第 36 卷 第 6 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 36 No. 6
2013年 11 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Nov., 2013

含有连续分布时滞偶阶微分方程的振动性 *

田亚州 † 蔡远利

(西安交通大学电子与信息工程学院，西安 710049)

(†E-mail: tianyazhou369@163.com)

孟凡伟

(曲阜师范大学数学科学学院，曲阜 273165)

摘 要 本文研究了一类含有连续分布时滞偶数阶中立型微分方程的振动性，利用推广的 Riccati 变换和平均值技巧得到了该方程所有解均为振动的若干新的振动准则，推广和改进了已有文献中的主要结果，最后给出了几个例子说明结果优越性.

关键词 振动性；中立微分方程；偶数阶

MR(2000) 主题分类 34C10; 34K11

中图分类 O175

1 引言

本文考虑偶数阶中立型非线性微分方程

$$\begin{aligned}&\left[r(t)|(x(t)+p(t)x(\tau(t)))^{(n-1)}|^{\alpha-1}(x(t)+p(t)x(\tau(t)))^{(n-1)}\right]'\\&+\int_a^b q(t,\xi)f\left[|x(g(t,\xi))|^{\alpha-1}x(g(t,\xi))\right]\mathrm{d}\sigma(\xi)=0,\qquad t\geq t_0\end{aligned}\tag{1.1}$$

的振动性，其中 n 为偶数， $\alpha>0$. 假设以下条件成立：

(A_1) $\tau\in C(I,R)$, $\tau(t)\leq t$, $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$, $p\in C(I,[0,\infty))$, $0\leq p(t)\leq 1$, $I=[t_0,\infty)$;

(A_2) $r\in C^1(I,(0,\infty))$, $r'(t)\geq 0$, $R(t)=\int_{t_0}^t r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s$, $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)=\infty$;

本文 2011 年 8 月 20 日收到. 2012 年 10 月 10 日收到修改稿.
* 国家自然科学基金 (11171178), 国家高等学校博士点科研基金 (20103705110003) 资助项目.

(A$_3$) 对于 $u \neq 0$, 存在常数 $M > 0$, 使得 $f(u)/u \geq M$;

(A$_4$) $q \in C(I \times [a,b], [0,\infty))$ 且 $q(t,\xi)$ 最终不恒为零;

(A$_5$) $g \in C(I \times [a,b], [0,\infty))$, $g(t,\xi) \leq t$ for $\xi \in [a,b]$, $g(t,\xi)$ 关于 t 和 ξ 分别为非减函数，且 $\liminf\limits_{t\to\infty} g(t,\xi) = \infty$, $\xi \in [a,b]$;

(A$_6$) $\sigma \in C([a,b], R)$ 为非减函数，方程 (1.1) 中的积分为 Riemann-Stieltijes 积分.

我们称 $x(t) \in C^{n-1}([T_x,\infty), R)$, $T_x \geq t_0$ 为方程 (1.1) 的解，若

$$r(t)|(x(t)+p(t)x(t-\tau))^{(n-1)}|^{\alpha-1}(x(t)+p(t)x(t-\tau))^{(n-1)} \in C^1([T_x,\infty), R),$$

且在区间 $[T_x,\infty)$ 满足方程 (1.1). 若方程 (1.1) 的一个非平凡解称为振动的，如果它有任意大的零点. 否则，称为非振动的. 方程 (1.1) 称为振动的如果它的所有解都是振动的.

我们注意到在方程 (1.1) 中，若 $n=2$, $p(t) \equiv 0$, $q(t,\xi) = q(t)$, $f(u) = u$, $g(t,\xi) = t$, $\xi \in [a,b]$, $\int_a^b \mathrm{d}\sigma(\xi) = 1$, 方程 (1.1) 可简化为二阶方程

$$[r(t)|x'(t)|^{\alpha-1}x'(t)]' + q(t)|x(t)|^{\alpha-1}x(t) = 0, \qquad t \geq t_0, \tag{1.2}$$

Wang[1], Li 和 Yeh[2], Sun 和 Meng[3] 等已研究过方程 (1.2) 及其类似形式. 最近，Wang[4] 研究了含有连续分布时滞二阶中立型微分方程

$$[x(t)+c(t)x(t-\sigma)]'' + \int_a^b p(t,\xi)x[g(t,\xi)]\,\mathrm{d}\sigma(\xi) = 0, \qquad t \geq t_0. \tag{1.3}$$

Wang, Teo 和 Liu[5] 研究了含有连续分布时滞偶数阶中立型微分方程

$$[x(t)+c(t)x(t-\sigma)]^{(n)} + \int_a^b p(t,\xi)x[g(t,\xi)]\,\mathrm{d}\sigma(\xi) = 0, \qquad t \geq t_0. \tag{1.4}$$

目前还未见方程 (1.1) 相关研究成果. 本文给出了方程 (1.1) 的振动准则，推广和改进了 [1–7] 的主要结果，在文章的最后给出了几个例子说明本文结果的优越性.

2　主要结果

首先，我们需要以下引理：

引理 2.1[8]　设 $u(t) \in C^n(I, R^+)$, $u^{(n)}(t)$ 最终定号，则存在 $t_u \geq t_1$ 和整数 l $(0 \leq l \leq n)$, 当 $u(t)u^{(n)}(t) \geq 0$ 时， $n+l$ 为偶数；当 $u(t)u^{(n)}(t) \leq 0$ 时， $n+l$ 为奇数，对于 $t \geq t_u$, 使得

$$u(t)u^{(k)}(t) > 0, \quad 0 \leq k \leq l; \qquad (-1)^{k+l}u(t)u^{(k)}(t) > 0, \quad l \leq k \leq n.$$

引理 2.2[8]　设 $u(t)$ 满足引理 2.1 的条件，且 $u^{(n-1)}(t)u^{(n)}(t) \leq 0$, $t \geq t_u$, 则存在常数 λ, $\lambda \in (0,1)$ 和 $N > 0$ 使对一切充分大的 t 有

$$|u'(\lambda t)| \geq N t^{n-2} |u^{(n-1)}(t)|.$$

引理 2.3 设 $x(t)$ 为方程 (1.1) 的非振动解，令

$$z(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t)). \tag{2.1}$$

那么，存在 $t_1\geq t_0$ 使得

$$z(t)z^{'}(t)>0,\qquad z(t)z^{(n-1)}(t)>0,\qquad z(t)z^{(n)}(t)\leq 0,\qquad t\geq t_1. \tag{2.2}$$

证 不失一般性, 假设 $x(t)$ 为方程 (1.1) 的最终正解, 因 $\liminf\limits_{t\to\infty} g(t,\xi)=\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$, 存在 $t_1\geq t_0$ 使得

$$x(t)>0,\qquad x(g(t,\xi))>0,\qquad x(\tau(t))>0,\qquad t\geq t_1. \tag{2.3}$$

注意到 $p(t)\geq 0$, 可得 $z(t)>0$, $t\geq t_1$ 和

$$\begin{aligned}&\left[r(t)|z^{(n-1)}(t)|^{\alpha-1}z^{(n-1)}(t)\right]^{'}\\ =&-\int_a^b q(t,\xi)f\left[|x(g(t,\xi))|^{\alpha-1}x(g(t,\xi))\right]\mathrm{d}\sigma(\xi)\leq 0,\qquad t\geq t_1.\end{aligned} \tag{2.4}$$

因此 $r(t)|z^{(n-1)}(t)|^{\alpha-1}z^{(n-1)}(t)$ 是单调递减的， $z^{(n-1)}(t)$ 是最终定号的．我们断言

$$z^{(n-1)}(t)>0,\qquad t\geq t_1.$$

否则，存在 $t_2\geq t_1$ 使得 $z^{(n-1)}(t_2)<0$, 对于 $t\geq t_2$,

$$r(t)|z^{(n-1)}(t)|^{\alpha-1}z^{(n-1)}(t)\leq r(t_2)|z^{(n-1)}(t_2)|^{\alpha-1}z^{(n-1)}(t_2)=-C\ (C>0),$$

即

$$(-z^{(n-1)}(t))\geq\left(\frac{C}{r(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\qquad t\geq t_2,$$

对上式两边积分可得

$$z^{(n-2)}(t)\leq z^{(n-2)}(t_2)-C^{\frac{1}{\alpha}}\int_{t_2}^t r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s.$$

令 $t\to\infty$, 根据 (A_2), 可得 $\lim\limits_{t\to\infty}z^{(n-2)}(t)=-\infty$, 即 $z(t)\to-\infty$, 这与 $z(t)>0$ 矛盾．因此 $z^{(n-1)}(t)>0$, $t\geq t_2$. 由 (1.1) 和 (A_2), 可得

$$\left[r(t)(z^{(n-1)}(t))^{\alpha}\right]^{'}=\alpha r(t)(z^{(n-1)}(t))^{\alpha-1}z^{(n)}(t)+r^{'}(t)(z^{(n-1)}(t))^{\alpha}\leq 0,\qquad t\geq t_2.$$

所以 $z^{(n)}(t)\leq 0$, $t\geq t_2$. 由引理 2.1(n 为偶数), 可得 $z^{'}(t)>0$, $t\geq t_2$. 类似地可以证明 $x(t)$ 为最终负解的情形．证毕.

根据 Philos[9], 定义一类函数 F^*. 令 $D_0=\left\{(t,s)\in R^2: t>s\geq t_0\right\}$ 和 $D=\left\{(t,s)\in R^2: t\geq s\geq t_0\right\}$, 若 $H\in C(D,R)$, 满足

(S_1) $H(t,t)=0$, $t\geq t_0$, $H(t,s)>0,(t,s)\in D_0$;

(S_2) H 在 D_0 上对第二个变量有连续的偏导数，满足 $\frac{\partial H(t,s)}{\partial s} \le 0$,
则称 $H \in F^*$.

定理 2.1 如果存在函数 $\rho \in C^1\big([t_0,\infty),(0,\infty)\big)$, 对于 $T \ge t_0$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t \Big[M\rho(s)Q(s) - \frac{\theta r(s)(\rho^{'}(s))^{\alpha+1}}{[\rho(s)g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)]^{\alpha}}\Big]\,\mathrm{d}s = \infty, \tag{2.5}$$

其中 $\theta = (\alpha+1)^{-(\alpha+1)}(\lambda N)^{-\alpha}$, $Q(s) = \int_a^b q(s,\xi)(1-p[g(s,\xi)])^{\alpha}\,\mathrm{d}\sigma(\xi)$, 则方程 (1.1) 是振动的.

证 假设方程 (1.1) 具有非振动解 $x(t)$. 不失一般性，设

$$x(t) > 0, \qquad x(g(t,\xi)) > 0, \qquad x(\tau(t)) > 0, \qquad t \ge t_1 \ge t_0.$$

由 (2.1) 和引理 2.3 存在 $t_2 \ge t_1$ 使得

$$z(t) > 0, \qquad z^{'}(t) > 0, \qquad z^{(n-1)}(t) > 0, \qquad z^{(n)}(t) \le 0, \qquad t \ge t_2.$$

由引理 2.2, 存在 $t_3 \ge t_2$ 和常量 $\lambda : 0 < \lambda < 1$, $N > 0$ 使得

$$z^{'}(\lambda g(t,a)) \ge N g^{n-2}(t,a) z^{(n-1)}(g(t,a)) \ge N g^{n-2}(t,a) z^{(n-1)}(t), \qquad t \ge t_3. \tag{2.6}$$

由 (2.1), 可得

$$x(t) = z(t) - p(t)x(\tau(t)) \ge z(t) - p(t)z(\tau(t)) \ge (1-p(t))z(t), \qquad t \ge t_3. \tag{2.7}$$

因 $\liminf\limits_{t\to\infty} g(t,\xi) = \infty$, 存在 $t_4 \ge t_3$ 使得 $g(t,\xi) \ge t_3$, $t \ge t_4$, 所以

$$x(g(t,\xi)) \ge (1-p(g(t,\xi)))z(g(t,\xi)) \ge (1-p(g(t,\xi)))z(g(t,a)), \qquad t \ge t_4. \tag{2.8}$$

由 (A_3) 和 (2.8), 可得

$$f\big[|x(g(t,\xi))|^{\alpha-1}x(g(t,\xi))\big] \ge M\big(1-p[g(t,\xi)]\big)^{\alpha} z^{\alpha}[g(t,a)], \qquad t \ge t_4. \tag{2.9}$$

由 (1.1) 和 (2.9), 可得

$$[r(t)(z^{(n-1)}(t))^{\alpha}]^{'} + MQ(t)z^{\alpha}[g(t,a)] \le 0, \qquad t \ge t_4. \tag{2.10}$$

令

$$w(t) = \rho(t)\frac{r(t)(z^{(n-1)}(t))^{\alpha}}{z^{\alpha}[\lambda g(t,a)]}, \qquad t \ge t_4. \tag{2.11}$$

则 $w(t)>0,\ \ t\ge t_4$. 由 (2.6), (2.9) 和 (2.11), 可得

$$\begin{aligned} w^{'}(t) =&\rho^{'}(t)\frac{r(t)(z^{(n-1)}(t))^{\alpha}}{z^{\alpha}[\lambda g(t,a)]}+\rho(t)\frac{[r(t)(z^{(n-1)}(t))^{\alpha}]^{'}}{z^{\alpha}[\lambda g(t,a)]} \\ &-\frac{\lambda\alpha\rho(t)r(t)g^{'}(t,a)z^{'}[\lambda g(t,a)](z^{(n-1)}(t))^{\alpha}}{z^{\alpha+1}[\lambda g(t,a)]} \\ \le&\frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t)-M\rho(t)Q(t)-\frac{\lambda\alpha N g^{n-2}(t,a)g^{'}(t,a)}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}}w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t),\qquad t\ge t_4. \end{aligned} \tag{2.12}$$

由 Young 不等式

$$\begin{aligned} &\frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t)-\frac{\lambda\alpha N g^{n-2}(t,a)g^{'}(t,a)}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}}w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \\ \le&\frac{\theta r(t)(\rho^{'}(t))^{\alpha+1}}{[\rho(t)g^{n-2}(t,a)g^{'}(t,a)]^{\alpha}}. \end{aligned}$$

由 (2.12) 得

$$w^{'}(t)\le -M\rho(t)Q(t)+\frac{\theta r(t)(\rho^{'}(t))^{\alpha+1}}{[\rho(t)g^{n-2}(t,a)g^{'}(t,a)]^{\alpha}},\qquad t\ge t_4.$$

对上式两边积分可得

$$0<w(t)\le w(t_4)-\int_{t_4}^{t}\Big[M\rho(s)Q(s)-\frac{\theta r(s)(\rho^{'}(s))^{\alpha+1}}{[\rho(s)g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)]^{\alpha}}\Big]\,\mathrm{d}s. \tag{2.13}$$

这与 (2.5) 矛盾，类似地可以证明 $x(t)$ 为最终负解的情形．证毕.

我们把定理 2.1 应用到二阶半线性方程

$$\begin{aligned} &\big[|(x(t)+p(t)x(\tau(t)))^{'}|^{\alpha-1}(x(t)+p(t)x(\tau(t)))^{'}\big]^{'} \\ &+\int_a^b q(t,\xi)|x(g(t,\xi))|^{\alpha-1}x(g(t,\xi))\,\mathrm{d}\sigma(\xi)=0, \end{aligned} \tag{2.14}$$

可以得到下面的结论.

推论 2.1 如果存在函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$, 对于 $T\ge t_0$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t\Big[\rho(s)Q(s)-\Big(\frac{1}{\alpha+1}\Big)^{\alpha+1}\frac{(\rho^{'}(s))^{\alpha+1}}{[\rho(s)g^{'}(s,a)]^{\alpha}}\Big]\,\mathrm{d}s=\infty, \tag{2.15}$$

其中 $Q(s)$ 如定理 2.1 中定义，则方程 (1.1) 是振动的.

注 1 推论 2.1 推广了 [6] 中的定理 2.2.

定理 2.2 设 $H\in F^*$. 如果存在函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}[A(t,t_0)-\theta B(t,t_0)]=\infty, \tag{2.16}$$

其中

$$h(t,s)=-\frac{\partial}{\partial s}(H(t,s))-H(t,s)\frac{\rho^{'}(s)}{\rho(s)},\qquad (t,s)\in D,$$
$$A(t,t_0)=\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\big[MH(t,s)\rho(s)Q(s)\big]\,\mathrm{d}s,$$
$$B(t,t_0)=\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^{t}\frac{\rho(s)r(s)\left|h(t,s)\right|^{\alpha+1}}{[H(t,s)g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)]^{\alpha}}\,\mathrm{d}s,$$

θ 和 $Q(s)$ 如定理 2.1 中定义，则方程 (1.1) 是振动的.

证　假设方程 (1.1) 具有非振动的解 $x(t)$. 不失一般性，设 $x(t)>0,\ t\geq t_1\geq t_0$, 则 $z[\lambda g(t,a)]>0,\ t\geq t_2\geq t_1$. 同定理 2.1 证明过程，定义

$$w(t)=\rho(t)\frac{r(t)(z^{(n-1)}(t))^{\alpha}}{z^{\alpha}[\lambda g(t,a)]},\qquad t\geq t_2.$$

我们得到 (2.12), $t\geq t_3\geq t_2$, 即

$$M\rho(t)Q(t)\leq -w^{'}(t)+\frac{\rho^{'}(t)}{\rho(t)}w(t)-\frac{\lambda\alpha Ng^{n-2}(t,a)g^{'}(t,a)}{(\rho(t)r(t))^{\frac{1}{\alpha}}}w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t),\qquad t\geq t_3.\tag{2.17}$$

在 (2.17) 中 s 代替 t, 两边乘以 $H(t,s)$, 并且从 T 到 t 积分 $(t\geq T\geq t_3)$, 可得

$$\begin{aligned}&\int_T^t MH(t,s)\rho(s)Q(s)\,\mathrm{d}s\\
\leq&-\int_T^t H(t,s)w^{'}(s)\,\mathrm{d}s+\int_T^t H(t,s)\frac{\rho^{'}(s)}{\rho(s)}w(s)\,\mathrm{d}s\\
&-\int_T^t H(t,s)\frac{\lambda\alpha Ng^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)}{(\rho(s)r(s))^{\frac{1}{\alpha}}}w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s\\
=&H(t,T)w(T)-\int_T^t\Big[\Big(-\frac{\partial}{\partial s}(H(t,s))-H(t,s)\frac{\rho^{'}(s)}{\rho(s)}\Big)w(s)\Big]\,\mathrm{d}s\\
&-\int_T^t H(t,s)\frac{\lambda\alpha Ng^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)}{(\rho(s)r(s))^{\frac{1}{\alpha}}}w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s\\
\leq&H(t,T)w(T)+\int_T^t\Big[\left|h(t,s)\right|w(s)-H(t,s)\frac{\lambda\alpha Ng^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)}{(\rho(s)r(s))^{\frac{1}{\alpha}}}w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\Big]\,\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{2.18}$$

由 Young 不等式

$$\begin{aligned}&|h(t,s)|w(s)-H(t,s)\frac{\lambda\alpha Ng^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)}{(\rho(s)r(s))^{\frac{1}{\alpha}}}w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\\
\leq&\frac{\theta\rho(s)r(s)|h(t,s)|^{\alpha+1}}{[H(t,s)g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)]^{\alpha}}.\end{aligned}\tag{2.19}$$

由 (2.17), (2.18) 和 (2.19), 可得

$$A(t,T)\leq w(T)+\theta B(t,T).\tag{2.20}$$

在 (2.20) 中选取 $T=t_3$, 则

$$H(t,t_3)[A(t,t_3)-\theta B(t,t_3)]\le H(t,t_3)w(t_3).$$

因此

$$\begin{aligned}H(t,t_0)[A(t,t_0)-\theta B(t,t_0)]=&H(t,t_3)[A(t,t_3)-\theta B(t,t_3)]+H(t_3,t_0)[A(t_3,t_0)-\theta B(t_3,t_0)]\\ \le&H(t,t_3)w(t_3)+H(t,t_0)\int_{t_0}^{t_3}M\rho(s)Q(s)\,\mathrm{d}s\\ \le&H(t,t_0)\Big[w(t_3)+M\int_{t_0}^{t_3}\rho(s)Q(s)\,\mathrm{d}s\Big].\end{aligned}$$

即 $\limsup\limits_{t\to\infty}\{A(t,t_0)-\theta B(t,t_0)\}\le w(t_3)+M\int_{t_0}^{t_3}\rho(s)Q(s)\,\mathrm{d}s$, 这与 (2.16) 矛盾. 证毕.

推论 2.2 若用

$$\limsup_{t\to\infty}A(t,t_0)=\infty,\qquad \limsup_{t\to\infty}B(t,t_0)<\infty, \tag{2.21}$$

代替定理 2.2 中条件 (2.16), 则方程 (1.1) 是振动的.

注 2 若在定理 2.2 和推论 2.2 中适当的选取 $H(t,s)$, 可以得到方程 (1.1) 的一些新的振动准则. 例如, $H(t,s)=(t-s)^{m-1}$, $t\ge s\ge t_0$, 其中 m 为大于 2 的整数. 则条件 (S_1) 和 (S_2) 成立, $h(t,s)=(t-s)^{m-2}\big[m-1-(t-s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\big]$, 由定理 2.2 和推论 2.2, 我们可得下面的推论.

推论 2.3 假设存在函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 使得

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-1}}\int_{t_0}^{t}\Big[M\rho(s)Q(s)(t-s)^{m-1}-\frac{\theta\rho(s)r(s)}{[g^{n-2}(s,a)g'(s,a)]^{\alpha}}\\ &\cdot\Big|m-1-(t-s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\Big|^{\alpha+1}(t-s)^{m-\alpha-2}\Big]\,\mathrm{d}s=\infty,\end{aligned}\tag{2.22}$$

其中 θ 和 $Q(s)$ 如定理 2.1 中定义, 则方程 (1.1) 是振动的.

推论 2.4 假设存在函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-1}}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{m-1}\rho(s)Q(s)\,\mathrm{d}s=\infty, \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-1}}\int_{t_0}^{t}\frac{\rho(s)r(s)}{[g^{n-2}(s,a)g'(s,a)]^{\alpha}}\Big|m-1-(t-s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\Big|^{\alpha+1}\\ &\quad\cdot(t-s)^{m-\alpha-2}\,\mathrm{d}s<\infty,\end{aligned}\tag{2.24}$$

其中 θ 和 $Q(s)$ 如定理 2.1 中定义, 则方程 (1.1) 是振动的.

若定理 2.2 中条件 (2.16) 不成立, 从而定理 2.2 不适用. 下面的结果给出了方程 (1.1) 新的振动准则.

定理 2.3 H, θ 和 ρ 如定理 2.2 中定义, 假设

$$0<\inf_{s\ge t_0}\Big\{\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\Big\} \tag{2.25}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty} B(t,t_0)<\infty. \tag{2.26}$$

若存在函数 $\varphi\in C([t_0,\infty),R)$, 对于 $t\geq t_0$, $T\geq t_0$, 使得

$$\limsup_{t\to\infty}\{A(t,T)-\theta B(t,T)\}\geq\varphi(T) \tag{2.27}$$

和

$$\int_{t_0}^{\infty} g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(s)r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)[\varphi_+(s)]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s=\infty, \tag{2.28}$$

其中 $\varphi_+(s)=\max\{\varphi(s),0\}$, 则方程 (1.1) 是振动的.

证 如定理 2.2 证明过程，可得 (2.20) 成立， $t\geq T\geq t_3$.

$$A(t,T)-\theta B(t,T)\leq w(T). \tag{2.29}$$

因此,

$$\limsup_{t\to\infty}[A(t,T)-\theta B(t,T)]\leq w(T),\qquad T\geq t_3. \tag{2.30}$$

由 (2.27) 可得,

$$\varphi(T)\leq w(T) \tag{2.31}$$

和

$$\limsup_{t\to\infty} A(t,T)\geq\varphi(T). \tag{2.32}$$

由 (2.31) 可得,

$$\begin{aligned}&\int_{t_3}^{\infty} g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(s)r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s\\ \geq&\int_{t_3}^{\infty} g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(s)r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)[\varphi_+(s)]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

由 (2.28) 可推得,

$$\int_{t_3}^{\infty} g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(s)r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)ds=\infty. \tag{2.33}$$

下面我们证明 (2.33) 不成立. 令

$$u(t)=\frac{\lambda\alpha N}{H(t,t_3)}\int_{t_3}^{t} H(t,s)g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(s)r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s$$

和

$$v(t)=\frac{1}{H(t,t_3)}\int_{t_3}^{t}|h(t,s)|w(s)\,\mathrm{d}s,\qquad t\geq t_3,$$

由 (2.18) 和 (2.32), 可得

$$\liminf_{t\to\infty}[u(t)-v(t)]\le W(t_3)-\limsup_{t\to\infty}A(t,t_3)\le W(t_3)-\varphi(t_3)<\infty. \tag{2.34}$$

由 (2.25), 存在正常量 ξ_1 满足

$$\inf_{s\ge t_0}\left\{\liminf_{t\to\infty}\frac{H(t,s)}{H(t,t_0)}\right\}>\xi_1>0. \tag{2.35}$$

设 ξ_2 为任意自然数. $T_1\ge t_3$ 足够大, 由 (2.33)

$$\int_{t_3}^{t}g^{n-2}(s,a)g^{'}(s,a)\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(s)r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s\ge\frac{\xi_2}{\lambda\alpha N\xi_1},\qquad t\ge T_1.$$

因此,

$$\begin{aligned}u(t)=&\frac{\lambda\alpha N}{H(t,t_3)}\int_{t_3}^{t}H(t,s)\,\mathrm{d}\Big(\int_{t_3}^{s}g^{n-2}(u,a)g^{'}(u,a)\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(u)r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(u)\,\mathrm{d}u\Big)\\ \ge&\frac{\lambda\alpha N}{H(t,t_3)}\int_{T_1}^{t}\Big(-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\Big)\Big(\int_{t_3}^{s}g^{n-2}(u,a)g^{'}(u,a)\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(u)r^{-\frac{1}{\alpha}}(u)w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(u)\,\mathrm{d}u\Big)\\ \ge&\frac{\xi_2}{\xi_1H(t,t_3)}\int_{T_1}^{t}\Big(-\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\Big)\,\mathrm{d}s\\ =&\frac{\xi_2H(t,T_1)}{\xi_1H(t,t_3)},\qquad t\ge T_1.\end{aligned}$$

由 (2.35), 存在 $T_2\ge T_1$ 使得 $\frac{H(t,T_1)}{H(t,t_3)}\ge\xi_1$, $t\ge T_2$. 因此 $u(t)\ge\xi_2$, $t\ge T_2$. 因 ξ_2 是任意的,

$$\lim_{t\to\infty}u(t)=\infty. \tag{2.36}$$

下面我们考虑 (t_0,∞) 上任意序列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{i\to\infty}t_i=\infty$. 由 (2.34), 存在常数 L 使得

$$u(t_i)-v(t_i)\le L,\qquad i=1,2,\cdots \tag{2.37}$$

由 (2.36) 得

$$\lim_{i\to\infty}u(t_i)=\infty, \tag{2.38}$$

由 (2.37) 和 (2.38)

$$\lim_{i\to\infty}v(t_i)=\infty. \tag{2.39}$$

由 (2.37) 和 (2.38) 可得, 当 i 充分大时, $\frac{v(t_i)}{u(t_i)}-1\ge-\frac{L}{u(t_i)}>-\frac{1}{2}$, 即 $\frac{v(t_i)}{u(t_i)}>\frac{1}{2}$. 上式和 (2.39) 可得

$$\lim_{i\to\infty}\frac{v^{\alpha+1}(t_i)}{u^{\alpha}(t_i)}=\infty. \tag{2.40}$$

另一方面，由 Hölder 不等式

$$v(t_i) \le \Big\{ \frac{\lambda\alpha N}{H(t_i,t_3)} \int_{t_3}^{t_i} H(t_i,s) g^{n-2}(s,a) g'(s,a) \rho^{-\frac{1}{\alpha}}(s) r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(s)\,\mathrm{d}s \Big\}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$
$$\times \Big\{ \frac{1}{[\lambda\alpha N]^{\alpha} H(t_i,t_3)} \int_{t_3}^{t_i} \frac{\rho(s) r(s) |h(t_i,s)|^{\alpha+1}}{[H(t_i,s) g^{n-2}(s,a) g'(s,a)]^{\alpha}}\,\mathrm{d}s \Big\}^{\frac{1}{\alpha+1}}.$$

因此，对于充分大的 i,

$$\frac{v^{\alpha+1}(t_i)}{u^{\alpha}(t_i)} \le \frac{1}{[\lambda\alpha N]^{\alpha} H(t_i,t_3)} \int_{t_3}^{t_i} \frac{\rho(s) r(s) |h(t_i,s)|^{\alpha+1}}{[H(t_i,s) g^{n-2}(s,a) g'(s,a)]^{\alpha}}\,\mathrm{d}s$$
$$= \frac{1}{[\lambda\alpha N]^{\alpha}} B(t_i,t_3),$$

由 (2.40) 得

$$\lim_{i\to\infty} B(t_i,t_3) = \infty. \tag{2.41}$$

因数列 $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是任意的，从而 (2.41) 与 (2.26) 矛盾，因此 (2.33) 不成立. 所以方程 (1.1) 是振动的.

选取 H 如注 2 中定义，我们可得 (2.25) 成立，因 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{H(t,s)}{H(t,t_0)} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{(t-s)^{m-1}}{(t-t_0)^{m-1}} = 1$. 根据定理 2.3 我们可得以下推论.

推论 2.5 假设存在函数 $\rho \in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$ 和 $\varphi \in C([t_0,\infty),R)$ 满足

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{m-1}} \int_{t_0}^{t} \frac{\rho(s) r(s)}{[g^{n-2}(s,a) g'(s,a)]^{\alpha}} \cdot \Big| m-1-(t-s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \Big|^{\alpha+1} (t-s)^{m-\alpha-2}\,\mathrm{d}s < \infty, \tag{2.42}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t^{m-1}} \int_{T}^{t} \Big[M\rho(s) Q(s) (t-s)^{m-1} - \frac{\theta\rho(s) r(s)}{[g^{n-2}(s,a) g'(s,a)]^{\alpha}} \cdot \Big| m-1-(t-s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} \Big|^{\alpha+1} (t-s)^{m-\alpha-2} \Big]\,\mathrm{d}s \ge \varphi(T), \qquad T \ge t_0 \tag{2.43}$$

和

$$\int_{t_0}^{\infty} g^{n-2}(s,a) g'(s,a) \rho^{-\frac{1}{\alpha}}(s) r^{-\frac{1}{\alpha}}(s) [\varphi_+(s)]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s = \infty, \tag{2.44}$$

其中 θ 和 $Q(s)$ 如定理 2.1 中定义， $\varphi_+(s) = \max\{\varphi(s),0\}$, 则方程 (1.1) 是振动的.

定理 2.4 H,θ 和 ρ 如定理 2.2 中定义，假设 (2.25) 和

$$\liminf_{t\to\infty} B(t,t_0) < \infty \tag{2.45}$$

成立. 若存在函数 $\varphi \in C([t_0,\infty),R)$, 对于 $t \ge t_0$, $T \ge t_0$, 使得

$$\liminf_{t\to\infty} \{A(t,T) - \theta B(t,T)\} \ge \varphi(T) \tag{2.46}$$

和 (2.28) 成立，则方程 (1.1) 是振动的.

证 同定理 2.3 的证明过程我们可得 (2.29), (2.29) 两边同时取 liminf, 令 $t\to\infty$, 我们可得 (2.30), 需要注意的是在 (2.30) 中用 liminf 代替 limsup. 在 (2.32) 和 (2.34) 中相互交换 liminf 和 limsup, 我们可以得到同定理 2.3 中 (2.31)–(2.34) 类似的结论，余下的证明同定理 2.3, 在此我们省略. 证毕.

注 3 Wang, Teo 和 Liu[5] 给出了方程 (1.4) 的振动准则， [5] 中的定理 1 和定理 2 是定理 2.2 和定理 2.3 的特殊情形.

注 4 定理 2.2 和定理 2.3 推广了 [4, 7] 中的定理 2.1 和定理 2.2.

例 1 考虑 n 阶微分方程

$$\begin{aligned}&\left[t|(x(t)+(1-e^{-4t})x(t-1))^{(n-1)}|^{\alpha-1}(x(t)+(1-e^{-4t})x(t-1))^{(n-1)}\right]'\\&+\int_0^1\frac{e^{2\alpha(t+\xi)}}{t^{\alpha+1}}\Big|x\Big(\frac{t+\xi}{2}\Big)\Big|^{\alpha-1}x\Big(\frac{t+\xi}{2}\Big)\,\mathrm{d}\xi=0,\qquad t\geq 1,\end{aligned}\tag{2.47}$$

其中 n 为偶数， $\alpha\geq 1$, $t_0=1$, $a=0$, $b=1$. 在方程 (2.47) 中

$$\begin{aligned}&r(t)=t,\qquad \tau(t)=t-1,\qquad p(t)=1-e^{-4t},\qquad q(t,\xi)=\frac{e^{2\alpha(t+\xi)}}{t^{\alpha+1}},\\&f(u)=u,\qquad g(t,\xi)=\frac{t+\xi}{2},\qquad \sigma(\xi)=\xi.\end{aligned}$$

很容易验证 $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t s^{-\frac{1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s=\infty$ 和方程 (2.47) 满足 (A_1)–(A_6).

选取 $M=1$, $\rho(s)=s^{m-1}$, $\alpha+2<m<(n-1)\alpha$, $H(t,s)=(t-s)^{m-1}$, $t\geq s\geq 1$. 根据 [10] 中定理 41 得 $(t-s)^{m-1}\geq t^{m-1}-(m-1)st^{m-2}$, $t\geq s\geq 1$, 则

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-1}}\int_1^t(t-s)^{m-1}\rho(s)\int_a^b q(s,\xi)[1-p(g(s,\xi))]^{\alpha}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s\\=&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-1}}\int_1^t(t-s)^{m-1}s^{m-\alpha-2}\,\mathrm{d}s\\\geq&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-1}}\int_1^t[t^{m-1}-(m-1)st^{m-2}]\frac{1}{s}\,\mathrm{d}s=\infty.\end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-1}}\int_{t_0}^t\frac{\rho(s)r(s)}{[g^{n-2}(s,a)g'(s,a)]^{\alpha}}\Big|m-1-(t-s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\Big|^{\alpha+1}(t-s)^{m-\alpha-2}\,\mathrm{d}s\\=&2^{(n-1)\alpha}(m-1)^{\alpha+1}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-1}}\int_1^t(t-s)^{m-\alpha-2}s^{m-(n-2)\alpha}\Big|2-\frac{t}{s}\Big|^{\alpha+1}\,\mathrm{d}s\\\leq&2^{(n-1)\alpha}(m-1)^{\alpha+1}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-1}}\int_1^t(t-s)^{m-\alpha-2}s^{m-(n-2)\alpha}\Big(\frac{t}{s}\Big)^{\alpha+1}\,\mathrm{d}s\\=&2^{(n-1)\alpha}(m-1)^{\alpha+1}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^{m-\alpha-2}}\int_1^t(t-s)^{m-\alpha-2}s^{m-1-(n-1)\alpha}\,\mathrm{d}s\\\leq&2^{(n-1)\alpha}(m-1)^{\alpha+1}\limsup_{t\to\infty}\Big(1-\frac{1}{t}\Big)^{m-\alpha-2}\frac{1}{m-(n-1)\alpha}\big[t^{m-(n-1)\alpha}-1\big]<\infty.\end{aligned}$$

从而满足推论 2.4, 因此方程 (2.47) 是振动的. 然而 [1–7] 中的结论无法判别方程 (2.47) 的振动性.

例 2 考虑二阶微分方程

$$\begin{aligned}&\Big[\Big|\Big(x(t)+\frac{1}{2}x(t-1)\Big)'\Big|^{\alpha-1}\Big(x(t)+\frac{1}{2}x(t-1)\Big)'\Big]'\\&+\int_0^1 2^{\alpha+1}t\xi\Big|x\Big(\frac{t+\xi}{2}\Big)\Big|^{\alpha-1}x\Big(\frac{t+\xi}{2}\Big)\,\mathrm{d}\xi=0,\qquad t\geq 1,\end{aligned}\tag{2.48}$$

其中 $t_0=1,\ a=0,\ b=1,\ 0<\alpha<\frac{1}{2}$. 在方程 (2.48) 中

$$\begin{aligned}&r(t)\equiv 1,\qquad \tau(t)=t-1,\qquad p(t)\equiv\frac{1}{2},\qquad q(t,\xi)=2^{\alpha+1}t\xi,\\&f(u)=u,\qquad g(t,\xi)=\frac{t+\xi}{2},\qquad \sigma(\xi)=\xi.\end{aligned}$$

易得

$$\lim_{t\to\infty}R(t)=\lim_{t\to\infty}\int_1^t 1\,\mathrm{d}s=\lim_{t\to\infty}(t-1)=\infty$$

和方程 (2.48) 满足 (A_1)–(A_6). 选取 $M=1,\ m=3,\ \rho(s)=s^{-3},\ H(t,s)=(t-s)^2,\ t\geq s\geq 1$. 根据 [10] 中定理 41 可得

$$\begin{aligned}&(t-s)^2\geq t^2-2st,\qquad t\geq s\geq 1,\\&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_1^t\frac{\rho(s)}{[g'(s,a)]^\alpha}\Big|2-(t-s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\Big|^{\alpha+1}(t-s)^{1-\alpha}\,\mathrm{d}s\\=&2^\alpha\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_1^t s^{-3}\frac{(3t-s)^{\alpha+1}}{s^{\alpha+1}}(t-s)^{1-\alpha}\,\mathrm{d}s\\\leq&2^\alpha\limsup_{t\to\infty}\Big(3-\frac{1}{t}\Big)^{\alpha+1}\Big(1-\frac{1}{t}\Big)^{1-\alpha}\int_1^t s^{-3}\,\mathrm{d}s\\=&2^{\alpha-1}3^{\alpha+1}<\infty,\end{aligned}$$

另一方面，当 $t\geq s\geq 1$ 和 $T\geq 1$ 时,

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_T^t\Big[\rho(s)Q(s)(t-s)^2-\frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{\rho(s)}{[g'(s,a)]^\alpha}\\&\cdot\Big|2-(t-s)\frac{\rho'(s)}{\rho(s)}\Big|^{\alpha+1}(t-s)^{1-\alpha}\Big]\,\mathrm{d}s\\=&\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_T^t\Big[s^{-3}(t-s)^2\int_0^1 2s\xi\,\mathrm{d}\xi-\frac{2^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}s^{-3}\frac{(3t-s)^{\alpha+1}}{s^{\alpha+1}}(t-s)^{1-\alpha}\Big]\,\mathrm{d}s\\\geq&\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_T^t s^{-2}(t^2-2st)\,\mathrm{d}s-\frac{2^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}\int_T^t s^{-3}(3t-s)^{\alpha+1}(t-s)^{1-\alpha}\,\mathrm{d}s\\\geq&\lim_{t\to\infty}\int_T^t s^{-2}\,\mathrm{d}s-\frac{2^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\limsup_{t\to\infty}\Big(3-\frac{1}{t}\Big)^{\alpha+1}\Big(1-\frac{1}{t}\Big)^{1-\alpha}\int_T^t s^{-3}\,\mathrm{d}s\\=&\frac{1}{T}-\frac{2^{\alpha-1}3^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{1}{T^2}=\varphi(T),\end{aligned}$$

令

$$\varphi(s)=\frac{1}{s^2}\Big[s-\frac{2^{\alpha-1}3^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\Big], \qquad T_0=\frac{2^{\alpha-1}3^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}},$$

从而

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty g^{'}(s,a)\rho^{-\frac{1}{\alpha}}(s)[\varphi_+(s)]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s\\
=&\frac{1}{2}\int_1^\infty s^{\frac{3}{\alpha}}\Big[\frac{1}{s^2}\Big(s-\frac{2^{\alpha-1}3^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\Big)\Big]_+^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s\\
=&\frac{1}{2}\int_1^{T_0} s^{\frac{3}{\alpha}}\Big[\frac{1}{s^2}\Big(s-\frac{2^{\alpha-1}3^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\Big)\Big]_+^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\int_{T_0}^\infty s^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}(s-T_0)_+^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s\\
\geq&\frac{1}{2}\int_1^{T_0} s^{\frac{3}{\alpha}}\Big[\frac{1}{s^2}\Big(s-\frac{2^{\alpha-1}3^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\Big)\Big]_+^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s+\frac{1}{2}T_0^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\int_{T_0}^\infty (s-T_0)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\,\mathrm{d}s=\infty,
\end{aligned}$$

$0<\alpha<\frac{1}{2}$. 根据推论 2.5, 方程 (2.48) 是振动的. 而 [1–7] 的结论无法判别方程 (2.48) 的振动性.

致谢 感谢审稿人提出的宝贵意见.

参 考 文 献

[1] Wang Q R. Oscillation and Asymptotics for Second Order Half-linear Differential Equations. *Appl. Math. Comput.*, 2001, 122: 253–266

[2] Li H J, Yeh C C. An Integral Criterion for Oscillation of Nonlinear Differential Equations. *Math. Japonica.*, 1995, 41: 185–188

[3] Sun Y G, Meng F W. Note On the Paper of Dzurina and Stavroulakis. *Appl. Math. Comput.*, 2006, 174: 1634–1641

[4] Wang P G. Oscillation Criteria for Second Order Neutral Equations with Distributed Deviating Arguments. *Comput. Math. Appl.*, 2004, 47: 1935–1946

[5] Wang P G, Teo K L, Liu Y Q. Oscillation Properties for Even Order Neutral Differential Equations with Distributed Deviating Arguments. *Comput. Appl. Math.*, 2005, 182: 290–303

[6] Meng F W, Xu R. Oscillation Criteria for Certain Even Order Quasi-linear Neutral Differential Equations with Deviating Arguments. *Appl. Math. Comput.*, 2007, 190: 458–464

[7] Yu Y H, Fu X L. Oscillation of Second Order Nonlinear Differential Equations with Continuous Distributed Deviating Arguments. *Rad, Mat.*, 1991, 7: 167–176

[8] Philos Ch G. A New Criteria for the Oscillatory and Asympotic Behavior of Delay Differential Equations. *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser.Sci.Mat.*, 1981, 39: 61–64

[9] Philos Ch G. Oscillation Theorems for Linear Differential Equation of Second Order. *Arch. Math.*, 1989, 53: 482–492

[10] Hardy G H, Littlewood J E, Polya G. Inequalities, Second ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988

[11] Agarwal R P, Grace S R, O'Regan D. Oscillation Criteria for Certain nth Order Differential Equations with Deviating Arguments. *J. Math. Annal. Appl.*, 2001, 262: 601–622

[12] Xu Z T, Xia Y. Integral Averaging Technique and Oscillation of Certain Even Order Delay Differential Equations. *J. Math. Annal. Appl.*, 2004, 292: 238–246

Oscillation Criteria for Even Order Differential Equations with Continuous Distributed Delay

TIAN Yazhou† CAI Yuanli

(*School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an* 710049)

(† *E-mail: tianyazhou369@163.com*)

MENG Fanwei

(*Department of Mathematics, Qufu Normal University, Qufu* 273165)

Abstract In this paper a class of even order neutral differential equations with continuous distributed delay are studied. By using the generalized Riccati technique and the averaging technique, we establish several new oscillation criteria for all solutions of the equations, which generalize and improve some known results. Examples are given to illustrate the superiority of our main results.

Key words oscillation; neutral differential equations; even order

MR(2000) Subject Classification 34C10; 34K11

Chinese Library Classification O175