第 36 卷 第 6 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 36 No. 6
2013 年 11 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Nov., 2013

广义 Logistic 时滞微分方程零解的 3/2- 全局吸引性 *

冯 伟 王进良

(北京航空航天大学数学与系统科学学院，北京 100191)

(数学、信息与行为教育部重点实验室，北京 100191)

(E-mail: jlwang@buaa.edu.cn)

燕居让

(山西大学数学学院，太原 030006)

摘 要 本文考虑广义时滞 Logistic 方程

$$x'(t) + (1 + x(t))F(t, x_t^{\alpha}) = 0, \qquad t \geq 0$$

零解的全局吸引性，运用一些分析方法和技巧，得到方程零解是 3/2– 全局吸引的一个充分条件，结果推广并改进了现有文献中的相关结论.

关键词 广义 logistic 时滞微分方程；全局吸引性；振动；非振动

MR(2000) 主题分类 34K15

中图分类 O175.12;O175.15

1 引言

微分方程是一种非常重要的描述客观规律的数学工具. 二十世纪以来，由于科学研究的进展及精确化，提出了许多带时滞的微分方程. 时滞微分方程反映的是事物在每个时刻发展变化不但依赖于事物当时的状态，而且还取决于该时刻以前一段时间的状态. 实际上，常微分方程只能是时滞微分方程在略去时滞后对客观规律的近似反映. 当研究越来越精确化时，滞量便越来越重要，甚至有时略去滞量得到的系统会完全不反映事物本来的规律. 时滞微分方程的研究从二十世纪五十年代开始有了很大发展，关于方

本文 2011 年 11 月 11 日收到.

* 国家自然科学基金 (10971009, 11101021) 和国家留学基金 (2011602507) 资助项目.

程的振动性、稳定性、全局吸引性、周期解的存在性，以及带脉冲的微分方程方面的结论已经很多了.

近 20 年来， $\frac{3}{2}$- 全局吸引性的研究引起了很多学者的重视． $\frac{3}{2}$- 全局吸引性方面较早的工作由 [1–7] 给出，我国庾建设、唐先华 [8–10] 等给出了很好的结果．这些文章的结论都是如果某一个量小于等于 $\frac{3}{2}$, 则方程的零解全局吸引，并且 Yoneyama 已证明对于某类方程， $\frac{3}{2}$ 是最好的结果．对一般方程来说， $\frac{3}{2}$- 全局吸引性的证明是相当困难的，上述 $\frac{3}{2}$- 全局吸引性也是在已有的全局吸引的基础上的逐步改进，因此任何向 $\frac{3}{2}$ 逼近的工作都是有意义的，这里我们要指出的有 [11–19].

本文所用到振动性、全局吸引性可参考 [1–10,12], 这里从略.

考虑广义时滞 Logistic 方程

$$x'(t)+(1+x(t))F(t,x_t^{\alpha})=0,\qquad t\geq 0.\tag{1}$$

设 $g\in C([0,\infty),R)$, 单调非减且满足 $t\geq 0$ 时， $g(t)<t$, 以及 $g(t)\to\infty$ $(t\to\infty)$, $r\in C([0,\infty),(0,\infty))$. 用 C_t 表示连续函数 $\phi:[g(t),t]\to[-1,\infty)$ 的全体构成的赋范空间，其范数定义为 $\|\phi\|_t=\sup\limits_{s\in[g(t),t]}|\phi(s)|$. 这里的 $F(t,\phi^{\alpha})$ 为 $[0,\infty)\times C_t$ 上的连续泛函，只依赖于 t 和 ϕ 在 $[g(t),t]$ 上的取值， $F(t,0)=0$, $t\geq 0$, 并且满足

$$-r(t)M_t(-\phi^{\alpha})\leq F(t,\phi)\leq r(t)M_t(\phi^{\alpha}),\qquad t\geq 0,\ \ \phi\in C_t,\tag{2}$$

这里 $M_t(\phi^{\alpha})=\max\big\{0,\sup\limits_{s\in[g(t),t]}\phi^{\alpha}(s)\big\}$, $r\in([0,\infty),(0,\infty))$. 令 $\tau=-g(0)$, 则 (1) 相应的初始条件为

$$x(t)=\phi(t),\qquad t\in[-\tau,0],\tag{3}$$

其中 $\phi\in C([-\tau,0],[-1,\infty))$ 且 $\phi(0)>-1$.

当 $F(t,x_t^{\alpha})=r(t)x^{\alpha}(g(t))$ 时，方程 (1) 成为

$$x'(t)+r(t)(1+x(t))x^{\alpha}(g(t))=0,\qquad t\geq 0.\tag{4}$$

陈明博等 [12] 得到了：如果

$$\int_0^{\infty}r(s)\,\mathrm{d}s=\infty,\tag{5}$$

$$\alpha\int_{g(t)}^{t}r(s)\,\mathrm{d}s\leq 1,\qquad \text{对充分大的 } t,\tag{6}$$

则方程 (4) 与 (3) 的零解全局吸引.

李经文 [13] 得到了：如果 (5) 成立，且

$$\int_{g(t)}^{t}r(s)\,\mathrm{d}s\leq\theta,\qquad \text{对充分大的 } t,\tag{7}$$

这里

$$\theta = \begin{cases} 1, & \alpha \in [1,3], \\ \ln 2, & \alpha \in (3,\infty), \end{cases}$$

那么方程 (4) 与 (3) 的零解全局吸引.

[17] 把条件 (6) 减弱为

$$\int_{g(t)}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s \le M(\alpha), \qquad \text{对充分大的 } t, \tag{8}$$

这里的

$$M(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha \in [1, G(1)),\ G(1) = 2.05\cdots, \\ M(\alpha)(> \ln 2), & \alpha \in [G(1), \infty). \end{cases}$$

[19] 更进一步改进了上述结果. 通过直接研究方程 (1), 得到了：如果 (2) 与 (5) 成立，且对每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, 使得如果 $\inf\limits_{s\in[g(t),t]} \phi(s) \ge \varepsilon$, 就有

$$F(t,\phi) \ge \eta r(t) \ \text{ 及 } \ F(t,-\phi) \le -\eta r(t), \qquad t \ge 0, \tag{9}$$

以及

$$\int_{g(t)}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s \le \delta_0 = 1.462\cdots, \qquad \text{对充分大的 } t, \tag{10}$$

其中 δ_0 是超越方程 $x + e^{-x} = 1 + \ln 2$ 的根，则方程 (1) 与 (3) 的零解全局吸引.

我们在已有工作的基础上，对方程 (1) 得到了下述结论：

定理 1.1 设 $\alpha \ge 1.78$, (2), (5) 成立，且

$$\int_{g(t)}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s \le \frac{3}{2}, \qquad \text{对充分大的 } t, \tag{11}$$

则方程 (1) 与 (3) 的零解全局吸引.

推论 1.2 设 $\alpha \ge 1.78$, (5) 成立，且

$$\int_{g(t)}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s \le \frac{3}{2}, \qquad \text{对充分大的 } t, \tag{12}$$

则方程 (4) 与 (3) 的零解全局吸引.

当 $\alpha \ge 1.78$ 时，定理 1.1 改进了上面提到的其它结果.

注 1.3 在本文将要投稿时，看到 [20] 把本文条件 (10) 或 (11) 减弱为

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \int_{g(t)}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s \le \frac{3}{2},$$

但是仔细一验算，发现该文同时要求不等式组

$$\begin{cases} \ln(1+x) \le y - \dfrac{1}{6}y^2, \\ -\ln(1-y) \le \begin{cases} x + \dfrac{1}{6}x^2, & 0 \le x < 1, \\ x^\alpha + \dfrac{1}{6}x^{2\alpha}, & x \ge 1 \end{cases} \end{cases} \tag{$*$}$$

有唯一解 $(0,0)$ 不易满足. 如当 $\alpha \geq 5$ 时， $x=1.2,\ y=0.94$ 便为不等式组 $(*)$ 的另一个根，故 [20] 中定理不能应用，而我们定理 1.1 却可以进行判断.

下面第 2 节给出一些引理，第 3 节给出引理 2.5 和定理 1.1 的证明.

2　基本引理

本节给出一些基本引理，其中引理 2.1–2.3 可从 [12] 找到证明，引理 2.4 引自 [8], 引理 2.5 下一节给出证明.

引理 2.1　假设 (2) 成立，则初值问题 (1) 与 (3) 的解 $x(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上存在且满足 $x(t)>-1,\ t\geq 0$.

引理 2.2　假设 (2) 与 (5) 成立，则当 t 趋于无穷时， (1) 与 (3) 的每个非振动解趋于零.

引理 2.3　假设 (2) 与 (5) 成立，如果存在正常数 M 使得

$$\int_{g(t)}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s \leq M, \qquad \text{对充分大的 } t,$$

则 (1) 与 (3) 的解最终满足

$$-1+\exp[-M(e^M-1)^\alpha] < x(t) < e^M-1.$$

引理 2.4　不等式组

$$\ln(1+x) \leq y-\frac{1}{6}y^2, \qquad -\ln(1-y) \leq x+\frac{1}{6}x^2$$

在区域 $\{(x,y): x\geq 0,\ 0\leq y<1\}$ 内有唯一解 $x=y=0$.

引理 2.5　设 $P_0=1,\ Q_0=e^{\frac{3}{2}(1-e^{-\frac{3}{2}})^\alpha}-1,\ P_n=1-e^{-\frac{3}{2}Q_{n-1}^\alpha},\ Q_n=e^{\frac{3}{2}(1-e^{-\frac{3}{2}P_n^\alpha})^\alpha}-1,\ n=1,2,\cdots$, 则

(I)　$\{P_n\},\{Q_n\}$ 单调递减有下界.

(II)　$\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P^* < 1$.

(III)　如果 $\alpha\geq 1.78$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q^* < 1$.

(IV)　若 (P,Q) 是不等式

$$\begin{cases} \ln(1+Q) \leq \dfrac{3}{2}\big(1-e^{-\frac{3}{2}P^\alpha}\big)^\alpha, \\ -\ln(1-P) \leq \dfrac{3}{2}Q^\alpha \end{cases}$$

在区域 $\{(P,Q)\mid 0\leq P\leq 1,\ 0\leq Q<\infty\}$ 内的解，则有 $P\leq P^*,\ Q\leq Q^*$.

3　主要结果的证明

引理 2.5 的证明　由数学归纳法易证 (I), (II), (IV) 成立，下证 (III).

当 $\alpha \geq 3.06$ 时，由 $\ln(1+Q_0) \leq \frac{3}{2}(1-e^{-\frac{3}{2}})^{\alpha} < \ln 2$ 及 (I) 容易得到 $Q^* < 1$.

当 $\alpha \in [1.78, 3.06]$ 时,我们把区间分为 $[1.78, 1.8]$, $[1.8, 1.85]$, $[1.85, 2.0]$, $[2.0, 2.5]$, $[2.5, 3.06]$, 分别记为 $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \cdots, 5$.

当 $\alpha \in [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \cdots, 5$ 时，我们断言必存在一个 $N > 0$ 使得 $Q_N < 1$, 否则设对所有的 n, $Q_n \geq 1$, 则取 $P_{0,i} = 1$, $Q_{0,i} = e^{\frac{3}{2}(1-e^{-\frac{3}{2}})^{a_i}} - 1$, $P_{n,i} = 1 - e^{-\frac{3}{2}Q_{n-1,i}^{b_i}}$, $Q_{n,i} = e^{\frac{3}{2}\left(1-e^{-\frac{3}{2}P_{n,i}^{a_i}}\right)^{a_i}} - 1$, $n = 1, 2, \cdots$. 易知 $P_n \leq P_{n,i}$, $Q_n \leq Q_{n,i}$, 而存在 $N > 0$, 使得 $Q_{N,i} < 1$ (这由计算机程序实现)，这与前面假设矛盾．故当 $\alpha \in [a_i, b_i]$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q^* < 1$.

定理 1.1 的证明　设 $x(t)$ 是 (1) 与 (3) 的解，由引理 2.1 知 $x(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上存在且满足 $x(t) > -1$, $t \geq 0$. 又由引理 2.2 知，当 $x(t)$ 非振动时，

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0. \tag{13}$$

故下面只证明当 $x(t)$ 为 (1) 与 (3) 的振动解时， (13) 式成立．由引理 2.3 知 $x(t)$ 有界，因此可令

$$u = \limsup_{t\to\infty} x(t), \qquad v = -\liminf_{t\to\infty} x(t). \tag{14}$$

由引理 2.3 知 $0 \leq v < 1$, $0 \leq u < \infty$. 对任意 $0 < \varepsilon < 1 - v$, 由 (11) 与 (14) 知存在 $t_0 = t_0(\varepsilon) > 0$, 使得有

$$\int_{g(t)}^{t} r(s)\,\mathrm{d}s \leq \frac{3}{2}, \qquad \text{当 } t \geq g(t_0) \text{ 时} \tag{15}$$

以及

$$-v - \varepsilon < x(t) < u + \varepsilon, \qquad \text{当 } t \geq g(t_0) \text{ 时.} \tag{16}$$

记 $u_1 = u + \varepsilon$, $v_1 = v + \varepsilon$, 由 (1),(2) 及 (16) 式得

$$\frac{x'(t)}{1 + x(t)} \leq r(t) v_1^{\alpha}, \qquad t \geq g(t_0) \tag{17}$$

和

$$\frac{x'(t)}{1 + x(t)} \geq -r(t) u_1^{\alpha}, \qquad t \geq g(t_0). \tag{18}$$

由解 $x(t)$ 的振动性，可取 $\{l_n\}$ 是一个单调递增且趋于无穷的实数序列，满足 $g(l_n) > t_0$, $x(l_n) > 0$, $x'(l_n) = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x(l_n) = u$. 取 $\xi_n = \sup\{t \in [g(l_n), l_n) | x(t) = 0\}$, 于是对 $t \in (\xi_n, l_n]$ 有 $x(t) > 0$. 对 $t_0 \leq t \leq \xi_n$, 由 (17) 式可得

$$x(t) \geq -1 + \exp\Big(-v_1^{\alpha} \int_t^{\xi_n} r(s)\,\mathrm{d}s\Big).$$

因此，当 $\xi_n \le t \le l_n$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{x'(t)}{1+x(t)} \le & r(t)\max\Big\{0, \sup_{s\in[g(t),t]}(-x(s))\Big\}^{\alpha}\\ = & r(t)\max\Big\{0, \sup_{s\in[g(t),\xi_n]}(-x(s))\Big\}^{\alpha}\\ \le & r(t)\Big[1-\exp\Big(-v_1^{\alpha}\int_{g(t)}^{\xi_n} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\Big]^{\alpha},\end{aligned} \tag{19}$$

由于 $v_1 \le 1$, 因此可得

$$\frac{x'(t)}{1+x(t)} \le \min\Big\{r(t)v_1, r(t)\Big[1-\exp\Big(-v_1\int_{g(t)}^{\xi_n} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)\Big]\Big\}, \qquad \xi_n \le t \le l_n. \tag{20}$$

由 [8] 已证明了

$$\ln[1+x(l_n)] \le v_1 - \frac{1}{6}v_1^2, \qquad n=1,2,\cdots. \tag{21}$$

在 (21) 中令 $n\to\infty$ 及 $\varepsilon\to 0$ 得

$$\ln(1+u) \le v - \frac{1}{6}v^2. \tag{22}$$

下面取 $\{s_n\}$ 是一个单调递增且趋于无穷的实数序列, 满足 $g(s_n) > t_0$, $x(s_n) < 0$, $x'(s_n) = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x(s_n) = -v$. 取 $\eta_n = \sup\{t \in [g(s_n), s_n) | x(t) = 0\}$, 于是对 $t \in (\eta_n, s_n]$ 有 $x(t) < 0$. 由 (18) 式及类似推导得

$$-\frac{x'(t)}{1+x(t)} \le r(t)\Big[\exp\Big(u_1^{\alpha}\int_{g(t)}^{\eta_n} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)-1\Big]. \tag{23}$$

又对 (18) 两边从 η_n 到 s_n 积分得

$$-\ln[1+x(s_n)] \le \frac{3}{2}u_1^{\alpha}, \qquad n=1,2,\cdots,$$

由 (19) 式得

$$\frac{x'(t)}{1+x(t)} \le r(t)\Big[1-\exp\Big(-\frac{3}{2}v_1^{\alpha}\Big)\Big]^{\alpha},$$

于是有

$$\ln[1+x(l_n)] \le \frac{3}{2}\Big[1-\exp\Big(-\frac{3}{2}v_1^{\alpha}\Big)\Big]^{\alpha},$$

令 $n\to\infty$ 及 $\varepsilon\to 0$ 得

$$\begin{cases}\ln(1+u) \le \dfrac{3}{2}\Big[1-\exp\Big(-\dfrac{3}{2}v^{\alpha}\Big)\Big]^{\alpha},\\ -\ln(1-v) \le \dfrac{3}{2}u^{\alpha},\end{cases}$$

结合引理 2.5, 知当 $\alpha \in [1.78, \infty)$ 时，有 $u < 1$. 我们取 ε 充分小，使得 $u_1 < 1$. 由 (23) 与 (18), 于是便有

$$-\frac{x'(t)}{1+x(t)} \le \min\left\{r(t)u_1, r(t)\Big[\exp\Big(u_1\int_{g(t)}^{\eta_n} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big)-1\Big]\right\}, \qquad \eta_n \le t \le s_n. \tag{24}$$

因为 $u_1 < 1$, 所以 $\frac{3}{2} - \frac{\ln(1+u_1)}{u_1} < 1$, 下面考虑两种情形：

情形 I $\int_{\eta_n}^{s_n} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau \le \frac{3}{2} - \frac{\ln(1+u_1)}{u_1} < 1$.

显然，$-\ln[1+x(s_n)] \le u_1\int_{\eta_n}^{s_n} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau \le u_1 \le u_1 + \frac{1}{6}u_1^2$.

情形 II $\frac{3}{2} - \frac{\ln(1+u_1)}{u_1} < \int_{\eta_n}^{s_n} r(\tau)\,\mathrm{d}\tau \le \frac{3}{2}$.

此时取 $p_n \in (\eta_n, s_n)$, 满足 $\int_{\eta_n}^{p_n} r(s)\,\mathrm{d}s \equiv \frac{3}{2} - \frac{\ln(1+u_1)}{u_1}$, 对 (24) 两边积分得

$$\begin{aligned}
&-\ln(1+x(s_n))\\
\le& u_1\int_{\eta_n}^{p_n} r(s)\,\mathrm{d}s + \int_{p_n}^{s_n} r(t)\Big[\exp\Big(u_1\int_{g(t)}^{\eta_n} r(s)\,\mathrm{d}s\Big)-1\Big]\,\mathrm{d}t\\
\le& u_1\int_{\eta_n}^{p_n} r(s)\,\mathrm{d}s - \int_{p_n}^{s_n} r(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\frac{1}{u_1}\Big[\exp\Big(u_1\Big(\frac{3}{2}-\int_{\eta_n}^{p_n} r(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big) - \exp\Big(u_1\Big(\frac{3}{2}-\int_{\eta_n}^{s_n} r(s)\Big)\Big)\Big]\\
=& u_1\int_{\eta_n}^{p_n} r(s)\,\mathrm{d}s - \int_{p_n}^{s_n} r(s)\,\mathrm{d}s\\
&+\frac{1}{u_1}\Big[1+u_1-\exp\Big(u_1\Big(\frac{3}{2}-\int_{\eta_n}^{s_n} r(s)\,\mathrm{d}s\Big)\Big)\Big]\\
\le&(1+u_1)\int_{\eta_n}^{p_n} r(s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\\
=&-\frac{(1+u_1)\ln(1+u_1)}{u_1} + \frac{3}{2}u_1 + 1 \le u_1 + \frac{1}{6}u_1^2.
\end{aligned}$$

上面利用了不等式 $(1+u_1)\ln(1+u_1) \ge u_1 + \frac{1}{2}u_1^2 - \frac{1}{6}u_1^3$.

综合以上情形，我们得到了

$$-\ln[1+x(s_n)] \le u_1 + \frac{1}{6}u_1^2, \qquad n = 1, 2, \cdots.$$

在上式中令 $n \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ 即得

$$-\ln(1-v) \le u + \frac{1}{6}u^2. \tag{25}$$

从 (21) 与 (25) 并结合引理 2.4 知，当 $\alpha \in [1.78, \infty)$ 时，$u = v = 0$.

参 考 文 献

[1] Myskis A. D. On the Solutions of Linear Homogeneous Differential Equations of the First Order and Stable Type with Retarded Arguments. *Mat. Sb.*, 1951, 28: 641–658

[2] Wright M. A Non-linear Difference-differential Equation. *J. Reine Angew Math.*, 1955, 194(1): 66–87

[3] Yorke J. A. Asymptotic Stability for One Demensional Differential- delay Equations. *J. Diff. Eq.*, 1970, 7: 189–202

[4] May M. Time-delay Versus Stability in Population Models with Two and Three Trophic Levels. *Ecology*, 1973, 54(2): 315–326

[5] Yoneyama T, Sugie J. Exponentially Asymptotically Stable Dynamical Systems. *Appl. Anal.*, 1988, 27: 235–242

[6] Yoneyama T. The $\frac{3}{2}$ Stability Theorem for One-dimensional Delay- differential Equations with Unbounded Delay. *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, 165: 133–143

[7] Matsunaga H. etc. Global Attractivity Results for Nonlinear Delay Differential Equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, 234: 77–90

[8] 庾建设．一类泛函微分方程零解的全局吸引性及应用． 中国科学(A 辑), 1996, 26(1): 23–33
(Jianshe Yu. The Global Attractivity of the Zero Solution of Some Kind Functional Differential Equation and Its Application. *Science in China* (Series A), 1996, 26(1): 23–33)

[9] 唐先华，庾建设．一类非线性 FDE 整体解的存在性及全局吸引性． 数学年刊, 2000, 21A(6): 655–666
(Tang Xianhua, Yu Jianshe. Existence and Global Attractivity of Entire Solution of Some Kind of Nonlinear Functional Differential Eqaution (FDE). *Chinese Annals of Mathematics*, 2000, 21A(6): 655–666)

[10] 唐先华，庾建设． "食物有限" 型泛函微分方程零解的 $\frac{3}{2}$- 全局吸引性． 中国科学 (A 辑), 2000, 30(10): 900–913
(Tang Xianhua, Yu Jianshe. The 3/2–global Attractivity of the Zero Solution of the Food-limited Functional Differential Equation. *Science in China* (Series A), 2000, 30(10): 900–913)

[11] Gopalsamy K. Global Stability in the Delay-logistic Equation with Discrete Delays. *Houston J. Math.*, 1990, 16(3): 347–356

[12] Chen M P, Yu J S, Zeng D G, Li J W. Global Attractivity in a Generalized Nonautonomous Delay Logistic Equation. *Bulletin of Institute of Mathemathics Academia Sinica*, 1994, 22(2): 91–99

[13] Li J. W. Global Attractivity in a Generalized Delay Logistic Equation. *Appl. Math. -JCU* , 1996,11B, 165-174

[14] 申建华，庾建设，王志成．一维非线性泛函微分方程的全局吸引性． 高校应用数学学报 (A 辑), 1996, 11(1): 1–6
(Shen Jianhua, Yu Jianshe, Wang Zhicheng. Global Attractivity for One Dimensional Nonlinear Functional Differential Equation. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A*, 1996, 11(1): 1–6)

[15] Yu J S, Wu J H, Zou X F. On a Hyperlogistic Delay Equation. *Glasgow Math J.* , 1996, 38: 255–261

[16] So Joseph W H, Yu J S. Global Attractivity for a Population Model with Time Delay. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1995, 123: 2687–2694

[17] 冯伟，赵爱民，燕居让．广义 Logistic 方程的全局吸引性． 高校应用数学学报 (A 辑), 2001, 16(2): 136–142

(Feng Wei, Zhao Aimin, Yan Jurang. Global Attractivity of the General Logistic Equation. *Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A*, 2001, 16(2): 136–142)

[18] 冯伟，段永瑞，燕居让．一类非自治非线性时滞微分方程的全局吸引性． 应用数学学报, 2002, 25(2): 216–222
(Feng Wei, Duan Yongrui, Yan Jurang. Global Attractivity of Some Kind of Nonautonomous Nonlinear Delay Differential Equation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2002, 25(2): 216–222)

[19] 王晓萍, 廖六生. 广义 Logistic 型泛函微分方程零解的全局吸引性. 应用数学学报, 2004, 24(1): 172–179
(Xiaoping Wang, Liusheng Liao. Global Attractivity of the Zero Solution of the General Logistic Functional Differential Equation. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2004, 24(1): 172–179)

[20] 汪东树, 王全义. 广义 Logistic 型泛函微分方程零解的全局吸引性. 华侨大学学报, 2011, 32(1): 103–108
(Dongshu Wang, Quanyi Wang. Global Attractivity of the Zero Solution of the General Logistic Functional Differential Equation. *J. Huaqiao University* (Natural Science), 2011, 32(1): 103–108)

The 3/2-Global Attractivity of the Zero Solution of the General Logistic Delay Differential Equation

FENG Wei WANG Jinliang

(*Department of Mathematics & LMIB, Beihang University, Beijing* 100191)

(*E-mail: jlwang@buaa.edu.cn*)

YAN Jurang

(*Department of Mathematics, Shanxi University, Taiyuan* 030006)

Abstract The general Logistic delay differential equation

$$x'(t) + (1 + x(t))F(t, x_t^{\alpha}) = 0, \qquad t \geq 0 \tag{$*$}$$

is considered. By using some analysis methods and techniques, a sufficient condition is obtained for the 3/2-global attractivity of the zero solution of $(*)$, which generalized and improved the related results in the literature.

Key words general logistic delay differential equation; the 3/2-Global attractivity; oscillation; nonoscillation

MR(2000) Subject Classification 34K15

Chinese Library Classification O175.12; O175.15