

广义 Wolfe 线搜索下一类修正的 Fletcher-Reeves 方法的收敛性*

刘金魁

(重庆三峡学院数学与统计学院 404100)

(E-mail: liujinkui2006@126.com)

摘要 本文在 Fletcher-Reeves 共轭梯度法的基础上提出一类修正的 Fletcher-Reeves 共轭梯度法, 其在广义 Wolfe 线搜索下具有充分下降性和全局收敛性. 大量数值试验表明, 新方法对于给定的测试函数在数值效果上明显优于 Fletcher-Reeves 共轭梯度法.

关键词 无约束最优化问题; 共轭梯度法; 充分下降性; 广义 Wolfe 线搜索; 全局收敛性

MR(2000) 主题分类 65K; 90C

中图分类号 O224

1 引言

考虑无约束优化问题:

$$\min_{x \in R^n} f(x), \quad (1.1)$$

其中 $f: R^n \rightarrow R$ 为连续可微函数, 其梯度函数存在. 求解 (1.1) 的非线性共轭梯度法中, 最早的一种是由 Fletcher 和 Reeves^[1] 在 1964 年提出的 Fletcher-Reeves 共轭梯度法 (FR 方法), 它的迭代格式为:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, \quad (1.2)$$

$$d_k = \begin{cases} -g_1, & k = 1, \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & k \geq 2, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\beta_k = \beta_k^{FR} = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}, \quad (1.4)$$

本文 2012 年 8 月 14 日收到. 2012 年 9 月 26 日收到修改稿.

* 重庆市教委 (KJ121112) 资助项目.

其中 $g_k = \nabla f(x_k)$ 为 $f(x)$ 在 x_k 处的梯度; $\alpha_k \geq 0$ 是步长因子, 由某种线搜索得到; d_k 是搜索方向; β_k 为标量参数. FR 方法因具有稳定的收敛性已经被广泛研究. 早在 1970 年, Zoutendijk^[2] 证明了 FR 方法采用精确线搜索时收敛. 1985 年, Al-Baali^[3] 将上述结果推广到强 Wolfe 线搜索, 即 α_k 满足:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \delta \alpha_k g_k^T d_k, \quad (1.5)$$

$$|g_{k+1}^T d_k| \leq -\sigma g_k^T d_k, \quad (1.6)$$

其中 $0 < \delta < \sigma < \frac{1}{2}$. Liu, Han 和 Yin^[4] 将 Al-Baali 的结果推广到了 $\sigma = \frac{1}{2}$. Dai 和 Yuan^[5] 证明了在广义 Wolfe 线搜索: (1.5) 和

$$\sigma_1 g_k^T d_k \leq g_{k+1}^T d_k \leq -\sigma_2 g_k^T d_k, \quad (1.7)$$

下, 若参数满足 $\sigma_1 + \sigma_2 \leq 1$ ($0 < \delta < \sigma_1 < 1$, $\sigma_2 \geq 0$), 则可证明 FR 方法在每一步产生一个下降搜索方向, 且全局收敛.

本文首先对 FR 方法进行修正得到一类修正的 Fletcher-Reeves 共轭梯度法 (MFR 方法). 其次, 在广义 Wolfe 线搜索下证明 MFR 方法的全局收敛性. 最后, 对 MFR 方法和 FR 方法进行数值实验.

2 MFR 方法及其充分下降性

求解无约束优化问题 (1.1) 的 MFR 方法:

步骤 1 给定 $x_1 \in R^n$, $\varepsilon \geq 0$. 令 $d_1 = -g_1$, $k:=1$, 如果 $g_1 = 0$, 停止.

步骤 2 步长 α_k 满足广义 Wolfe 线搜索 (1.5) 和 (1.7), 其中 $\sigma_1 + \sigma_2 \leq 1$ ($0 < \delta < \sigma_1 < 1$, $\sigma_2 \geq 0$).

步骤 3 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, 如果 $\|g_{k+1}\| \leq \varepsilon$, 停止.

步骤 4 由 (1.3) 求 d_{k+1} , 计算参数 β_k 按如下公式: $\beta_k^{MFR} = \max\{0, \beta_k^{FR} + \phi_k\}$, 其中 $\phi_k = \frac{u g_{k-1}^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2}$, $u \geq 0$.

步骤 5 设 $k := k + 1$, 转步骤 2.

定理 2.1 设序列 $\{g_k\}$ 和 $\{d_k\}$ 由 MFR 方法产生, 则对所有的 $k \geq 1$, 有

$$\frac{1 - \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1^{k-1}}{1 - \sigma_1} \leq -\frac{g_k^T d_k}{\|g_k\|^2} \leq \frac{1 - \sigma_1^k}{1 - \sigma_1}. \quad (2.1)$$

证 利用归纳法证明. 当 $k = 1$ 时, $g_1^T d_1 = -\|g_1\|^2$, 结论 (2.1) 显然成立. 假设结论 (2.1) 对于任意某个 $k - 1$ ($k \geq 2$) 成立, 即

$$\frac{1 - \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1^{k-2}}{1 - \sigma_1} \leq -\frac{g_{k-1}^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \leq \frac{1 - \sigma_1^{k-1}}{1 - \sigma_1}. \quad (2.2)$$

下面证明结论 (2.1) 对于任意 k 成立. 根据假设 (2.2), 可知

$$0 \leq \beta_k^{MFR} \leq \beta_k^{FR}. \quad (2.3)$$

对 (1.3) 两端乘以 g_k^T , 有

$$g_k^T d_k = -\|g_k\|^2 + \beta_k^{MFR} g_k^T d_{k-1}.$$

根据 (2.3) 和 (1.7), 可得

$$-\|g_k\|^2 + \sigma_1 \beta_k^{FR} g_k^T d_{k-1} \leq g_k^T d_k \leq -\|g_k\|^2 - \sigma_2 \beta_k^{FR} g_k^T d_{k-1}.$$

不等式两端同除以 $-\|g_k\|^2$, 有

$$1 + \sigma_2 \frac{g_{k-1}^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2} \leq -\frac{g_k^T d_k}{\|g_k\|^2} \leq 1 - \sigma_1 \frac{g_{k-1}^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2}. \quad (2.4)$$

令 $\rho_{k-1} = -\frac{g_{k-1}^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2}$, 则根据 (2.4) 有

$$1 - \sigma_2 \rho_{k-1} \leq \rho_k \leq 1 + \sigma_1 \rho_{k-1}. \quad (2.5)$$

已知 $\rho_1 = 1$ 和 $\rho_{k-1} \geq 0$, 对 (2.5) 式的第二个不等式进行递推, 可得

$$\rho_{k-1} \leq \frac{1 - \sigma_1^{k-1}}{1 - \sigma_1}. \quad (2.6)$$

根据 (2.5) 和 (2.6), 可得

$$\frac{1 - \sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_1^{k-1}}{1 - \sigma_1} = 1 - \sigma_2 \frac{1 - \sigma_1^{k-1}}{1 - \sigma_1} \leq \rho_k \leq 1 + \sigma_1 \frac{1 - \sigma_1^{k-1}}{1 - \sigma_1} = \frac{1 - \sigma_1^k}{1 - \sigma_1}.$$

显然, 结论 (2.1) 对任意 k 也成立. 由归纳法知, 定理成立.

推论 2.1 由定理 2.1 的结论可知, MFR 方法满足充分下降条件:

$$g_k^T d_k \leq -c \|g_k\|^2, \quad c = \frac{1 - \sigma_1 - \sigma_2}{1 - \sigma}. \quad (2.7)$$

3 MFR 方法的全局收敛性

为证明 MFR 方法的全局收敛性, 对目标函数 $f(x)$ 作如下假设 (H):

- (i) 目标函数 $f(x)$ 在水平集 $\Omega = \{x \mid f(x) \leq f(x_1)\}$ 下方有界, 其中 x_1 为初始点;
- (ii) 设 $V \subset \Omega$, 目标函数 $f(x)$ 在 V 内连续可微, 且梯度函数 $g(x)$ 在 V 内满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $L > 0$, 使得 $\|g(x) - g(y)\| \leq L \|x - y\|, \forall x, y \in V$.

引理 3.1 设 x_1 是使目标函数 $f(x)$ 满足假设 (H) 的初始点. 考虑一般方法 $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, 其中 d_k 满足 $g_k^T d_k < 0$, 步长 α_k 由广义 Wolfe 线搜索求得, 则对于任意 $k \in N$, 有

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2} < +\infty. \quad (3.1)$$

证 由 (1.7) 知,

$$[g_{k+1} - g_k]^T d_k \geq (\sigma_1 - 1) g_k^T d_k.$$

另一方面, 由 Lipschitz 条件有

$$[g_{k+1} - g_k]^T d_k \leq \|g_{k+1} - g_k\| \cdot \|d_k\| \leq \alpha_k L \|d_k\|^2.$$

利用以上两式得

$$\alpha_k \geq \frac{\sigma_1 - 1}{L} \cdot \frac{g_k^T d_k}{\|d_k\|^2}. \quad (3.2)$$

由 (1.5) 和 (3.2), 可知

$$f_k - f_{k+1} \geq \frac{\delta(1 - \sigma_1)}{L} \cdot \frac{(g_k^T d_k)^2}{\|d_k\|^2},$$

对上式从 $k = 1, 2, \dots$ 求和, 且根据 $f(x)$ 下方有界, 即知 (3.1) 成立.

推论 3.1 由 (2.7) 和 (3.1) 可得 $\sum_{k \geq 1} t_k^{-1} < +\infty$, 其中 $t_k = \frac{\|d_k\|^2}{\|g_k\|^4}$.

定理 3.1 设 x_1 是使目标函数 $f(x)$ 满足假设 (H) 的初始点, 则由 MFR 方法产生的点列 $\{x_k\}$ 或者 $g_k = 0$ 对某个 k 成立, 或者

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\| = 0. \quad (3.3)$$

证 若 $g_k = 0$ 对某个 k 成立, 则 x_k 为点列的稳定点, 定理证毕. 否则, 用反证法证明. 假设 (3.3) 不成立, 则存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得对任意 k 有

$$\|g_k\|^2 \geq \varepsilon. \quad (3.4)$$

对 (1.3) 两端取模平方, 整理得

$$\|d_k\|^2 = \|g_k\|^2 + (\beta_k^{MFR})^2 \|d_{k-1}\|^2 - 2\beta_k^{MFR} g_k^T d_{k-1}. \quad (3.5)$$

根据 (2.3), (1.7) 和 (3.5) 有:

$$\|d_k\|^2 \leq \|g_k\|^2 + (\beta_k^{FR})^2 \|d_{k-1}\|^2 - 2\sigma_1 \beta_k^{FR} g_{k-1}^T d_{k-1}.$$

对上式两端同除以 $\|g_k\|^4$, 可得:

$$\frac{\|d_k\|^2}{\|g_k\|^4} \leq \frac{\|d_{k-1}\|^2}{\|g_{k-1}\|^4} + \frac{1}{\|g_k\|^2} \cdot \left(1 - 2\sigma_1 \frac{g_{k-1}^T d_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2}\right).$$

由 (2.1), 可知:

$$t_k \leq t_{k-1} + \frac{1}{\|g_k\|^2} \cdot \left(1 + 2\sigma_1 \cdot \frac{1 - \sigma_1^{k-1}}{1 - \sigma_1}\right) \leq t_{k-1} + \frac{2\sigma_1}{1 - \sigma_1} \cdot \frac{1}{\|g_k\|^2}.$$

又 $t_1 = \frac{1}{\|g_1\|^2}$, 对上式求和, 得

$$t_k \leq \frac{2\sigma_1}{1 - \sigma_1} \cdot \sum_{i=1}^k \frac{1}{\|g_i\|^2}.$$

根据 (3.4), 有 $t_k \leq \frac{2\sigma_1}{1-\sigma_1} \cdot \frac{k}{\varepsilon}$. 可见 t_k 最多线性增长. 于是 $\sum_{k \geq 1} t_k^{-1} = +\infty$. 上式与推论 3.1 矛盾, 故假设不成立, 结论得证.

4 数值试验

利用 MATLAB 7.0.1 编写程序代码, 对 [6] 中的测试函数进行了测试. 线搜索中参数 $\delta = 0.01$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$; 当参数 $u = 0.05, 0.1$ 和 0.5 时, MFR 方法依次记为 MFR1、MFR2 和 MFR3 方法. 程序终止条件为 $\|g\|_k \leq 1.0 \times 10^{-6}$, 或者最大迭代次数 $It_{\max} > 9999$.

表 4.1, 4.2 中 “Problem” 表示 [6] 中测试函数的名称; “Dim” 表示测试函数的维数; 表 4.1 中数据格式为 NI/NF/NG, 依次为迭代次数、函数值计算次数、梯度值计算次数. 表 4.2 中数据格式为 CPU/f, 分别表示 CPU 运行时间 (单位为秒) 和目标函数值. “NaN” 表示方法对测试问题失败. 下面为了对所给方法进行评价, 根据本文算法的终止条件做如下规定: 若 W 方法对于第 i_0 个测试问题失败, 则第 i_0 个测试问题的迭代次数、函数值计算次数、梯度值计算次数和 CPU 时间分别用 W 方法计算其它测试函数的最大迭代次数、最大函数值计算次数、最大梯度值计算次数和最大 CPU 时间代替.

该文采用 [7] 中评价思想来评估 MFR 方法在迭代方面的整体优劣性, 并利用 [8] 中的思想对 MFR 方法从 CPU 时间上进行对比, 结果分别见表 4.3 和图 4.1.

表 4.3 和图 4.1 结果显示 MFR 方法对于所给测试函数在迭代方面和 CPU 时间方面均优于 FR 方法.

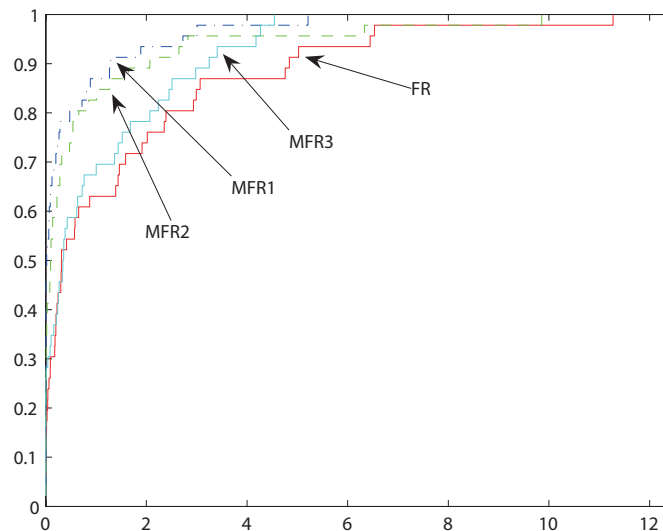


图 4.1

表 4.1 FR, MFR1, MFR2, MFR3 方法的迭代结果

Problem	Dim	FR	MFR1	MFR2	MFR3
ROSE	2	119/349/302	35/126/106	33/137/112	34/156/126
FROTH	2	16/92/72	17/89/71	NaN/NaN/NaN	16/86/68
BADSCP	2	4091/9845/9780	44/277/250	22/151/136	35/242/222
BADSCB	2	239/821/700	19/132/119	21/159/147	36/233/218
BEALE	2	49/149/124	33/106/86	23/81/65	25/94/76
JENSAM	2($m = 8$)	23/80/52	16/62/36	16/63/39	35/123/88
HELIX	3	39/116/97	47/146/121	57/166/141	233/596/528
BRAD	3	28/98/81	33/111/92	38/126/105	456/1158/1050
GAUSS	3	3/8/6	3/8/6	3/8/6	4/10/7
MEYER	3	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1
GULF	3	1/2/2	1/2/2	1/2/2	1/2/2
BOX	3	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1
SING	4	767/2071/1830	152/463/404	149/457/399	3924/9331/8309
WOOD	4	103/307/251	91/346/293	170/611/523	425/1326/1159
KOWOSB	4	411/1138/990	129/424/371	118/393/341	497/1407/1254
BD	4	NaN/NaN/NaN	45/180/142	49/180/143	51/202/164
OSB1	5	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1
BIGGS	6	239/661/581	6818/19457/17227	NaN/NaN/NaN	NaN/NaN/NaN
OSB2	11	NaN/NaN/NaN	730/1678/1579	1079/2508/2363	1877/4922/4394
WATSON	5	136/345/309	444/1256/1095	626/1732/1512	845/2323/2082
	10	7/81/52	7/81/52	7/81/52	7/81/52
	15	8/92/60	8/92/60	8/92/60	8/92/60
PEN2	50	151/630/546	189/888/783	222/971/848	256/1024/908
	100	139/3378/337	76/224/194	86/238/206	NaN/NaN/NaN
PEN1	100	41/180/141	25/170/130	22/164/121	30/203/158
	200	23/144/105	26/168/124	24/166/122	31/208/158
TRIG	100	322/448/447	70/133/130	69/144/137	90/212/190
	200	333/457/456	61/113/111	53/108/105	77/196/178
ROSEX	500	126/371/320	38/142/121	35/148/123	36/165/134
	1000	132/390/337	38/142/121	35/148/123	36/165/134
SINGX	500	1959/5740/5026	207/664/588	319/984/877	NaN/NaN/NaN
	1000	3105/8718/7688	16822/522/460	383/1191/1057	NaN/NaN/NaN
BV	500	9821/12980/12979	866/1745/1735	716/1552/1516	203/528/479
	1000	1247/1519/1518	75/144/143	59/118/117	25/64/5
IE	500	7/15/8	7/15/8	7/15/8	7/15/8
	1000	8/17/9	7/15/8	7/15/8	7/15/8
TRID	500	48/104/99	33/74/69	35/81/68	39/90/77
	1000	65/139/135	34/77/73	35/81/72	43/105/91
BAND	500	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1
	1000	1/1/1	1/1/1	1/1/1	1/1/1
LIN0	50($m=100$)	2/3/2	2/3/2	2/3/2	2/3/2
	100($m = 200$)	2/3/2	2/3/2	2/3/2	2/3/2
LIN1	100($m=200$)	2/3/2	2/3/2	2/3/2	2/3/2
	200($m = 300$)	3/5/3	3/5/3	3/5/3	3/5/3
LIN	500($m = 600$)	1/3/2	1/3/2	1/3/2	1/3/2
	1000($m = 1100$)	1/3/2	1/3/2	1/3/2	1/3

表 4.2 FR, MFR1, MFR2, MFR3 方法的 CPU 时间及函数值

Problem	Dim	FR	MFR1	MFR2	MFR3
ROSE	2	0.1198/3.6183e-014	0.0434/8.3833e-013	0.0467/8.4512e-013	0.0521/3.8537e-014
FROTH	2	0.0317/48.9843	0.0298/48.9843	NaN/NaN	0.0492/48.9843
BADSCP	2	4.1703/2.4382e-005	0.0791/5.3689e-006	0.0451/8.8093e-005	0.0905/5.4904e-005
BADSCB	2	0.2394/71.2952	0.1099/2.3493e-009	0.0457/0	0.1467/4.6183e-008
BEALE	2	0.0499/3.6544e-014	0.0405/2.0550e-018	0.0333/1.1098e-015	0.0426/1.8450e-016
JENSAM	2(m = 8)	0.1430/55.4158	0.0187/55.4158	0.1171/55.4158	0.0508/55.4158
HELIX	3	0.0419/1.2829e-014	0.0583/4.4292e-015	0.0609/6.0796e-015	0.2292/1.1696e-013
BRAD	3	0.0758/0.0082	0.0609/0.0082	0.0760/0.0082	0.6465/0.0082
GAUSS	3	0.0046/1.1279e-008	0.0046/1.1279e-008	0.0047/1.1279e-008	0.0132/1.1280e-008
MEYER	3	0.0044/1.6936e+009	0.0033/1.6936e+009	0.0039/1.6936e+009	0.0039/1.6936e+009
GULF	3	0.0016/0.0385	0.0013/0.0385	0.0014/0.0385	0.0074/0.0385
BOX	3	0.0783/1.0312e+003	0.0748/1.0312e+003	0.0872/1.0312e+003	0.0770/1.0312e+003
SING	4	0.8467/8.5632e-011	0.1655/4.5494e-010	0.1821/5.8759e-010	3.8607/7.6913e-010
WOOD	4	0.1165/3.3887e-015	0.1150/2.3486e-013	0.2082/9.7352e-014	0.5423/2.9555e-013
KOWOSB	4	0.5076/3.0751e-004	0.1841/3.0751e-004	0.1688/3.0751e-004	0.7089/3.0751e-004
BD	4	NaN/NaN	0.0866/8.5822e+004	0.2087/8.5822e+004	0.1098/8.5822e+004
OSB1	5	0.0021/0.8790	0.0019/0.8790	0.0017/0.8790	0.0019/2.1760
BIGGS	6	0.3416/0.0057	12.6697/1.5745e-008	NaN/NaN	NaN/NaN
OSB2	11	NaN/NaN	2.4566/0.0401	3.4120/0.0401	6.3430/0.0401
WATSON	5	0.2182/0.0172	1.4451/0.0172	1.5472/0.0172	2.0759/0.0172
	10	0.0232/3.0696e-023	0.0204/3.0696e-023	0.0238/3.0696e-023	0.0243/3.0696e-023
	15	0.0293/3.6788e-022	0.0278/3.6789e-022	0.0287/3.6789e-022	0.0236/3.6789e-022
PEN2	50	0.4693/4.2961	0.7731/4.2961	0.7405/4.2961	0.7957/4.2961
	100	0.5403/9.7096e+004	0.3681/9.7096e+004	0.3630/9.7096e+004	NaN/NaN
PEN1	100	0.6742/9.0249e-004	0.5775/9.0249e-004	0.5835/9.0249e-004	0.7409/9.0249e-004
	200	0.9532/0.0019	1.0959/0.0019	1.1569/0.0019	1.4632/0.0019
TRIG	100	1.5819/1.8410e-006	0.4199/1.8410e-006	0.4198/2.4054e-006	0.5638/2.4054e-006
	200	8.5504/1.0051e-006	2.2576/1.1542e-006	2.1100/1.1542e-006	3.2786/1.1542e-006
ROSEX	500	2.6506/3.8000e-013	1.0759/1.4603e-015	1.0106/1.3152e-017	1.0745/1.2669e-018
	1000	8.8417/4.6361e-014	3.4025/2.9207e-015	3.2630/2.6306e-017	3.5120/2.5357e-018
SINGX	500	42.2934/5.6371e-010	5.0378/1.1681e-009	7.2480/3.5500e-009	NaN/NaN
	1000	214.4327/3.4856e-010	12.1707/9.0345e-009	27.5978/2.1208e-009	NaN/NaN
BV	500	133.0830/6.6537e-009	17.1536/9.5771e-009	14.4972/9.7081e-009	4.6370/9.9778e-009
	1000	45.0169/1.2061e-013	4.0786/1.2746e-009	3.3512/1.2785e-009	1.6639/1.2855e-009
IE	500	1.7261/1.6640e-013	1.7031/5.7919e-015	1.6849/5.7919e-015	1.6779/5.7919e-015
	1000	7.5628/5.5450e-015	6.6030/1.1579e-014	6.6119/1.1579e-014	6.5787/1.1579e-014
TRID	500	0.9034/9.6202e-015	0.5738/8.3162e-015	0.6115/3.6844e-015	0.6644/1.7255e-014
	1000	3.4754/1.3117e-014	1.8974/1.0050e-014	1.9121/8.1859e-015	2.3888/5.3085e-015
BAND	500	0.5395/18000	0.4604/18000	0.4784/18000	0.4546/18000
	1000	1.6907/36000	1.6592/36000	1.6914/36000	1.5831/36000
LIN0	50(m = 100)	0.0669/100	0.0697/100	0.0638/100	0.0580/100
	100(m = 200)	0.1568/100	0.1454/100	0.1465/100	0.1385/100
LIN1	100(m = 200)	0.6836/49.6259	0.6834/49.6259	0.6936/49.6259	0.6898/49.6259
	200(m = 300)	1.5425/74.6256	1.4989/74.6256	1.5002/74.6256	1.5013/74.6256
LIN	500(m = 600)	0.6754/51.1259	0.6794/51.1259	0.6768/51.1259	0.6633/51.1259
	1000(m = 1100)	0.3143/26.1269	0.3174/26.1269	0.2395/26.1269	0.3113/26.1269

表 4.3 FR, MFR1, MFR2, MFR3 方法相对效率

FR	MFR1	MFR2	MFR3
1	0.5542	0.5969	0.8794

致谢 感谢审稿专家和编辑部老师对本文提出的宝贵意见.

参 考 文 献

- [1] Fletcher R, Reeves C. Function Minimization by Conjugate Gradients. *Computer Journal*, 1964, 7(2): 149–154
- [2] Zoutendijk G. Nonlinear Programming, Computational Methods. In: J. Abadie ed., Integer and Nonlinear Programming, North-Holland, 1970, 37–86
- [3] Al-Baali M. Descent Property and Global Convergence of the Fletcher-Reeves Method with Inexact Line Search. *IMA J. Numer. Anal.*, 1985, 5(1): 121–124
- [4] Liu G H, Han J Y, Yin H X. Global Convergence of the Fletcher-Reeves Algorithm with an Inexact Line Search. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B*, 1995, 10(2): 75–82
- [5] Dai Y H, Yuan Y. Convergence Properties of the Fletcher-Reeves Method. *IMA J. Numer. Anal.*, 1996, 16(2): 155–164
- [6] Moré J J, Garbow B S, Hillstrome K E. Testing Unconstrained Optimization Software. *ACM Trans. Math. Software*, 1981, 7(1): 17–41
- [7] 莫降涛, 顾能柱, 韦增欣. 修正 PRP 共轭梯度法的全局收敛性及其数值实验. *数值计算与计算机应用*, 2007, 3(1): 56–62
(Mo Jiangtao, Gu Nengzhu, Wei Zengxin. Global Convergence of A Modified PRP Conjugate Gradient Method and Its Numerical Results. *Journal On Numerical Methods and Computer Applications*, 2007, 3(1): 56–62)
- [8] Dolan E D, Moré J J. Benchmarking Optimization Software with Performance Profiles. *Mathematical Programming*, 2001, 91(2): 201–213

Convergence of a Class of Modified Fletcher-Reeves Methods Under the General Wolfe Line Search

LIU JINKUI

(*School of Mathematics and Statistics, Chongqing Three Gorges University, Chongqing 404100*)

(*E-mail: liujinkui2006@126.com*)

Abstract In this paper, a class of modified Fletcher-Reeves conjugate gradient methods is proposed on the basic of Fletcher-Reeves conjugate gradient method, which has the sufficient descent property and global convergence under the general Wolfe line search. Numerical experiments show that the new methods substantially outperform Fletcher-Reeves method for the given test problems.

Key words unconstrained optimization; conjugate gradient method;
sufficient descent property; general Wolfe line search; global convergence

MR(2000) Subject Classification 65K; 90C

Chinese Library Classification O224