第 36 卷 第 6 期　　应 用 数 学 学 报　　Vol. 36 No. 6
2013 年 11 月　　ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA　　Nov., 2013

奇异半正 Sturm-Liouville 边值问题的多个正解 *

张兴秋

(聊城大学数学科学学院，聊城 252059)

(E-mail: zhxq197508@163.com)

摘　要　通过构造锥，利用不动点指数理论获得了奇异半正 Sturm-Liouville 边值问题多个正解的存在性结果, 并讨论了解与 Green 函数的关系. 本文最后给出具体例子说明本文结果的应用.

关键词　多个正解；锥；不动点指数；奇异性

MR(2000) 主题分类　34B15; 34B16; 34B18

中图分类　O175.8

1　引言

本文研究 Sturm-Liouville 边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x(t))=0, & 0<t<1, \\ \alpha x(0)-\beta x'(0)=0, & \gamma x(1)+\delta x'(1)=0 \end{cases} \tag{1}$$

多个正解的存在性，其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为非负常数， $\Delta=\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma>0$, $\beta\delta=0$, 非线性项 $f(t,x)$ 满足条件

$$(\mathrm{H}_0)\quad \phi_0(t)h_0(x)-p(t)\le f(t,x)\le \phi(t)(g(x)+h(x)),$$

这里 $\phi_0,\phi\in C(J,R_+)$, $g\in(R_+,R_+)$, $h_0,h\in C(R^+,R^+)$, $J=(0,1)$, $I=[0,1]$, $R=(-\infty,+\infty)$, $R_+=(0,+\infty)$, $R^+=[0,+\infty)$, $p:J\to R$ 为 Lebesgue 可积函数，允许在 I 内有限个点处具有奇异性. 非线性项 $f(t,x)$ 不仅允许在点 $t=0,1$ 处奇异，而且还允许在点 $x=0$ 处具有奇异性. 由 (H_0) 可知， f 可以取负值，故本文研究的为半正问题.

本文 2011 年 9 月 20 日收到. 2012 年 1 月 11 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (10971179, 11371221, 11071141); 山东省优秀中青年科学家奖励基金 (BS2010SF004); 山东省高校科技发展计划 (J10LA53, J11LA02) 和中国博士后科学基金 (20110491154) 资助项目.

当非线性项 f 非负时， BVP (1) 的正解的存在性获得了广泛关注，见 [1–3] 及其相关文献. 需要特别指出的是， [4] 在类似于条件 (H_0) 中对非线性项所加上控制条件下，研究了奇异共轭、聚焦、(n,p) 问题正解的存在性. 半正问题多来源于化学反应等实际问题. 从应用的角度来讲，人们通常关心半正问题正解的存在性. 近年来， BVP (1) 在非线性项半正时，正解的存在性日益引起广泛关注. 当 $\beta=\gamma=0$, BVP (1) 为 Dirichlet 边值问题. [5–8] 研究了半正 Dirichlet 边值问题一个、两个正解的存在性. 对于更一般的二阶微分算子，利用局部化思想，通过构造与非线性项有关的辅助函数，并考察辅助函数在有界集上的性质，姚庆六 [9] 获得了奇异半正 Sturm-Liouville 边值问题 n 个正解的存在性；通过考察非线性项在无穷远处的极限增长函数的积分，利用锥上的 Krasnosel'skii 不动点定理，姚庆六 [10] 得到了半正 Sturm-Liouville 边值条件下特征值问题一个正解的存在性结果；利用拓扑方法，李红玉和孙经先 [11,12] 分别研究了次线性和超线性条件下 Sturm-Liouville 边值问题正解的全局结构；此外，还有些文献，如 [14–17] 研究了半正微分方程组正解的存在性.

最近， [18] 在条件 (H_0) 满足时，通过对非线性项进行上下控制，利用 [19] 提供的平移变换思想得到了半正三点边值问题

$$\begin{cases} y''+f(t,y)=0, & 0<t<1, \\ y(0)=0, & \alpha y(\eta)=y(1) \end{cases}$$

多个正解的存在性结果，其中 $0<\alpha,\eta<1, \alpha\eta<1$. 受上述文献启发，本文目的是利用不动点指数理论获得奇异半正 Sturm-Liouville 边值问题多个正解的存在性结果，并研究其解与格林函数的关系.

如果函数 $x\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$ 满足边值问题 (1) 且 $x(t)>0,\ t\in(0,1)$, 则称其为边值问题 (1) 的一个正解.

2　引理

记

$$G(t,s)=\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}(\beta+\alpha s)(\delta+\gamma(1-t)), & 0\le s\le t\le 1, \\ \dfrac{1}{\Delta}(\beta+\alpha t)(\delta+\gamma(1-s)), & 0\le t\le s\le 1, \end{cases}$$

$$e(t)=G(t,t)=\frac{1}{\Delta}(\beta+\alpha t)(\delta+\gamma(1-t)), \qquad t\in I.$$

显然，

$$e(t)e(s)\le G(t,s)\le e(t), \qquad \forall\, t,s\in I. \tag{2}$$

本文使用如下假设.

(H_1)　$g:R_+\to R_+$ 连续非增， $h_0,h:R^+\to R^+$ 连续非减；

(H_2) 对任意正常数 k_0, 有

$$\int_0^1 \phi(s)g(k_0e_1(s))+\phi(s)+p(s)\mathrm{d}s<+\infty,$$

其中， $e_1(s)=s(1-s)$;

(H_3) 存在 $R_0\geq 2c_1$ 满足

$$\frac{g(R_0)}{g(R_0)+h(R_0+1)+1}\int_0^{R_0}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\tau/2)}>\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s,$$

其中， $c_1=\int_0^1 p(t)\mathrm{d}t$;

(H_4) 存在区间 $[\alpha_0,\beta_0]\subset(0,1)$, $u_1>R_0$ 满足

$$\Lambda_0h_0\Big(\frac{1}{2}u_1\Big)\int_{\alpha_0}^{\beta_0}e(s)\phi_0(s)\mathrm{d}s>u_1,$$

其中， $\Lambda_0=\min\{e(\alpha_0),e(\beta_0)\}$.

本文使用的基本空间为 $C[0,1]$, 按最大值范数 $\|x\|=\max\limits_{t\in I}|x(t)|$, $\forall x\in C[0,1]$, 它成为一个 Banach 空间．令 $P=\{x|x\in C[0,1],\ x(t)\geq 0,\ \forall t\in I\}$, $Q=\big\{x|x\in P,\ x(t)\geq e(t)\|x\|\big\}$. 显然， P 和 Q 是 $C[0,1]$ 中的两个锥．令

$$[x(t)]^{\bigstar}=\max\Big\{x(t)-w(t),\frac{1}{2}R_0e(t)\Big\},\qquad \forall x\in P,$$

其中,

$$w(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s,\qquad t\in I.$$

易知,

$$w(t)=\int_0^1 G(t,s)p(s)\mathrm{d}s\leq\int_0^1 e(t)p(s)\mathrm{d}s=c_1e(t). \tag{3}$$

对任意正整数 n, 定义算子 $T_n:P\to C[0,1]$ 如下

$$(T_nx)(t)=\int_0^1 G(t,s)\big[f(s,[x(s)]^{\bigstar}+n^{-1})+p(s)\big]\,\mathrm{d}s,\qquad t\in I. \tag{4}$$

引理 1[20] 设 X 是实 Banach 空间 E 的一个收缩核， X_1 是 X 的一个有界凸收缩核， U 是 X 的非空开集且 $U\subset X_1$. 又设 $A:X_1\to X$ 全连续， $A(X_1)\subset X_1$, 并且 A 在 $X_1\backslash U$ 上没有不动点，则必有 $i(A,U,X)=1$.

引理 2[20] 设 E 实 Banach 空间， P 是 E 中的一个锥．对任意 $r>0$, 定义 $P_r=\{x\in P|\|x\|<r\}$. 又设 $A:\overline{P}_r\to P$ 全连续，满足 $Ax\neq x$, $\forall x\in\partial P_r=\{x\in P|\|x\|=r\}$.

(i) 如果 $\|Ax\|\geq\|x\|$, $\forall x\in\partial P_r$, 那么

$$i(A,P_r,P)=0;$$

(ii) 如果 $\|Ax\| \le \|x\|$, $\forall\, x \in \partial P_r$, 那么

$$i(A, P_r, P) = 1.$$

引理 3 假设条件 (H_0)–(H_2) 成立，则对每个正整数 n, $T_n : P \to Q$ 全连续.

证　首先证明 $T_n : P \to Q$. 设 n 为任一固定的正整数，对于任意 $x \in P$, 由 (2) 式得

$$\begin{aligned}(T_n x)(t) &= \int_0^1 G(t,s)\big[f(s,[x(s)]^\star + n^{-1}) + p(s)\big]\mathrm{d}s\\ &\le \int_0^1 e(s)[f(s,[x(s)]^\star + n^{-1}) + p(s)]\mathrm{d}s, \qquad t \in I,\end{aligned}$$

即

$$\|T_n x\| \le \int_0^1 e(s)\big[f(s,[x(s)]^\star + n^{-1}) + p(s)\big]\mathrm{d}s. \tag{5}$$

再次根据 (2) 式，我们有

$$(T_n x)(t) \ge \int_0^1 e(t)e(s)\big[f(s,[x(s)]^\star + n^{-1}) + p(s)\big]\,\mathrm{d}s \ge e(t)\|T_n x\|, \qquad t \in I.$$

于是， T_n 映 P 入 Q.

其次，证明对每个正整数 n, T_n 全连续． T_n 的连续性和有界性易知，下面说明 T_n 是紧算子. 设 $D \subset P$ 为有界集，不失一般性，我们设存在 $L > 0$, 使得 $\|x\| \le L$, $\forall\, x \in D$. 令 $M_n = (g(n^{-1}) + h(L + \|w\| + R_0\|e\| + 1))$, 则对于任意 $x \in D$, 我们有

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_n x)(t)\Big| =& \Big|\int_0^t -\frac{\gamma}{\Delta}(\beta + \alpha s)\big[f(s,[x(s)]^\star + n^{-1}) + p(s)\big]\mathrm{d}s\\ &+ \int_t^1 \frac{\alpha}{\Delta}(\delta + \gamma(1-s))\big[f(s,[x(s)]^\star + n^{-1}) + p(s)\big]\,\mathrm{d}s\Big|\\ \le& \int_0^t \frac{\gamma}{\Delta}(\beta + \alpha s)\big[\phi(s)(g(n^{-1}) + h(L + \|w\| + R_0\|e\| + 1)) + p(s)\big]\mathrm{d}s\\ &+ \int_t^1 \frac{\alpha}{\Delta}(\delta + \gamma(1-s))\big[\phi(s)(g(n^{-1}) + h(L + \|w\| + R_0\|e\| + 1)) + p(s)\big]\mathrm{d}s\\ =& \int_0^t \frac{\gamma}{\Delta}(\beta + \alpha s)(M_n\phi(s) + p(s))\mathrm{d}s + \int_t^1 \frac{\alpha}{\Delta}(\delta + \gamma(1-s))(M_n\phi(s) + p(s))\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

交换积分次序并利用条件 (H_2) 得

$$\begin{aligned}&\int_0^1\int_0^t M_n\phi(s) + p(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \le \int_0^1 (1-s)(M_n\phi(s) + p(s))\mathrm{d}s < +\infty,\\ &\int_0^1\int_t^1 M_n\phi(s) + p(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}t \le \int_0^1 s(M_n\phi(s) + p(s))\mathrm{d}s < +\infty,\\ &\int_0^1\int_0^t s(M_n\phi(s) + p(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t \le \int_0^1 s(1-s)(M_n\phi(s) + p(s))\mathrm{d}s < +\infty,\\ &\int_0^1\int_t^1 (1-s)(M_n\phi(s) + p(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t \le \int_0^1 s(1-s)(M_n\phi(s) + p(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}t < +\infty.\end{aligned}$$

所以，对任意 $x\in D$, 我们有

$$0\le\int_0^1\Big|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T_nx)(t)\Big|\mathrm{d}t<+\infty.$$

利用积分的绝对连续性知 $T_n(D)$ 在 $[0,1]$ 上等度连续. 由 Ascoli-Arzela 定理知 $T_n(D)$ 为 $[0,1]$ 上的相对紧集. 因此，对每个正整数 n, $T_n:P\to Q$ 为全连续算子.

引理 4 假设条件 (H_0)–(H_3) 满足，则对任意正整数 n 有

$$i(T_n,\Omega_0,Q)=1,$$

其中 $\Omega_0=\{x\in Q|\|x\|<R_0\}$.

证 由引理 3 知，对每个正整数 $n,T_n:P\to Q$ 全连续. 断言

$$z\ne\mu T_nz,\qquad \mu\in[0,1],\qquad z\in\partial\Omega_0. \tag{6}$$

否则，存在 $\mu_0\in I,\ n_0\in N,\ z_0\in\partial\Omega_0$ 使得 $z_0=\mu_0T_{n_0}z_0$. 由 $z_0\in Q$ 得

$$z_0(t)\ge\|z_0\|e(t),\qquad t\in I. \tag{7}$$

又，显然有

$$w(t)=\int_0^1G(t,s)p(s)\mathrm{d}s\le\int_0^1e(t)p(s)\mathrm{d}s=c_1e(t). \tag{8}$$

故，

$$w(t)\le c_1e(t)\le\frac{c_1}{R_0}z_0(t),\qquad \forall\,t\in I.$$

因此，

$$z_0(t)-w(t)\ge(1-\frac{c_1}{R_0})z_0(t)\ge\frac12z_0(t)\ge\frac12R_0e(t),\qquad \forall\,t\in I. \tag{9}$$

于是，

$$[z_0(t)]^\star=\max\Big\{z_0(t)-w(t),\frac12R_0e(t)\Big\}=z_0(t)-w(t). \tag{10}$$

通过简单计算可得

$$\begin{cases}z_0''(t)+\mu_0[f(t,z_0(t)-w(t)+n_0^{-1})+p(t)]=0,\qquad t\in I,\\ \alpha z_0(0)-\beta z_0'(0)=0,\qquad \gamma z_0(1)+\delta z_0'(1)=0.\end{cases} \tag{11}$$

由 (11) 式得 $z_0''(t)\le0,\ t\in J$. 因此， $z_0(t)$ 为 I 上的凹函数. 由 (9), (11), (H_0) 及 (H_1) 知

$$\begin{aligned}-z_0''(t)\le&\phi(t)[g(z_0(t)-w(t)+n_0^{-1})+h(z_0(t)-w(t)+n_0^{-1})]+p(t)\\ \le&\phi(t)g\Big(\frac12z_0(t)\Big)\frac{g(R_0)+h(R_0+1)}{g(R_0)}+p(t),\qquad t\in(0,1).\end{aligned} \tag{12}$$

注意到 $\beta\delta=0$, 下面分情形讨论.

• 情形 (a). $\beta=0$. 此时，注意到 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 是非负常数， $\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma>0$, 易知 $\alpha\ne0,\ z_0(0)=0$. 考虑到 $z_0(t)$ 为凹的正解，我们有 $z_0'(0)>0$. 下面分两种情形讨论.

• 情形 (a_1). 如果对任意 $t_0\in(0,1)$ 都有 $z_0(t_0)\neq\|z_0\|$. 此时，显然有 $\|z_0\|=z_0(1)$ 且 $z_0'(t)>0,\ t\in(0,1)$. 断言 $z_0'(1)=0$.

否则，若 $z_0'(1)<0$, 则存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $z_0'(t_0)=0$, 这与题设矛盾；若 $z_0'(1)>0,\ \delta=0$, 则 $z_0(1)=0$. 因 $z_0(0)=0$, 故存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $z_0'(t_0)=0$, 这与题设矛盾；若 $z_0'(1)>0,\ \delta\neq0$, 则 $z_0(1)<0$, 这与 $z_0(t)$ 的非负性矛盾. 由于 $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 非增， $z_0(t)$ 在 $(t,1)$ 非减，将 (12) 式从 t 到 1 积分得

$$z_0'(t)\leq g(\frac{1}{2}z_0(t))\frac{g(R_0)+h(R_0+1)}{g(R_0)}\int_t^1\phi(s)\mathrm{d}s+\int_t^1p(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$\frac{z_0'(t)}{g(\frac{1}{2}z_0(t))}\leq\frac{g(R_0)+h(R_0+1)+1}{g(R_0)}\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s. \tag{13}$$

再将 (13) 式从 0 到 1 积分得

$$\int_0^{z_0(1)}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}\leq\frac{g(R_0)+h(R_0+1)+1}{g(R_0)}\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s. \tag{14}$$

因 $z_0(1)=R_0$, 由 (14) 式，我们有

$$\int_0^{R_0}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}\cdot\frac{g(R_0)}{g(R_0)+h(R_0+1)+1}\leq\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s.$$

• 情形 (a_2). 存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $z_0'(t_0)=0$. 易知，

$$z_0'(t)\geq0,\quad t\in(0,t_0),\quad z_0'(t)\leq0,\quad t\in(t_0,1),\quad \|z_0\|=z_0(t_0).$$

由于 $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 非增， $z_0(t)$ 在 (t,t_0) 上非减，将 (12) 式从 t $(t\in(0,t_0))$ 到 t_0 积分得

$$z_0'(t)\leq g\Big(\frac{1}{2}z_0(t)\Big)\frac{g(R_0)+h(R_0+1)}{g(R_0)}\int_t^{t_0}\phi(s)\mathrm{d}s+\int_t^{t_0}p(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$\frac{z_0'(t)}{g(\frac{1}{2}z_0(t))}\leq\frac{g(R_0)+h(R_0+1)+1}{g(R_0)}\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s. \tag{15}$$

再将 (15) 式从 0 到 t_0 积分得

$$\int_0^{z_0(t_0)}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}\leq\frac{g(R_0)+h(R_0+1)+1}{g(R_0)}\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s. \tag{16}$$

因 $z_0(t_0)=R_0$, 由 (15) 式，我们有

$$\int_0^{R_0}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}\cdot\frac{g(R_0)}{g(R_0)+h(R_0+1)+1}\leq\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s.$$

• 情形 (b). $\delta=0$. 此时， $z_0(1)=0$.

若 $\delta=\beta=0$, 则 $z_0(0)=z_0(1)=0$. 这种情形已包含在情形 (a_2) 中.

若 $\delta=0,\ \beta\neq 0$, 则 $z_0'(0)\geq 0$. 否则，如果 $z_0'(0)<0$, 那么 $z_0(0)<0$, 这与 $z_0(t)$ 的非负性矛盾．下面分两种情形讨论.

• 情形 (b_1). $z_0'(0)=0$. 此时有 $z_0(0)>0$. 否则，若 $z_0(0)=0$, 注意到 $z_0(t)$ 的凹性，我们有 $z_0(t)<0,\ t\in(0,1]$, 这与 $z_0(t)$ 的非负性矛盾．因此，

$$\|z_0\|=z_0(0)\quad 且\quad z_0'(t)<0,\qquad t\in(0,1).$$

由于 $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 非增， $z_0(t)$ 在 $(0,t)$ 上非增，将 (12) 式从 0 到 t 积分得

$$-z_0'(t)\leq g\Big(\frac{1}{2}z_0(t)\Big)\frac{g(R_0)+h(R_0+1)}{g(R_0)}\int_0^t\phi(s)\mathrm{d}s+\int_0^t p(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$\frac{-z_0'(t)}{g(\frac{1}{2}z_0(t))}\leq\frac{g(R_0)+h(R_0+1)+1}{g(R_0)}\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s. \tag{17}$$

再将 (17) 式从 0 到 1 积分，我们有

$$\int_{z_0(0)}^{z_0(1)}-\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}=\int_0^{R_0}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}\leq\frac{g(R_0)+h(R_0+1)+1}{g(R_0)}\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s. \tag{18}$$

于是，

$$\int_0^{R_0}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}\cdot\frac{g(R_0)}{g(R_0)+h(R_0+1)+1}\leq\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s.$$

• 情形 (b_2). $z_0'(0)>0$. 如果 $z_0(0)=0$, 那么这种情形已包含在情形 (a_2) 中．不失一般性，设 $z_0(0)>0$. 此时，存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $z_0'(t_0)=0,\ z_0(t_0)=R_0=\|z_0\|$. 易知

$$z_0'(t)\geq 0,\qquad t\in(0,t_0);\qquad z_0'(t)\leq 0,\qquad t\in(t_0,1).$$

由于 $g:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ 非增， $z_0(t)$ 在 $(t_0,1)$ 上非增，将 (12) 式从 t_0 到 t $(t\in(t_0,1))$ 积分得

$$-z_0'(t)\leq g(\frac{1}{2}z_0(t))\frac{g(R_0)+h(R_0+1)}{g(R_0)}\int_{t_0}^t\phi(s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s,$$

即

$$\frac{-z_0'(t)}{g(\frac{1}{2}z_0(t))}\leq\frac{g(R_0)+h(R_0+1)+1}{g(R_0)}\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s. \tag{19}$$

再将 (19) 式从 t_0 到 1 积分，我们有

$$\int_{z_0(t_0)}^{z_0(1)}-\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}=\int_0^{R_0}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}\leq\frac{g(R_0)+h(R_0+1)+1}{g(R_0)}\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s. \tag{20}$$

于是，

$$\int_0^{R_0}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}\cdot\frac{g(R_0)}{g(R_0)+h(R_0+1)+1}\leq\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s.$$

综上，我们有

$$\int_0^{R_0}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\frac{1}{2}\tau)}\cdot\frac{g(R_0)}{g(R_0)+h(R_0+1)+1}\le\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s,$$

与条件 (H_3) 矛盾．因此， (6) 式成立．由不动点指数的性质知引理成立．

3 主要结果

定理 1 设条件 (H_0)–(H_4) 成立，此外还成立

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{x}=0. \tag{21}$$

则边值问题 (1) 至少有两个正解 x_i^*, 满足 $x_i^*(t)\ge m_ie(t),\ t\in I,\ m_i>0\ (i=1,2)$.

证　对每个正整数 n, 由引理 3 知 T_n 全连续．由条件 (H_4), 存在 $\widetilde{u}_1>u_1$ 使得

$$\Lambda_0h_0(\frac{1}{2}\widetilde{u}_1)\int_{\alpha_0}^{\beta_0}e(s)\phi_0(s)\mathrm{d}s>\widetilde{u}_1. \tag{22}$$

设 m 满足

$$0<m<\Big(\int_0^1e(s)\phi(s)\mathrm{d}s\Big)^{-1}.$$

由 (21) 式，存在 $\overline{R}>\widetilde{u}_1$ 满足

$$h(x)\le mx,\qquad\forall\,x\ge\overline{R}. \tag{23}$$

设

$$R_1=\max\Big\{2\overline{R},\ \frac{\int_0^1e(s)[\phi(s)(g(\frac{1}{2}R_0e(s))+m(\|w\|+R_0\|e\|+1))+p(s)]}{1-m\int_0^1e(s)\phi(s)\mathrm{d}s}\Big\}. \tag{24}$$

设 Ω_0 如引理 4 所定义， $\Omega_1,\Omega_{01},U_{01}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}&\Omega_1=\{x\in Q|\|x\|<R_1\},\\&\Omega_{01}=\Big\{x\in Q|\|x\|<R_1\text{ 且 }\inf_{t\in[\alpha_0,\beta_0]}x(t)>u_1\Big\},\\&U_{01}=\Big\{x\in Q|\|x\|<R_1\text{ 且 }\inf_{t\in[\alpha_0,\beta_0]}x(t)>\widetilde{u}_1\Big\}.\end{aligned}$$

易知， $\Omega_0,\Omega_1,\Omega_{01},U_{01}$ 是 Ω 中有界凸开集，且

$$\Omega_0\subset\Omega_1,\quad\Omega_{01}\subset\Omega_1,\quad U_{01}\subset\Omega_1,\quad U_{01}\subset\Omega_{01},\quad\Omega_0\cap\Omega_{01}=\emptyset.$$

对于任意 $x \in \overline{\Omega}_1$, 由 (23) 和 (24) 两式知

$$\begin{aligned}
(T_nx)(t) &= \int_0^1 G(t,s)[f(s,[x(s)]^\bigstar + n^{-1}) + p(s)]\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^1 e(s)[f(s,[x(s)]^\bigstar + n^{-1}) + p(s)]\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^1 e(s)[\phi(s)(g([x(s)]^\bigstar) + h([x(s)]^\bigstar + 1)) + p(s)]\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^1 e(s)\Big[\phi(s)\Big(g\Big(\frac{1}{2}R_0e(s)\Big) + h(R_1 + \|w\| + R_0\|e\| + 1)\Big) + p(s)\Big]\mathrm{d}s \\
&\le \int_0^1 e(s)\Big[\phi(s)\Big(g\Big(\frac{1}{2}R_0e(s)\Big) + m(R_1 + \|w\| + R_0\|e\| + 1)\Big) + p(s)\Big]\mathrm{d}s \\
&< R_1, \qquad \forall\, t \in I.
\end{aligned} \tag{25}$$

因此, $\|T_nx\| \le R_1,\ \forall\, x \in \overline{\Omega}_1$. 于是，我们证明了 $T_n(\overline{\Omega}_1) \subset \overline{\Omega}_1$. 根据引理 1, 对每个正整数 n, 我们有

$$i(T_n, \Omega_1, Q) = 1. \tag{26}$$

由 (25) 知, $\|T_nx\| \le R_1,\ x \in \overline{\Omega}_1$. 对任意 $x \in \overline{\Omega}_1$, 我们有

$$x(t) - w(t) \ge x(t) - c_1e(t) \ge x(t) - \frac{R_0}{2}e(t) \ge x(t) - \frac{x(t)}{2} = \frac{x(t)}{2}. \tag{27}$$

于是,

$$[x(t)]^\bigstar = \max\Big\{x(t) - w(t),\ \frac{1}{2}R_0e(t)\Big\} = x(t) - w(t).$$

由 (27) 式，我们得

$$[x(t)]^\bigstar \ge \frac{x(t)}{2} \ge \frac{u_1}{2}, \qquad t \in [\alpha_0, \beta_0].$$

因此，对任意 $x \in \overline{\Omega}_1$ 有

$$\begin{aligned}
(T_nx)(\alpha_0) &= \int_0^1 G(\alpha_0,s)[f(s,[x(s)]^\bigstar + n^{-1}) + p(s)]\mathrm{d}s \\
&\ge \int_{\alpha_0}^{\beta_0} e(\alpha_0)e(s)\phi_0(s)h_0([x(s)]^\bigstar)\mathrm{d}s \\
&\ge \Lambda_0 h_0\Big(\frac{1}{2}u_1\Big)\int_{\alpha_0}^{\beta_0} e(s)\phi_0(s)\mathrm{d}s > u_1,
\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}
(T_nx)(\beta_0) &= \int_0^1 G(\beta_0,s)[f(s,[x(s)]^\bigstar + n^{-1}) + p(s)]\mathrm{d}s \\
&\ge \int_{\alpha_0}^{\beta_0} e(\beta_0)e(s)\phi_0(s)h_0([x(s)]^\bigstar)\mathrm{d}s \\
&\ge \Lambda_0 h_0\Big(\frac{1}{2}u_1\Big)\int_{\alpha_0}^{\beta_0} e(s)\phi_0(s)\mathrm{d}s > u_1.
\end{aligned} \tag{29}$$

由于 $T_nx(t)$ 是 $[0,1]$ 上的凹函数，根据 (28) 和 (29) 两式知，对于任意 $x\in\overline{\Omega}_1$ 有

$$(T_nx)(t)\geq \min\big\{(T_nx)(\alpha_0),(T_nx)(\beta_0)\big\}>u_1,\qquad \forall\, t\in[\alpha_0,\beta_0],$$

这说明 $T_n(\overline{\Omega}_{01})\subset\overline{\Omega}_{01}$. 由引理 1 得

$$i(T_n,\Omega_{01},Q)=1. \tag{30}$$

类似可证

$$i(T_n,U_{01},Q)=1. \tag{31}$$

对任意正整数 n, 由 (26), (30) 及引理 4 得

$$i(T_n,\Omega_1\backslash(\overline{\Omega}_{01}\cup\overline{\Omega}_0),Q)=i(T_n,\Omega_1,Q)-i(T_n,\Omega_{01},Q)-i(T_n,\Omega_0,Q)=-1.$$

故， T_n 至少有一个不动点 $x_{n1}\in\Omega_1\backslash(\overline{\Omega}_{01}\cup\overline{\Omega}_0)$. 显然， x_{n1} 满足

$$\begin{cases} x''_{n1}(t)+f(t,[x_{n1}]^{\bigstar}+n^{-1})+p(t)=0, \qquad t\in I,\\ \alpha x_{n1}(0)-\beta x'_{n1}(0)=0, \qquad \gamma x_{n1}(1)+\delta x'_{n1}(1)=0.\end{cases}$$

类似于引理 4 的证明过程，由条件 (H_2), 我们有

$$\begin{aligned}|x'_{n1}(t)|&\leq\int_0^1\big[\phi(s)(g([x_{n1}(s)]^{\bigstar})+h([x_{n1}(s)]^{\bigstar}+n^{-1}))+p(s)\big]\mathrm{d}s\\ &\leq\int_0^1\Big[\phi(s)\Big(g\Big(\frac{1}{2}R_0e(s)\Big)+h(R_1+\|w\|+R_0\|e\|+1)\Big)+p(s)\Big]\mathrm{d}s\\ &<+\infty,\qquad\forall\, t\in I.\end{aligned} \tag{32}$$

由积分的绝对连续性可知 $\{x_{n1}\}$ 为 $[0,1]$ 上的等度连续集. 对于任意 $x_{n1}\in\Omega_1\backslash(\overline{\Omega}_{01}\cup\overline{\Omega}_0)$, 至少存在一点 $t_n\in[\alpha_0,\beta_0]$ 满足 $x_{n1}(t_n)\leq u_1$. 由 Ascoli-Arzela 定理及 $\{t_n\}$ 的有界性可知，存在 $\{x_{n1}\}$ 的子列 $\{x_{n_i1}\}$, 函数 $x_1\in\overline{\Omega_1\backslash(\overline{\Omega}_{01}\cup\overline{\Omega}_0)}$ 以及点 $t_0\in[\alpha_0,\beta_0]$ 满足 $x_{n_i1}\to x_1$, $i\to+\infty$, $x_1(t_0)\leq u_1$. 注意到 $\|x_1\|\geq R_0$, 类似于 (10) 的证明可得

$$[x_1(t)]^{\bigstar}=x_1(t)-w(t)\geq\frac{1}{2}R_0e(t). \tag{33}$$

由于 $x_{n_i1}=T_nx_{n_i1}$, 利用 (33), (H_2) 和 Lebesgue 控制收敛定理，我们有

$$x_1(t)=\int_0^1G(t,s)[f(s,x_1(s)-w(s))+p(s)]\mathrm{d}s,\qquad t\in I. \tag{34}$$

令 $x_1^*=x_1-w$. 由 (34) 得

$$x_1^*(t)=\int_0^1G(t,s)f(s,x_1^*(s)),\qquad t\in I,$$

此式说明 x_1^* 是 BVP (1) 的一个正解. 因为 $x_1\in Q$, 由 (27) 式得

$$x_1^*(t)=x_1(t)-w(t)\geq\frac{1}{2}x_1(t)\geq\frac{1}{2}\|x_1\|e(t),\qquad t\in I. \tag{35}$$

对于每个正整数 n, 由 (25) 式可知 T_n 至少有一个正解 $x_{n2}\in U_{0,1}$. 类似于上述讨论，存在 $\{x_{n2}\}$ 的子列 $\{x_{n_i2}\}$, 函数 $x_2\in\overline{U}_{01}$ 满足 $x_{n_i2}\to x_2$, $i\to+\infty$. 显然,

$$x_2(t)\geq\widetilde{u}_1(t),\qquad t\in[\alpha_0,\beta_0].$$

令 $x_2^*=x_2-w$, 则 x_2^* 是 BVP (1) 的一个正解. 类似于 (35) 式，我们有

$$x_2^*(t)=x_2(t)-w(t)\geq\frac{1}{2}x_2(t)\geq\frac{1}{2}\|x_2\|e(t),\qquad t\in I.\tag{36}$$

因为

$$x_1(t_0)\leq u_1\leq\widetilde{u}_1\leq x_2(t_0),$$

所以， x_1^*,x_2^* 是 BVP (1) 的两个不同的正解. 取 $m_i=\frac{1}{2}\|x_i\|$ $(i=0,1)$. 由 (35) 和 (36) 两式知 $x_i^*(t)\geq m_ie(t)$, $t\in I$, $m_i>0$ $(i=1,2)$.

定理 2 设条件 (H_0)-(H_4) 成立. 此外，存在 $R_1>u_1$ 使得

$$\int_0^1e(s)\Big[\phi(s)\Big(g\Big(\frac{1}{2}R_0e(s)\Big)+h(R_1+\|w\|+R_0\|e\|+1)\Big)+p(s)\Big]\mathrm{d}s<R_1,\tag{37}$$

且成立

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h_0(x)}{x}=+\infty,\tag{38}$$

则 BVP (1) 至少存在三个正解 x_i^* 满足 $x_i^*(t)\geq m_ie(t)$, $t\in I$, $m_i>0$ $(i=1,2,3)$.

证 设算子 T_n 以及开集 $\Omega_0,\Omega_1,\Omega_{01},U_{01}$ 如定理 1 所定义. 显然有

$$R_1+\|w\|+R_0\|e\|\geq[x(t)]^\star\geq\frac{1}{2}R_0e(t),\qquad\forall\,x\in\overline{\Omega}_1,\ \ \forall\,t\in I.$$

因此，对任意 $x\in\overline{\Omega}_1$, 由 (37) 式，我们有

$$|(T_nx)(t)|\leq\int_0^1e(s)\Big[\phi(s)\Big(g\Big(\frac{1}{2}R_0e(s)\Big)+h(R_1+\|w\|+R_0\|e\|+1)\Big)+p(s)\Big]\mathrm{d}s<R_1,\qquad t\in I,$$

即 $T_n(\overline{\Omega}_1)\subset\overline{\Omega}_1$. 类似于定理 1 的证明，容易证明 BVP (1) 至少有两个正解 x_1^*,x_2^* 满足 $x_1^*=x_1-w$, $x_2^*=x_2-w$, 其中 $x_1\in\overline{\Omega_1\backslash(\overline{\Omega}_{01}\cup\overline{\Omega}_0)}$, $x_2\in\overline{U}_{01}$.

下面说明 BVP (1) 第三个正解的存在性.

由 (37) 式知，存在正数 $\overline{R}_1>R_1$ 满足

$$\int_0^1e(s)\Big[\phi(s)\Big(g\Big(\frac{1}{2}R_0e(s)\Big)+h(\overline{R}_1+\|w\|+R_0\|e\|+1)\Big)+p(s)\Big]\mathrm{d}s<\overline{R}_1.\tag{39}$$

令 $U_1=\{x\in\Omega|\|x\|<\overline{R}_1\}$. 对于任意正整数 n, 由 (39) 式知 $T_n(\overline{U}_1)\subset U_1$. 故，由引理 1 知

$$i(T_n,U_1,Q)=1.\tag{40}$$

由 (38), 存在 $\widetilde{R}>\overline{R}_1$ 使得

$$h_0(x)\geq\rho_0x,\qquad x\geq\widetilde{R},\tag{41}$$

其中 $\frac{1}{2}\rho_0\Lambda_0^2\int_{\alpha_0}^{\beta_0}e(s)\phi_0(s)\mathrm{d}s>1$.

令

$$R_2>\max\Big\{\widetilde{R},\frac{2\widetilde{R}}{\Lambda_0}\Big\},\qquad \Omega_2=\{x\in Q|\|x\|<R_2\}.$$

显然，对任意 $x\in\partial\Omega_2$, 我们有

$$[x(t)]^{\bigstar}=x(t)-w(t)\geq\frac{1}{2}\|x\|e(t)\geq\frac{1}{2}R_2\Lambda_0\geq\widetilde{R},\qquad t\in[\alpha_0,\beta_0]. \tag{42}$$

由 (41), (42), 对任意 $x\in\partial\Omega_2$, 任意正整数 n, $t\in[\alpha_0,\beta_0]$, 我们有

$$\begin{aligned}(T_nx)(t)=&\int_0^1G(t,s)[f(s,[x(s)]^{\bigstar}+n^{-1})+p(s)]\mathrm{d}s\\ \geq&\int_{\alpha_0}^{\beta_0}e(t)e(s)\phi_0(s)h_0[x(s)]^{\bigstar}\mathrm{d}s\\ \geq&\Lambda_0\int_{\alpha_0}^{\beta_0}e(s)\phi_0(s)\rho_0[x(s)]^{\bigstar}\mathrm{d}s\\ \geq&\rho_0\Lambda_0\int_{\alpha_0}^{\beta_0}e(s)\phi_0(s)\frac{1}{2}R_2\Lambda_0\mathrm{d}s\\ =&\frac{1}{2}\rho_0\Lambda_0^2\int_{\alpha_0}^{\beta_0}e(s)\phi_0(s)\mathrm{d}s\cdot R_2.\end{aligned}$$

因此,

$$\|T_nx\|\geq\|x\|,\qquad\forall\,x\in\partial\Omega_2.$$

根据引理 2, 对任意正整数 n, 我们有

$$i(T_n,\Omega_2,Q)=0. \tag{43}$$

对任意正整数 n, 由 (40), (43) 两式知

$$i(T_n,\Omega_2\backslash\overline{U}_1,Q)=i(T_n,\Omega_2,Q)-i(T_n,U_1,Q)=-1.$$

故， T_n 至少有一个不动点 $x_{n3}\in\Omega_2\backslash\overline{U}_1$. 用与定理 1 相同的讨论知存在 $\{x_{n3}\}$ 的子列 $\{x_{n_i3}\}$, $x_3\in\overline{\Omega_2\backslash\overline{U}_1}$ 使得 $x_{n_i3}\to x_3$, $i\to+\infty$. 令 $x_3^*=x_3-w$, 则， x_3^* 是 BVP (1) 的第三个正解. 类似于 (35) 与 (36), 我们有

$$x_3^*(t)=x_3(t)-w(t)\geq\frac{1}{2}x_3(t)\geq\frac{1}{2}\|x_3\|e(t),\qquad t\in I.$$

取 $m_i=\frac{1}{2}\|x_i\|$ $(i=1,2,3)$, 则 $x_i^*(t)\geq m_ie(t)$, $t\in I$, $m_i>0$ $(i=1,2,3)$.

推论 1 设条件 (H_0)–(H_3) 成立. 此外，满足

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h_0(x)}{x}=+\infty.$$

则 BVP (1) 至少有一个正解.

推论 2 设条件 (H_0)–(H_3) 成立．又设存在 $R_i, u_i\ (i=1,2,\cdots,n)$, $R_0<u_1<R_1<u_2<R_2<\cdots<u_n<R_n$ 满足

$$\int_0^1 e(s)\Big[\phi(s)\Big(g\Big(\frac{1}{2}R_0e(s)\Big)+h(R_i+\|w\|+R_0\|e\|+1)\Big)+p(s)\Big]\mathrm{d}s<R_i,\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

$$\Lambda_0h_0\Big(\frac{1}{2}u_i\Big)\int_{\alpha_0}^{\beta_0}e(s)\phi_0(s)\mathrm{d}s>u_i,\qquad i=1,2,,\cdots,n,$$

且成立

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h_0(x)}{x}=+\infty,$$

则 BVP (1) 至少有 $2n+1$ 个正解.

注 如果 $\beta=\delta=0$, 那么 BVP (1) 退化成 Dirichlet 边值问题．相关研究成果参见文献 [6,7,15,16]. 本文不仅得到半正 BVP (1) 的两个、三个正解，而且还得到了 $2n+1$ 正解，这些结果不能由上述文献获得．因此，本文结果是新的．

4 例子

考虑下列两点边值问题

$$\begin{cases} x''(t)+\dfrac{1}{100}t^{-\frac{1}{2}}(x^{-\frac{1}{2}}+h(x))-\dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\Big(t-\frac{1}{i}\Big)^{-\frac{2}{3}}=0,\\ x(0)=x(1)=0,\end{cases}\tag{44}$$

其中

$$h(x)=\begin{cases} x^3, & x\in[0,200],\\ 4\sqrt{2}\times10^5x^{\frac{1}{2}}, & x\in[200,+\infty).\end{cases}$$

结论 存在 $m_i>0\ (i=1,2)$, BVP (44) 至少有两个正解 x_i^* 满足 $x_i^*\ge m_it(1-t)$.

证 显然， $\alpha=\gamma=1$, $\beta=\delta=0$. 取 $g(x)=x^{-\frac{1}{2}}$, $x\in(0,+\infty)$, $\phi(t)=\phi_0(t)=\frac{1}{100}t^{-\frac{1}{2}}$, $t\in(0,1)$, $p(t)=\frac{1}{100}\sum\limits_{i=1}^{5}(t-\frac{1}{i})^{-\frac{2}{3}}$, $t\in(0,1)$, $h_0(x)=h(x)$, $x\in R^+$. 易知 (H_0) 满足．因为

$$c_1=\int_0^1p(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5}\Big(t-\frac{1}{i}\Big)^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}t=\frac{1}{100}\times21.62=0.2162,$$

不难看出 (H_1) 和 (H_2) 亦成立．取 $R_0=1$, $u_1=200$, 直接计算得

$$R_0>2c_1=0.4324,\qquad g(1)=1,\qquad h(2)=8,$$
$$\frac{g(R_0)}{g(R_0)+h(R_0+1)+1}\int_0^{R_0}\frac{\mathrm{d}\tau}{g(\tau/2)}=\frac{\sqrt{2}}{5}>\int_0^1[\phi(s)+p(s)]\mathrm{d}s=0.2362.$$

显然， $u_1 = 200 > 1 = R_0$. 取 $\alpha_0 = \frac{1}{4}$, $\beta_0 = \frac{3}{4}$, 则

$$\Lambda_0 = \frac{3}{16}, \qquad h\Big(\frac{1}{2}u_1\Big) = 10^6, \qquad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{1}{100}s(1-s)s^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}s = \frac{4}{1500}.$$

从而，

$$\Lambda_0 h_0\Big(\frac{1}{2}u_1\Big)\int_{\alpha_0}^{\beta_0} e(s)\phi_0(s)\mathrm{d}s = \frac{3}{16}\times 10^6 \times \frac{4}{1500} = 500 > 200 = u_1,$$

即条件 (H_3) 和 (H_4) 也满足. 由定理 1 可知结论成立.

致谢 作者对审稿人细致阅读本文并提出宝贵修改意见表示感谢！

参 考 文 献

[1] Agarwal R P, O'Regan D. Singular Boundary Value Problems for Superlinear Second Order Ordinary and Delay Differential Equations. *Journal of Differential Equations*, 1996, 130: 333–355

[2] Liu Y S, Yu H M. Existence and Uniqueness of Positive Solution for Singular Boundary Value Problems. *Comput. Math. Appl.*, 2005, 50: 133–143

[3] 赵增勤. 非线性奇异微分方程边值问题的正解. 数学学报, 2000, 43 (1): 179–188
(Zhao Z Q. Positive Solutions of Boundary Value Problems for Nonlinear Singular Differential Equations. *Acta Mathematica Sinica*, 2000, 43 (1): 179–188)

[4] Agarwal R P, O'Regan D. Multiplicity Results for Singular Conjugate, Focal, and (n, p) Problems. *J. Differential Equations*, 2001, 170: 142–156

[5] Agarwal R P, O'Regan D. Existence Criteria for Singular Boundary Value Problems with Sign Changing Nonlinearities. *Journal of Differential Equations*, 2002, 183: 409–433

[6] Zhang X G, Liu L S. Positive Solutions of Superlinear Semipositone Singular Dirichlet Boundary Value Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, 316: 525–537

[7] Liu Y S. Twin Solutions to Singular Semipositone Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, 286: 248–260

[8] 李兴昌；田仕芹. 二阶非共振半正边值问题正解的存在性. 系统科学与数学, 2010, 30: 1401–1416
(Li X C, Tian S Q. Existence of Positive Solution of Nonresonant Singular Second Order Boundary Value Problem. *J. Sys. Sci. & Math. Sci.*, 2010, 30: 1401–1416)

[9] Yao Q L. Existence of Positive Solutions to a Semi-positone Sturm-Liouville Boundary Value Problem. *Advances in Mathematics*, 2004, 33: 719–725

[10] Yao Q L. An Existence Theorem of a Positive Solution to a Semipositone Sturm-Liouville Boundary Value Problem. *Appl. Math. Lett.*, 2010, 23: 1401–1406

[11] Li H Y, Sun J X. Positive Solutions of Sublinear Sturm-Liouville Problems with Changing Sign Nonlinearity. *Comput. Math. Appl.*, 2009, 58: 1808–1815

[12] Li H Y, Sun J X. Positive Solutions of Superlinear Semipositone Nonlinear Boundary Value Problems. *Comput. Math. Appl.*, 2011, 61: 2806–2815

[13] Zhao Z Q. Existence of Positive Solutions for 2nth-order Singular Semipositone Differential Equations With Sturm-Liouville Boundary Conditions. *Nonlinear Anal.*, 2010, 72: 1348–1357

[14] Zhang X G, Liu L S, Jiang J Q. Positive Solutions of Fourth-order Sturm-Liouville Boundary Value Problems with Changing Sign Nonlinearity. *Nonlinear Anal.*, 2008, 69: 4764-4774

[15] Liu L S, Zhang X G, Wu Y H. On Existence of Positive Solutions of a Two-point Boundary Value Problem for a Nonlinear Singular Semipositone System. *Appl. Math. Comput.*, 2007, 192: 223–232

[16] Su H, Liu L S, Wu Y H. Positive Solutions for a Nonlinear Second-order Semipositone Boundary Value System. *Nonlinear Anal.*, 2009, 71: 3240–3248

[17] Xu X. Positive Solutions for Singular Semi-positone Three-point Systems. *Nonlinear Anal.*, 2007, 66: 791–805

[18] Xu X. Multiplicity Results for Positive Solutions of Some Semi-positone Three-point Boundary Value Problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, 291: 673–689

[19] Anuradha V, Hai D D, Shivaji R. Existence Results for Superlinear Semipositone BVP's. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1996, 124: 757–763

[20] Guo D J, Lakshmikantham V. Nonlinear Problems in Abstract Cones. New York: Academic Press, 1998

Multiple Positive Solutions for Singular Semi-positone Sturm-Liouville Boundary Value Problems

ZHANG Xingqiu

(*School of Mathematics, Liaocheng University, Liaocheng* 252059)

(*E-mail: zhxq197508@163.com*)

Abstract In this paper, multiple positive solutions for singular semipositone Sturm-Liouville boundary value problems are obtained by constructing a cone and utilizing the fixed point index theory. The relationship between solution and Green's is also considered. An example is presented to demonstrate the application of our main results.

Key words multiple positive solutions; cone; fixed point index; singularity

MR(2000) Subject Classification 34B15; 34B16; 34B18

Chinese Library Classification O175.8