12) 对每一点都赋以一标量值, 这就得到了 FTLE 域。由动力系统理论可知, 不变流形位于不同侧的邻近两点会以指数速率快速分离, 即不变流形对应于较大的 FTLE。为此, 将 LCS 定义为 FTLE 域中的脊线。分析可知, 对于 $T > 0$, LCS 蕴含稳定流形; 对于 $T < 0$, LCS 蕴含不稳定流形。

2 时间相关不变流形的性质

在 PCR3BP 模型下, Koon 等人的研究表明, 共线平动点附近的不变流形管作为轨道的不变集, 是穿越轨道与非穿越轨道的分界面^[13]。本节将通过数值方法验证, 即使存在太阳的引力摄动, R4BP 双圆模型下的时间相关不变流形依然具有上述性质。

2.1 TDIM 是运动分界面

图 1 针对格点划分 300×300 、时间跨度 $T = 2.9$ 和太阳相位角 $\theta_s = -0.1071$, 在截面

$$U_1 = \{(y, \dot{y}) \mid x = 0.3, H = -847.5051\} \quad (13)$$

上绘出了 FTLE 域等高图。

注 2. 后文出现的 FTLE 域等高图均采用格点 300×300 , 将不再说明。

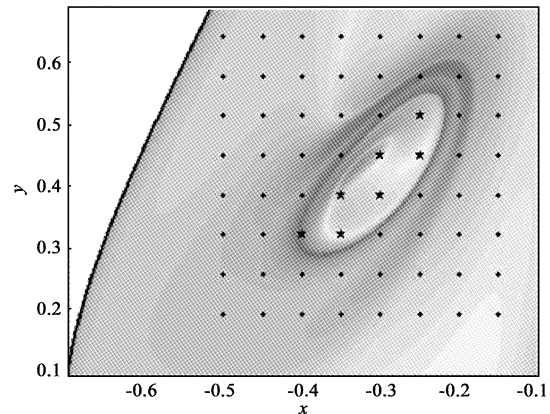


图 1 U_1 截面处的 FTLE 域 ($T = 2.9, \theta_s = -0.1071$)

Fig. 1 FTLE field on U_1 section ($T = 2.9, \theta_s = -0.1071$)

图 1 所示封闭脊线, 即 LCS, 是 TDIM 在 U_1 截面上的截交线。如图所示, 在 LCS 附近等间距布置点阵。位于 LCS 外部的点以实心圆点表示, 以其为初

状态的轨道示于图2;位于LCS内部的点以五角星符号表示,相应的轨道示于图3。

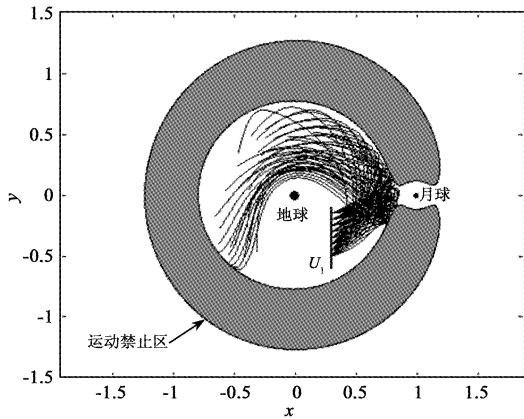


图2 非穿越轨道
Fig.2 Non-transit orbits

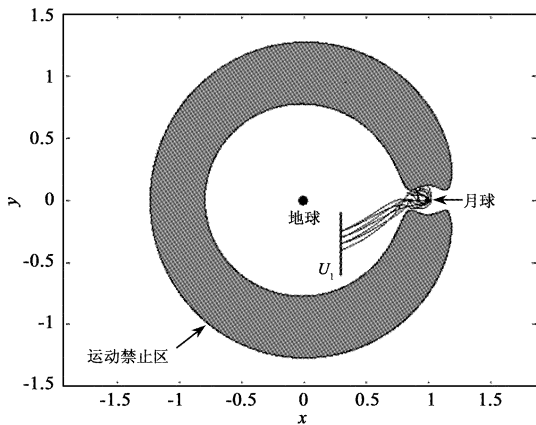


图3 穿越轨道
Fig.3 Transit orbits

从图2和图3中易见,由不变流形截线外部出发的轨道在地-月系L1点区域附近折返回地球,而由截线内部出发的轨道穿越了L1平动点区域,到达月球附近。这说明,依赖于时间的不变流形依然是穿越轨道与非穿越轨道的分界面。

2.2 TDIM 是轨道不变集

在使用流形生长法对PCR3BP中的不变流形(以稳定流形为例)进行计算时,由Lyapunov轨道上沿稳定流形方向的微小偏移点出发,反向积分得到一条位于稳定流形上的轨道。实际上,这种处理本身已蕴含了不变流形是轨道的不变集。

对于TDIM,由于难以直观表达其整体形状,为证明类似结论,本文采用一系列Poincare截面进行采样。

首先,针对时间跨度 $T = 3.6$ 和太阳相位角 $\theta_s = 0.8571$,在截面

$$U_2 = \{(x, \dot{x}) \mid y = 0, H = -847.5046\} \quad (14)$$

上绘出FTLE域等高图,如图4。在LCS脊线上任取一点,以星形符号示出。以该点为初状态的轨道,示于图5。我们采用Poincare截面二维坐标下的欧氏距离来定量描述该截面上的点与由二分法精确提取出的LCS的距离。图4中的轨道初状态点与LCS的距离为 9.894894×10^{-4} ,可以认为该点是取在LCS上的。

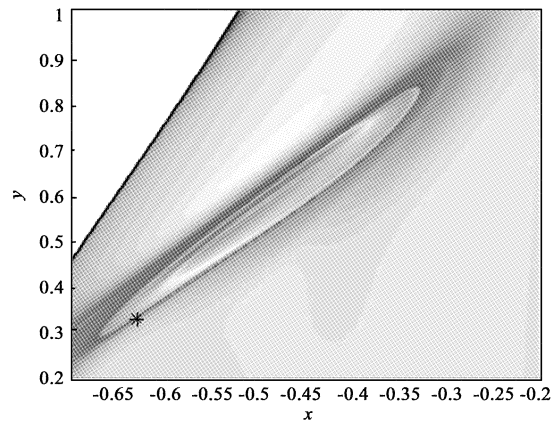


图4 U2截面处的FTLE域 ($T = 3.6, \theta_s = 0.8571$)
Fig.4 FTLE field on U2 section ($T = 3.6, \theta_s = 0.8571$)

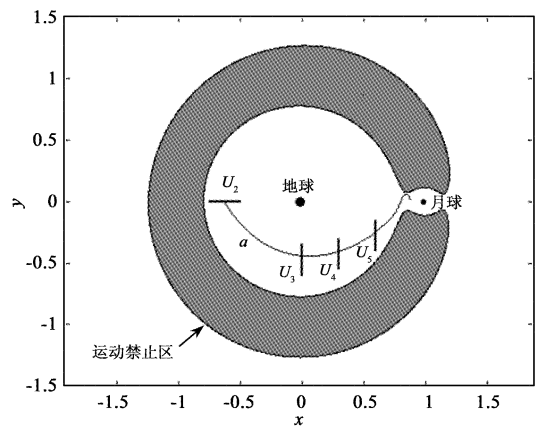


图5 由LCS上一点出发的轨道
Fig.5 Orbit originated from LCS

图5中的轨道进入地-月系平动点区域,并表现出渐近收敛于准周期轨道的趋势。考察该轨道与截面 $x = 0, x = 0.3$ 和 $x = 0.6$ 的截交,以截交点处的轨道能量确定出相应的Poincare截面:

$$U_3 = \{(y, \dot{y}) \mid x = 0, H = -847.5048\} \quad (15)$$

$$U_4 = \{(y, \dot{y}) \mid x = 0.3, H = -847.5051\} \quad (16)$$

$$U_5 = \{(y, \dot{y}) \mid x = 0.6, H = -847.5056\} \quad (17)$$

在对应的太阳相位角下, 绘出各截面上的 FTLE 域等高图以及轨道在各截面上的截交点, 参见图 6 ~ 图 8。

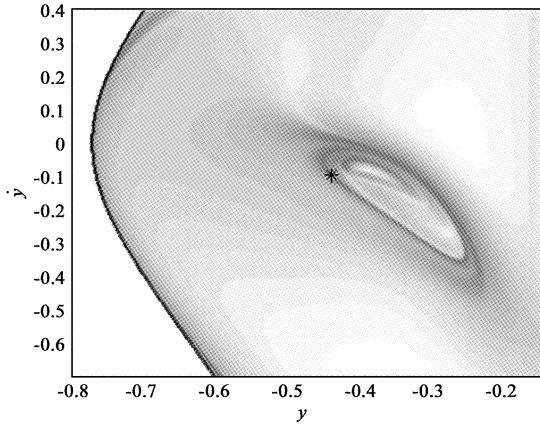


图 6 U_3 截面处的 FTLE 域 ($T = 3.3, \theta_s = 0.1432$)
Fig. 6 FTLE field on U_3 section ($T = 3.3, \theta_s = 0.1432$)

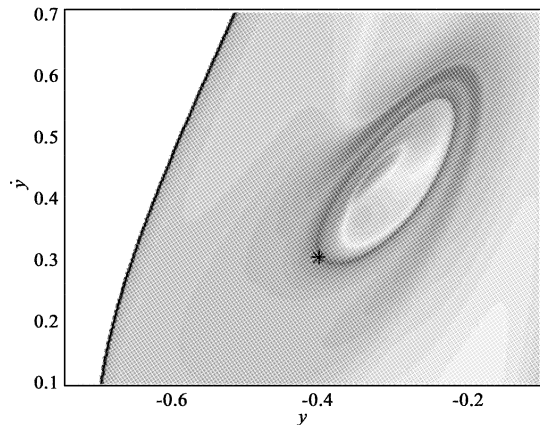


图 7 U_4 截面处的 FTLE 域 ($T = 2.9, \theta_s = -0.1071$)
Fig. 7 FTLE field on U_4 section ($T = 2.9, \theta_s = -0.1071$)

由图 6 ~ 图 8 所示, 在各截面上, 轨道交点恰好处于相应的 LCS 上。具体地, 轨道交点与 LCS 的距离分别为: 1.786572×10^{-3} 、 3.011152×10^{-3} 和 2.074241×10^{-3} 。这反映出, 该条轨道随着时间的变化依然落在 TDIM 上, 从而表明 TDIM 是轨道的不变集。

3 LCS 的精确数值提取

计算 LCS 时, 格点划分得越细密, 脊线结构就越精确, 但计算也越耗时。另外, 很多应用往往只关注 LCS 本身, 在 FTLE 域中的无脊线部分细分格点

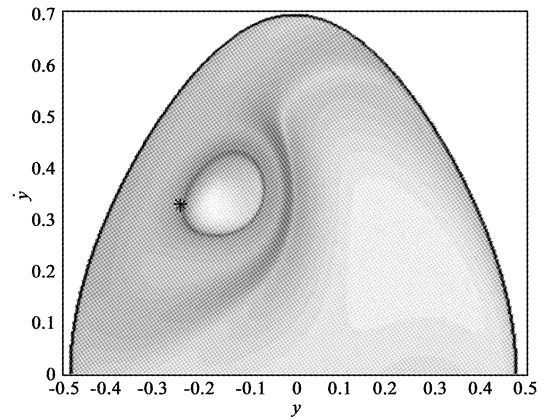


图 8 U_5 截面处的 FTLE 域 ($T = 2.2, \theta_s = -0.5236$)
Fig. 8 FTLE field on U_5 section ($T = 2.2, \theta_s = -0.5236$)

就是徒劳的。因而, 有必要设计高效算法对 LCS 进行精确提取。

本节利用 TDIM 的分界面性质, 采用二分法对 LCS 进行提取。在 LCS 内、外部各取一点, 记为 A 和 B, 它们分别对应穿越和非穿越轨道。取线段 AB 的中点 C, 数值验证相应的轨道类型。以该轨道是穿越的为例, 用线段 BC 代替线段 AB, 继续二分下去, 直到由线段中点出发的轨道进入平动点区域并在指定时间内不穿出为止, 则认为该点位于 LCS 上。指定的时长越长, 则提取出的 LCS 越精确。较粗的格点划分就足以确定出 FTLE 域中 LCS 的内部和外部, 因而该算法的实现不依赖于格点的细分, 从而大大提高了计算效率。

以图 8 中所示 U_5 截面的 FTLE 域为例, 借助二分法对 LCS 进行了精确提取, 提取结果以封闭实曲线绘于图 9。

在图 9 中的 LCS 上任取一点 (星形符号), 相应的轨道绘于图 10。该轨道在进入地 - 月系 L_1 平动点区域后, 呈现准周期运动。

4 时间相关不变流形的构形

系统 (1) 无能量积分, 航天器轨道不受常数能量流形的约束, 因而有必要在三维空间 (y, \dot{y}, H) (或 (x, \dot{x}, H)) 中考察 TDIM 在截面 $x = \text{const}$ (或 $y = \text{const}$) 上的构型。

以截面 $x = 0.6$ 为例, 在一系列等间隔分布的等能量面上提取出相应的 LCS, 并叠加绘制于下图中。图 11 ~ 图 13 分别对应于太阳相位角 $\theta_s = 0, \theta_s$

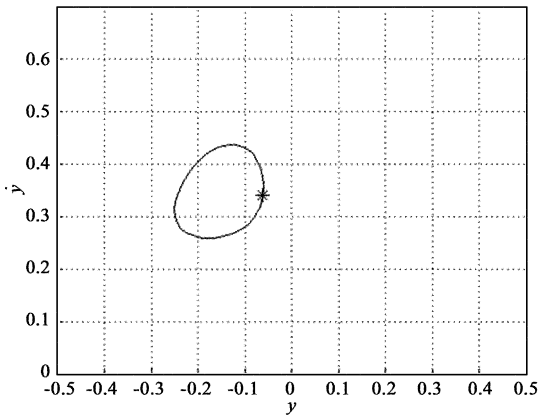


图 9 由 U_5 截面上 FTLE 域中提取出的 LCS
Fig. 9 LCS extracted from FTLE field on U_5 section

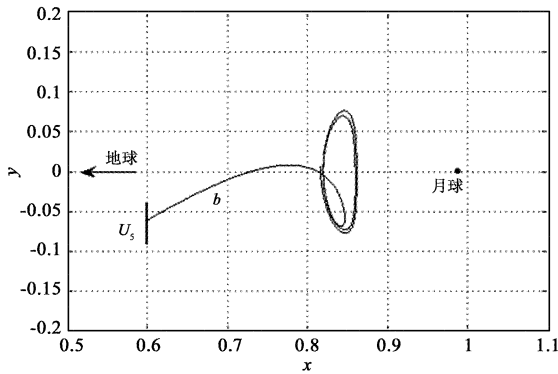


图 10 由精确 LCS 上一点出发的轨道
Fig. 10 Orbit originated from the accurate LCS

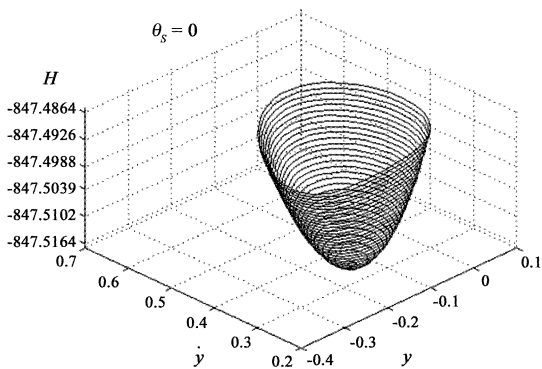


图 11 截面 $x = 0.6$ 上的时间相关不变流形 ($\theta_s = 0$)
Fig. 11 Time-dependent invariant manifold on $x = 0.6$ ($\theta_s = 0$)

$= \pi/4$ 和 $\theta_s = \pi/2$ 。

图 11 ~ 图 13 描绘出 TDIM 在截面 $x = 0.6$ 上的构型。显然, 该构型形如变形的抛物面。对比三幅图易见, 随着太阳相位角的改变, 该构型沿 H 轴方向平

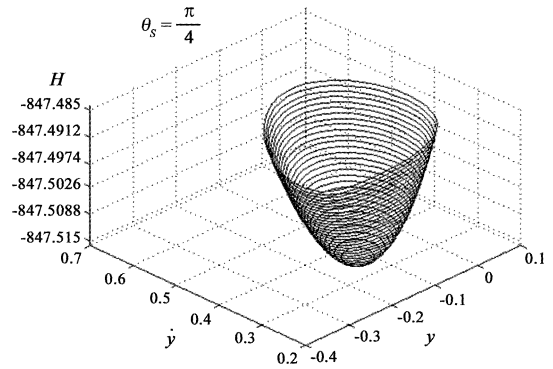


图 12 截面 $x = 0.6$ 上的时间相关不变流形 ($\theta_s = \pi/4$)

Fig. 12 Time-dependent invariant manifold on $x = 0.6$ ($\theta_s = \pi/4$)

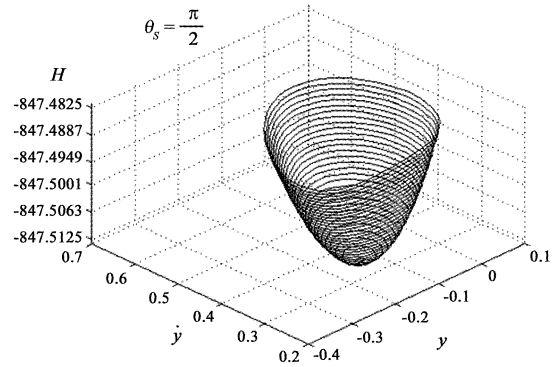


图 13 截面 $x = 0.6$ 上的时间相关不变流形 ($\theta_s = \pi/2$)

Fig. 13 Time-dependent invariant manifold on $x = 0.6$ ($\theta_s = \pi/2$)

移, 而其形状没有明显变化。

5 低能奔月轨道

1990 年, 日本探月卫星 Hiten 因燃料不足无法实现地月间转移。Belbruno 和 Miller 借助弱稳定边界理论构建了一条低能奔月轨道, 所需燃料比传统霍曼转移节省约 20%, 帮助 Hiten 成功抵达月球^[14]。2000 年, Koon 等人将两个 PCR3BP 模型下的不变流形进行拼接复现了 Hiten 型轨道, 从数学上揭示了低能奔月轨道的动力学机制^[15]。国内学者也有进一步的研究^[16-19]。然而, 双三体模型流形拼接法带来轨道设计误差, R4BP 模型等非自治系统中低能轨道的直接构建又缺乏理论工具。

LCS 理论及其与不变流形的紧密联系,提供了在非自治系统中直接构建低能奔月轨道的新思路。本文以 BCM 模型为例给出算例。Koon 的做法是将 BCM 模型简化解耦为两个三体模型,分别设计两个轨道段:日-地平动点段和月球弹道捕获段,最后进行拼接。作为初步算例,本文依然在日-地三体模型下计算日-地平动点轨道段,但在完整的四体 BCM 模型下借助 TDIM 构建月球弹道捕获段完成轨道拼接。

图 14 是地月旋转系下的 Poincare 截面。其中,日-地 L_2 点附近 Lyapunov 轨道的不稳定流形截线由传统方法算得。而地-月 L_2 点区域附近时间相关稳定流形构型的等高线轮廓由 LCS 提取算法得到。拼接点需要仔细定位。前文的数值仿真表明时间相关稳定流形所包围的轨道是穿越轨道,最终将被月球弹道捕获。因此,拼接点至少应位于某个等高线内部。同理,拼接点应当位于不稳定流形截线的外部,从而由该点出发负向积分所得轨道将返回地球附近。借助迭代算法,拼接点可精确定位以使得负向积分轨道穿越 200km 高度地球停泊轨道。

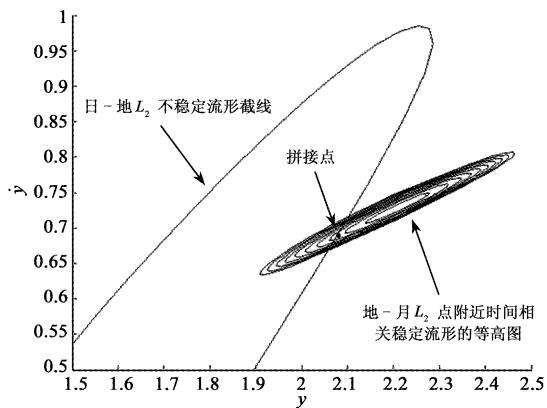


图 14 地月旋转系系下的 Poincare 截面

Fig. 14 Poincare section in Earth-Moon rotating frame

利用 TDIM 构建出的低能奔月轨道的两个轨道段分别示于图 15 和图 16 中。两段轨道在拼接点处由 42m/s 的速度增量实现拼接。从拼接点出发,探测器沿正向将被月球弹道捕获,沿负向将返回地球 200km 高度停泊轨道。

6 结 论

本文借助拉格朗日拟序结构(LCS)对日-地-

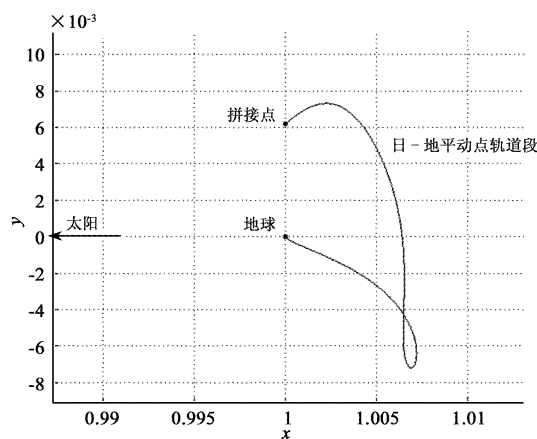


图 15 Hiten 型轨道的日地平动点段

Fig. 15 Sun-Earth Lagrange point portion of Hiten orbit

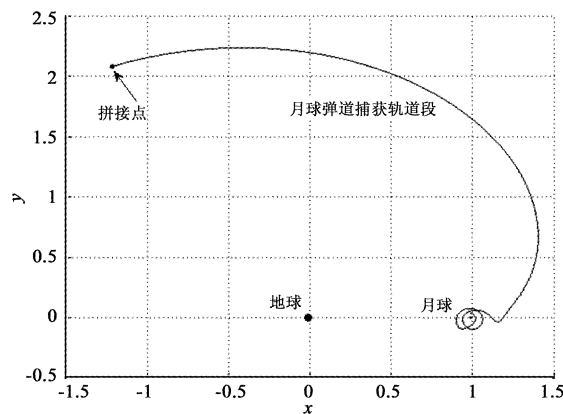


图 16 Hiten 型轨道的月球弹道捕获段

Fig. 16 Lunar ballistic capture portion of Hiten orbit

月双圆模型中的时间相关不变流形(TDIM)得到如下结论:

- (1) TDIM 是穿越、非穿越轨道的分界面;
- (2) TDIM 是轨道不变集;
- (3) 太阳的位置对于 TDIM 形状的影响可以忽略,但会引起其构型在能量轴方向上平移;
- (4) 借助 TDIM 可以实现在非自治系统中对低能奔月轨道的直接构建。

本文所示低能转移在双圆模型下的构建算例可以平行推广到其他非自治系统,甚至是复杂星历模型。然而,LCS 的精确绘制计算量大、耗时长,设计高效的提取算法将是未来研究的重点。

参 考 文 献

[1] 龚胜平,李俊峰,宝音贺西,等. 基于不变流形的登月轨道设计[J]. 应用数学和力学, 2007, 28 (2): 183 - 190. [Gong

- Sheng-ping, Li Jun-feng, BaoYin He-xi, et al. Lunar landing trajectory design based on invariant manifold [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, 28 (2):183-190.]
- [2] Peng H J, Gao Q, Wu Z G, et al. Symplectic adaptive algorithm for solving nonlinear two-point boundary value problems in astrodynamics [J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2011, 110(4) : 319-342.
- [3] Qi R, Xu S J, Xu M. Impulsive control for formation flight about libration points [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(2) : 484-496.
- [4] 任远,崔平远,栾恩杰. 基于不变流形的小推力 Halo 轨道转移方法研究[J]. *宇航学报*, 2007,28(5) : 1113-1118. [Ren Yuan, Cui Ping-yuan, Luan En-jie. Study of low-thrust transfer to halo orbit with invariant manifolds [J]. *Journal of Astronautics*, 2007, 28 (5) :1113-1118.]
- [5] 李明涛,郑建华,于锡峥,等. IPS 转移轨道设计技术[J]. *宇航学报*, 2009,30(1) : 72-81. [Li Ming-tao, Zheng Jian-hua, Yu Xi-zheng, et al. On transfer trajectory design technologies of interplanetary superhighway[J]. *Journal of Astronautics*, 2009, 30 (1) :72-81.]
- [6] Parker T S, Chua L O. *Practical numerical algorithms for chaotic systems*[M]. New York: Springer-Verleg, 1989.
- [7] Shadden S C, Lekin F, Marsden J E. Definition and properties of Lagrangian coherent structures from finite-time Lyapunov exponents in two-dimensional aperiodic flows [J]. *Physica D*, 2005,212: 271-304.
- [8] Gawlik E S, Du Toit P C, Campagnola S, et al. Lagrangian coherent structures in the planar elliptic restricted three-body problem[J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2009, 103 : 227-249.
- [9] Short C R, Howell K C. Lagrangian coherent structures in various map representations for application to multi-body gravitational regimes [C]. *The 63rd International Astronautical Congress*, Naples, Italy, Oct 1-5, 2012.
- [10] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. *Dynamical systems, the three-body problem, and space mission design*[M]. Berlin: World Scientific, 2000: 125-128.
- [11] 孙义燧,周济林. *现代天体力学导论*[M]. 北京:高等教育出版社, 2008: 104-109.
- [12] Haller G. Distinguished material surfaces and coherent structures in three-dimensional fluid flows[J]. *Physica D*, 2001,149: 248-277.
- [13] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. Heteroclinic connections between periodic orbits and resonance transitions in celestial mechanics[J]. *Chaos*, 2000, 10: 427-469.
- [14] Belbruno E A, Miller J K. Sun - perturbed Earth-to-Moon transfers with ballistic capture [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1993, 16: 770-775.
- [15] Koon W S, Lo M W, Marsden J E, et al. Low energy transfer to the Moon [J]. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 2001, 81(1/2) : 63-73.
- [16] 何巍,徐世杰. 地月低能转移轨道设计方法研究[J]. *宇航学报*, 2006,27(5) : 965-969. [He Wei, Xu Shi-jie. Research on low energy transfer trajectory design method between earth and moon[J]. *Journal of Astronautics*, 2006, 27(5) :965-969.]
- [17] 俞辉,宝音贺西,李俊峰. 双三体系统不变流形拼接成的低成本探月轨道[J]. *宇航学报*, 2007,28(3) : 637-642. [Yu Hui, BaoYin He-xi, Li Jun-feng. Low energy transfer to the moon using the patching of invariant manifolds of two there-body systems[J]. *Journal of Astronautics*, 2007, 28(3) :637-642.]
- [18] 徐明. 地月低能转移的发生条件及轨迹构造[J]. *力学学报*, 2010,42(2) : 275-289. [Xu Ming. The occurrence conditions and trajectory constructions for low energy cislunar transfers[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2010, 42 (2) :275-289.]
- [19] 乔栋,崔平远,尚海滨. 基于椭圆型限制性三体模型的借力飞行机理研究 [J]. *宇航学报*, 2010,31 (1) : 36-43. [Qiao Dong, Cui Ping-yuan, Shang Hai-bin. Research on gravity-assist mechanism in elliptic restricted three-body model[J]. *Journal of Astronautics*, 2010, 31 (1) :36-43.]

作者简介:

祁瑞(1985-),男,博士生,主要从事限制性多体问题平动点附近的轨道动力学与应用研究。

通信地址:北京航空航天大学,宇航学院,制导导航与控制系(100191)

电话:(010) 82339751

E-mail:tremackey@163.com

(编辑:曹亚君)