第 36 卷 第 6 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 36 No. 6
2013 年 11 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Nov., 2013

最大度为 8 且无 4- 扇的平面图的 9- 全可染性 *

李慧慧 王应前

(浙江师范大学数理与信息工程学院，金华 321004)

(E-mail: lihuihui0123@163.com)

摘 要 设 G=(V,E) 是一个以 V 为顶点集， E 为边集的图. 图 G 的一个 k- 全染色是一个映射 ϕ: $V\cup E\rightarrow\{1,2,\cdots,k\}$ 使得 $\phi(x)\neq\phi(y)$ 对所有相邻或相关联的元素 x 和 y 都成立. 若 G 有一个 k- 全染色，则说 G 是 k- 全可染的. 令 Δ 为 G 的最大度. 显然，对 G 进行全染色，至少需要 $\Delta+1$ 个颜色. Behzad 和 Vizing 相互独立地猜想每个 (简单) 图都是 ($\Delta+2$)- 全可染的. 已知最大度 $\Delta\geq 9$ 的平面图是 ($\Delta+1$)- 全可染的. 通过研究极小反例的新的可约性质，本文运用权转移方法证明了最大度为 8 且不含 4- 扇的平面图是 9- 全可染的，这里的 4- 扇是指交于一点的 4 个相继的 3- 面. 这一结果改进了若干同类型的相关结果.

关键词 平面图；全染色；最大度；扇

MR(2000) 主题分类 05C15

中图分类 O157.5

1 引言

本文所研究的图是有限简单无向图，文中未加定义的术语和记号请参阅 [1].

如果图 G 可嵌入到平面内，使得边仅在端点处相交，那么称图 G 是可平面图. 可平面图在平面内的一个嵌入叫平面图. 对于平面图 G, 用 V, E, F, Δ 和 δ 分别表示平面图 G 的顶点集，边集，面集，最大度和最小度. 两个面相邻是指这两个面至少有一条公共边. 文中的三角形是指大小为 3 的面. 相交于一点 v 的 k 个相继三角形叫做 k-扇. v 叫做这个扇的扇心. 说两个扇相交，是指这两个扇有公共的扇心.

图 $G=(V,E)$ 的一个 k- 全染色是一个映射 ϕ: $V\cup E\rightarrow\{1,\cdots,k\}$, 使得对任意相邻或相关联的元素 x, $y\in V\cup E$, 都有 $\phi(x)\neq\phi(y)$. 若 G 允许 k- 全染色，则称 G 是 k- 全

本文 2013 年 3 月 31 日收到. 2013 年 6 月 31 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目 (11271335).

可染的．显然，给每一个图进行全染色至少要用 $\Delta+1$ 种颜色． Vizing[2] 和 Behazd[3] 猜想：任何简单图 G 都是 $(\Delta+2)$- 全可染的．这一猜想就是著名的全染色猜想 (Total Coloring Conjecture), 简记为 TCC.

对于平面图, 多数情况下是 $(\Delta+1)$- 全可染的. 首先，Borodin 等人 [4] 证明了 $\Delta\geq 11$ 的平面图是 $(\Delta+1)$- 全可染的；其次 Wang[5] 将前述结果改进到 $\Delta=10$, 接着 Kowalik 等人 [6] 又继续将结果改进到 $\Delta=9$. 至于 $\Delta\leq 8$ 想要证明同样整洁的结果似乎非常困难．考虑 $\Delta=8$ 的平面图的 9- 全可染性，候建锋等 [7] 证明了 $\Delta\geq 8$ 且无 4- 圈的平面图是 9- 全可染的．此后，无 4- 圈的这个附加条件不断被减弱为：

(1) 无 5- 圈或无 6- 圈 [8]; (2) 无带弦 5- 圈或无带弦 6- 圈 [9]; (3) 无相交三角形，即无相交 1- 扇 [10]; (4) 无相邻三角形，即无 2- 扇 [11]; (5) 无相交带弦 4- 圈，即无相交 2- 扇 [12]; (6) 无 3- 扇 (原文为无带两条弦的 5- 圈)[13].

本文将上述附加条件继续减弱到无 4- 扇，即有

定理 1 设 G 是 $\Delta=8$ 且无 4- 扇的平面图，则 G 是 9- 全可染的.

2　结构引理

假设定理 1 不成立，设图 G 是定理 1 的一个使 $\sigma(G)=|V|+|E|$ 最小的反例，即 G 是一个 $\Delta=8$ 且无 4- 扇的平面图，它本身不是 9- 全可染的，但它的每一个真子图 G' 都是 9- 全可染的：这是因为若 G' 的最大度仍然是 8, 根据 G 的选取， G' 是 9- 全可染的．若 G' 的最大度小于 8, 根据 [14] 的结果 (最大度不超过 7 的平面图是 9- 全可染的) 知， G' 也是 9- 全可染的．据此可推得图 G 有以下结构性质：

引理 2[4]

(1) G 是 2- 连通的，从而 G 的最小度 $\delta\geq 2$, 且 G 的每个面的边界都是圈.

(2) 设 $xy\in E$. 若 $d(x)\leq 4$, 则 $d(x)+d(y)\geq\Delta+2=10$.

(3) G 中所有 (2,8)- 边所导出的子图是个森林 (为简洁起见,称边 xy 为一条 $(d(x),d(y))$- 边).

特别地，由 (2) 可知， G 中 2- 点只与 8- 点相邻， 3- 点只与 7^+- 点相邻， 4- 点只与 6^+- 点相邻，并且任意的两个 4^-- 点不相邻.

对于点 $v\in V$, 面 $f\in F$, $d(v)$ 表示与 v 相关联的边的条数，叫做 v 的度数， $d(f)$ 表示与 f 相关联的边的条数，叫做 f 的度数．把度数为 k 的点叫做 k- 点， k^+- 点表示度数至少为 k 的点， k^-- 点表示度数至多为 k 的点．可类似定义 k- 面， k^+- 面和 k^-- 面等概念．用 $f=[v_1v_2\cdots v_k]$ 表示一个依某时针方向顶点依次为 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 的 k- 面，并称 f 为一个 $(d(v_1),d(v_2),\cdots,d(v_k))$- 面．用 $n_d(v)$ 表示与 v 相邻的 d- 点的个数，用 $f_d(v)$ 表示与 v 相关联的 d- 面的个数.

引理 3[6,11] G 不含图 1 所示的结构，其中标记为 $\bullet$ 的点在 G 中没有其它邻点.

证　图中构型 (1-2) 和 (5-8) 的可约性证明可参见 [11]. 构型 (3-4) 和 (9-10) 可参见 [6].

引理 4[9,15] 设 $v\in V(G)$ 且 $d(v)=8$, v_1, v_2, $\cdots$, v_k 是 v 的某些相继邻点，其中

$d(v_1)=d(v_k)=2$, $d(v_i)\geq 3$, $2\leq i\leq k-1$, $3\leq k\leq 8$. 若与 v, v_i, v_{i+1} $(1\leq i\leq k-1)$ 关联的面均为 4- 面，则 $v_2, v_3, \cdots, v_{k-1}$ 中至少有一个点为 4^+- 点.

引理 5[13] 设 $v\in V(G)$ 且 $d(v)=8$, u 是 v 的一个 2- 邻点， $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 是 v 的 k 个相继 3^+- 邻点， $4\leq k\leq 7$. 设 $[v_1vv_2]$, $[v_{k-1}vv_k]$ 均为 3- 面，若与 v, v_i, v_{i+1} $(2\leq i\leq k-2)$ 关联的面均为 4- 面，则 $v_2, v_3, \cdots, v_{k-1}$ 中至少有一个点为 4^+- 点.

引理 6 G 不含图 2 所示的结构，其中标记为 $\bullet$ 的点在 G 中没有其它邻点.

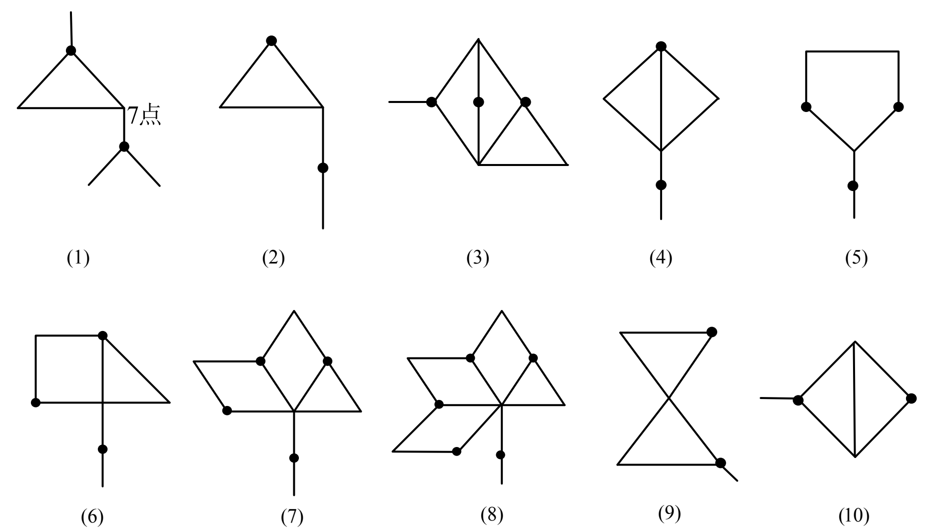

图 1 已知可约构型

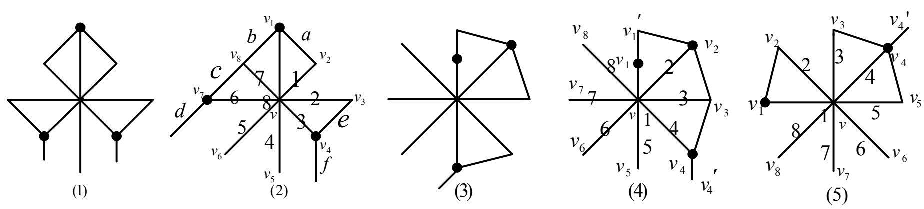

图 2 新可约构型

证

(1) 构型 (1) 的可约性证明可参见 [6].

(2) 令 $G'=G-vv_1$. 根据 G 的选取， G' 有一个 9- 全染色 ϕ. 抹去 3- 点 v_1, v_4, v_7 上的颜色. 不妨设 ϕ 在构型 (2) 上的余下局部染色如图 2(2) 所示. 若 $9\notin\{a,b\}$, 则可将 9 染给 vv_1, 可得 G 的一个 9- 全染色，矛盾. 所以 $9\in\{a,b\}$. 分两种情形讨论如下：

(i) $a=9$.

若 $b=1$, 则 $9\in\{e,f\}$, 否则可将 9 染给 vv_4, 然后将 3 染给 vv_1. 又可断言 $7\in\{e,f\}$,

若不然，交换 v_8v_1 和 v_8v 的颜色，以及 v_2v_1 和 v_2v 的颜色，然后将 7 染给 vv_4, 再将 3 染给 vv_1. 这样， $\{e,f\}=\{7,9\}$. 若 $e=9$, 则交换 v_3v_4 和 v_3v 的颜色，再将 2 染给 vv_1. 若 $e=7$, 则依次交换 v_3v_4 和 v_3v 的颜色， v_8v_1 和 v_8v 的颜色，以及 v_2v_1 和 v_2v 的颜色，再将 2 染给 vv_1.

设 $b\neq 1$. 若 $b=6$, 则易证 $\{e,f\}=\{1,9\}$. 不妨设 $e=9$. 交换 v_3v_4 和 v_3v 的颜色，再将 2 染给 vv_1. 设 $b\neq 6$. 显然 $b\neq 7$. 此时易证 $\{c,d\}=\{1,9\}$. 若 $c=9$, 则交换 v_8v_7 和 v_8v 的颜色，再将 7 染给 vv_1. 若 $c=1$, 则交换 v_8v_7 和 v_8v 的颜色，以及 v_2v_1 和 v_2v 的颜色，再将 7 染给 vv_1.

(ii) $b=9$.

若 $a=7$, 则 $9\in\{e,f\}$, 否则可将 9 染给 vv_4, 然后将 3 染给 vv_1. 又可断言 $1\in\{e,f\}$, 若不然，交换 v_8v_1 和 v_8v 的颜色，以及 v_2v_1 和 v_2v 的颜色. 然后将 1 染给 vv_4, 再将 3 染给 vv_1. 这样， $\{e,f\}=\{1,9\}$. 若 $e=9$, 则交换 v_3v_4 和 v_3v 的颜色，再将 2 染给 vv_1. 若 $e=1$, 则依次交换 v_3v_4 和 v_3v 的颜色， v_2v_1 和 v_2v 的颜色，以及 v_8v_1 和 v_8v 的颜色，再将 2 染给 vv_1.

设 $a\neq 7$. 若 $a=6$, 则易证 $\{e,f\}=\{7,9\}$. 若 $e=9$. 则交换 v_3v_4 和 v_3v 的颜色，再将 2 染给 vv_1. 若 $e=7$, 则交换 v_3v_4 和 v_3v 的颜色，以及 v_8v_1 和 v_8v 的颜色，再将 2 染给 vv_1. 设 $a\neq 6$. 显然 $b\neq 7$. 此时易证 $d=9$. 现在可交换 v_8v_1 和 v_8v 的颜色，再将 7 染给 vv_7, 然后将 6 染给 vv_1. 最后易将 v_1 和 v_4 及 v_7 染好色，这样便得到 G 的一个 9- 全染色，矛盾.

(3) 构型 (3) 的可约性证明可参见 [12].

(4) 令 $G'=G-vv_1$. 根据 G 的选取， G' 有一个 9- 全染色 ϕ. 抹去低度点 v_1, v_2 和 v_4 上的颜色. 不妨设 ϕ 在构型 (4) 上的余下局部染色如图 2(4) 所示. 可断言 $\phi(v_1v_1')=9$, 否则可将 9 染给 vv_1. 显然 $\phi(v_2v_1')\neq 9$. 若 $\phi(v_2v_3)\neq 9$, 则可将 9 然给 vv_2, 再将 2 染给 vv_1. 所以 $\phi(v_2v_3)=9$. 显然 $\phi(v_3v_4)\neq 9$. 若 $\phi(v_4v_4')\neq 9$, 则可将 9 然给 vv_4, 再将 4 染给 vv_1. 所以 $\phi(v_4v_4')=9$. 若 $\phi(v_2v_1')\neq 3$, 则可交换 v_3v 和 v_3v_2 的颜色，然后可将 3 染给 vv_1. 所以 $\phi(v_2v_1')=3$. 将路 $P=vv_3v_2v_1'v_1$ 上的边依次改染为 9,3,9,3, 显然 $\phi(v_3v_4)\neq 3$. 将 3 染给 vv_4, 再将 4 染给 vv_1. 最后将 v_1 和 v_2 及 v_4 染好色，易得 G 的一个 9- 全染色，矛盾.

(5) 令 $G'=G-vv_1$. 根据 G 的选取， G' 有一个 9- 全染色 ϕ. 抹去低度点 v_1 和 v_4 上的颜色. 不妨设 ϕ 在构型 (5) 上的余下局部染色如图 2(5) 所示. 可断言 $\phi(v_1v_2)=9$, 否则可将 9 染给 vv_1. 若 $9\notin\{\phi(v_3v_4),\phi(v_4v_5),\phi(v_4v_4')\}$, 则可将 9 染给 vv_4, 再将 4 染给 vv_1. 所以 $9\in\{\phi(v_3v_4),\phi(v_4v_5),\phi(v_4v_4')\}$. 若 $2\notin\{\phi(v_3v_4),\phi(v_4v_5),\phi(v_4v_4')\}$, 则可交换 v_2v 和 v_2v_1 的颜色，将 2 染给 vv_4, 再将 4 染给 vv_1. 所以 $2\in\{\phi(v_3v_4),\phi(v_4v_5),\phi(v_4v_4')\}$. 故 $\phi(v_3v_4)$ 和 $\phi(v_4v_5)$ 中至少有一个色属于 $\{2,9\}$. 由对称性，不妨设 $\phi(v_3v_4)\in\{2,9\}$. 此时可断言 $3\in\{\phi(v_4v_5),\phi(v_4v_4')\}$, 即 $\{\phi(v_3v_4),\phi(v_4v_5),\phi(v_4v_4')\}=\{2,3,9\}$, 否则可交换 v_3v 和 v_3v_4 的颜色 (若 $\phi(v_3v_4)=2$, 则交换 v_2v 和 v_2v_1 的颜色), 再将 3 染给 vv_1. 若 $\phi(v_4v_5)=3$, 则可交换 v_3v 和 v_3v_4 的颜色，以及 v_5v_4 和 v_5v 的颜色 (若 $\phi(v_3v_4)=2$, 则交换 v_2v 和 v_2v_1 的颜色), 再将 5 染给 vv_1. 故 $\phi(v_4v_4')=3$. 若 $\phi(v_3v_4)=9$, $\phi(v_4v_5)=2$, 则

交换 v_5v 和 v_5v_4 的颜色，以及 v_2v_1 和 v_2v 的颜色，然后可将 5 染给 vv_1. 若 $\phi(v_3v_4)=2$, $\phi(v_4v_5)=9$, 则交换 v_5v 和 v_5v_4 的颜色，再将 5 染给 vv_1. 最后易将 v_1 和 v_4 染好色，得到 G 的一个 9- 全染色，矛盾.

3 权转移

以下将运用权转移方法导出矛盾，从而完成定理 1 的证明. 首先，给图 G 的每个顶点 v 分配初始权 $\mathrm{ch}(v)=2d(v)-6$, 给图 G 的每个面 f 分配初始权 $\mathrm{ch}(f)=d(f)-6$, 由握手引理 $\sum\limits_{v\in V}d(v)=2|E|=\sum\limits_{f\in F}d(f)$ 和连通平面图的欧拉公式 $|V|-|E|+|F|=2$ 知: $\sum\limits_{v\in V}(2d(v)-6)+\sum\limits_{f\in F}(d(f)-6)=-12$, 即 $\sum\limits_{x\in V\cup F}\mathrm{ch}(x)=-12$.

以下将定义一个权转移规则，重新分配点和面的权，设 $\mathrm{ch}'(x)$ 是重新分配点和面的权后元素 $x\in V\cup F$ 的新权. 将要证明对每一个 $x\in V\cup F$ 都有 $\mathrm{ch}'(x)\geq 0$, 从而得到 $\sum\limits_{x\in V\cup F}\mathrm{ch}'(x)\geq 0$. 另一方面，因为如果只是在同一个图的点和面之间进行权转移，权总和应该保持不变，所以 $-12\geq 0$, 这个矛盾完成了定理 1 的证明.

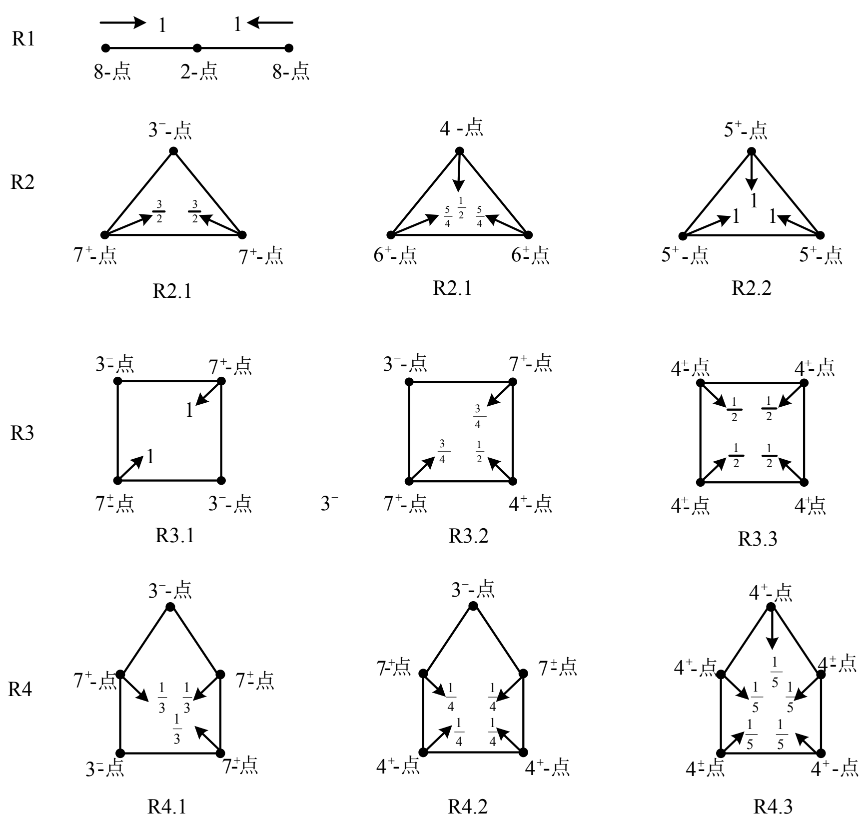

图 3 权转移规则

设 $f=[v_1v_2\cdots v_k]\in F$, 用 $(d(v_1),\, d(v_2),\, \cdots,\, d(v_k))\to(c_1,\, c_2,\, \cdots,\, c_k)$ 表示顶点 v_i 转向面 f 的权为 c_i $\ (i=1,\,2,\,\cdots,\,k)$. 仿照 [12, 15], 定义所需要的权转移规则如下 (参见图 3).

R1: 与 2- 点 v 相邻的两个 8- 点都向 v 转 1.

R2: 对于 3- 面 $[v_1v_2v_3]$

(R2.1) $(3^-,7^+,7^+)\to\left(0,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$

(R2.2) $(4,6^+,6^+)\to\left(\frac{1}{2},\frac{5}{4},\frac{5}{4}\right)$

(R2.3) $(5^+,5^+,5^+)\to(1\ ,1,1)$

R3: 对于 4- 面 $[v_1v_2v_3v_4]$

(R3.1) $(3^-,7^+,3^-,7^+)\to(0,1,0,1)$

(R3.2) $(3^-,7^+,4^+,7^+)\to\left(0,\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$

(R3.3) $(4^+,4^+,4^+,4^+)\to\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

R4: 对于 5- 面 $[v_1v_2v_3v_4v_5]$

(R4.1) $(3^-,7^+,3^-,7^+,7^+)\to\left(0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

(R4.2) $(3^-,7^+,4^+,4^+,7^+)\to\left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

(R4.2) $(4^+,4^+,4^+,4^+,4^+)\to\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)$.

首先考察面的新权：

由引理 2(2) 知， 3^-- 点的邻点为 7^+- 点．所以， 3- 面至多关联一个 3^-- 点． 4- 面和 5- 面至多关联两个 3^-- 点.

设 $d(f)=3$. 若 f 关联一个 3^-- 点，则 f 是 $(3^-,7^+,7^+)$- 面．由 R2.1, $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)+2\times\frac{3}{2}=-3+3=0$. 若 f 不关联 3^-- 点, 则 f 是 $(4,6^+,6^+)$- 面, 或 $(5^+,5^+,5^+)$- 面. 由 R2.2 和 R2.3, $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)+\frac{1}{2}+2\times\frac{5}{4}=-3+3=0$, 或 $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)+3\times 1=-3+3=0$.

设 $d(f)=4$. 若 f 关联两个 3^-- 点，则 f 是 $(3^-,7^+,3^-,7^+)$- 面．由 R3.1, $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)+2\times 1=-2+2=0$. 若 f 关联一个 3^-- 点，则 f 是 $(3^-,7^+,4^+,7^+)$- 面．由 R3.2, $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)+\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{4}=-2+2=0$. 若 f 不关联 3^-- 点，则 f 是 $(4^+,4^+,4^+,4^+)$- 面．由 R3.3, $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)+4\times\frac{1}{2}=-2+2=0$.

设 $d(f)=5$. 若 f 关联两个 3^-- 点，则 f 是 $(3^-,7^+,3^-,7^+,7^+)$- 面．由 R4.1, $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)+3\times\frac{1}{3}=-1+1=0$. 若 f 关联一个 3^-- 点，则 f 是 $(3^-,7^+,4^+,4^+,7^+)$- 面．由 R3.2, $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)+4\times\frac{1}{4}=-1+1=0$. 若 f 不关联 3^-- 点，则 f 是 $(4^+,4^+,4^+,4^+,4^+)$- 面．由 R4.3, $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)+5\times\frac{1}{5}=-1+1=0$.

设 $d(f)\geq 6$. 由权转移规则知，f 既不转出权也不转入权, 从而有 $\mathrm{ch}'(f)=\mathrm{ch}(f)\geq 0$.

现在来分析点的新权.

若 v 为 2- 点，据 R1, $\mathrm{ch}'(v)\geq\mathrm{ch}(v)+2\times 1=0$.

若 v 为 3- 点，据权转移规则，没有权转入也没有权转出，故 $\mathrm{ch}'(v)=\mathrm{ch}(v)=0$.

设 v 为 4- 点. 由权转移规则, v 向每个关联的面至多转 $\frac{1}{2}$. 因此 $\mathrm{ch}'(v)\geq\mathrm{ch}(v)-4\times\frac{1}{2}=0$.

设 v 为 5^+- 点．由于本文的权转移规则完全与 [13] 相同，进行 5^+- 点的新权分析时，若面临的结构不含有 3- 扇，则新权 $\mathrm{ch}'(v) \geq 0$ 已在 [13] 中得到验证．因此这里只需对出现 3- 扇的情形加以分析即可．

设 v 为 5- 点．若 v 关联的 3- 面个数 $f_3(v) \geq 4$, 则 G 有 4- 扇．所以 $f_3(v) = 3$. 由 R2, v 至多向所关联的 3- 面转 1, 由 R3, R4, v 至多向关联的 4^+- 面转 $\frac{1}{2}$, 所以 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - 3 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

设 v 为6- 点. 易见, $3 \leq f_3(v) \leq 4$. 由 R2, v 至多向所关联的 3- 面转 $\frac{5}{4}$; 由 R3, R4, v 至多向所关联的 4^+- 面转 $\frac{1}{2}$, 所以 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - f_3(v) \times \frac{5}{4} - (6 - f_3(v)) \times \frac{1}{2} = 3 - \frac{3}{4} f_3(v) \geq 0$.

若 3- 面上有 3^-- 点，则称该 3- 面为坏 3- 面. 若 4- 面上有两个 3^-- 点，则称该 4- 面为坏 4- 面．否则称为好面．坏面上的 3^-- 点称为坏 3^-- 点．用 t 表示坏 3- 面的个数，$\tau(v \to f_i)$ 表示 v 转给面 f_i 的权．据权转移规则知， 7^+- 点向坏 3- 面至多转 $\frac{3}{2}$, 向好 3- 面至多转 $\frac{5}{4}$; 向坏 4- 面至多转 1, 向好 4^+- 面至多转 $\frac{3}{4}$; 向 5^+- 面至多转 $\frac{1}{3}$. 设 v 是一个 k- 点， $v_1, v_2, \ldots, v_k$ 为 k- 点 v 的依某个时针方向依次排列在 v 周围的所有邻点．与 v_i, v, v_{i+1} 关联的面记作 f_i, i=1, 2, $\ldots$, $k-1$; 与 v_1, v, v_k 关联的面记作 f_k. 注意到，若 f_i 是 4^+- 面且 v 的两个在 f_i 上的邻点 v_i 为 4^+- 点，则 f_i 是好 4^+- 面.

设 v 为 7- 点．易见 $3 \leq f_3(v) \leq 5$. 据引理 3(1) 知， $t \leq 2$, 且 $t \geq 1$ 时， v 恰有一个 3- 邻点，因此需要 v 转 $\frac{3}{2}$ 的坏 3- 面的个数至多为 2. 此时，点 v 向关联的 4^+- 面至多转 $\frac{3}{4}$. 根据 $f_3(v)$ 的取值，考虑三种情形如下：

(1) $f_3(v) = 3$.

若 $1 \leq t \leq 2$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - t \times \frac{3}{2} - (3-t) \times \frac{5}{4} - 4 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}t > 0$. 若 $t = 0$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - 3 \times \frac{5}{4} - 4 \times 1 = \frac{1}{4} > 0$.

(2) $f_3(v) = 4$.

若 $1 \leq t \leq 2$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - t \times \frac{3}{2} - (4-t) \times \frac{5}{4} - 3 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t > 0$. 若 $t = 0$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - 4 \times \frac{5}{4} - 3 \times 1 = 0$.

(3) $f_3(v) = 5$.

易见此时 v 关联且仅关联一个 3- 扇和一个 2- 扇．不妨设 f_1, f_2 和 f_3 构成 3- 扇，f_5 和 f_6 构成 2- 扇．若 $t \leq 1$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - t \times \frac{3}{2} - (5-t) \times \frac{5}{4} - 2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}t \geq 0$. 最后考虑 $t = 2$ 这一情形．设 u 是 v 的唯一坏 3- 邻点．显然 $u \in \{v_2, v_3, v_6\}$.

先设 $u = v_6$. 若 f_1, f_2 和 f_3 均为 $(4, 6^+, 6^+)$- 面，则 v_1, v_4 中有一个点为 4- 点．因为 4- 点的邻点为 6^+- 点，由 R3, R4 知， v 向这个 4- 点关联的 4^+- 面至多转 $\frac{1}{2}$, 从而 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - 2 \times \frac{3}{2} - 3 \times \frac{5}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 0$. 若 f_1, f_2 和 f_3 中至多有两个 $(4, 6^+, 6^+)$- 面，则 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - 2 \times \frac{3}{2} - 2 \times \frac{5}{4} - 1 - 2 \times \frac{3}{4} = 0$.

再设 $u \in \{v_2, v_3\}$. 由对称性, 只须考虑 $u = v_2$. 由引理 2(2) 知， $d(v_1) \geq 7$, $d(v_3) \geq 7$. 若 $d(v_4) \geq 5$, 由 R2.3, v 向 f_3 至多转 1, 从而 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - 2 \times \frac{3}{2} - 2 \times \frac{5}{4} - 1 - 2 \times \frac{3}{4} = 0$. 若 $d(v_4) = 4$, 由 R3, R4 知, 点 v 向 f_4 至多转 $\frac{1}{2}$, 从而 $\mathrm{ch}'(v) \geq \mathrm{ch}(v) - 2 \times \frac{3}{2} - 3 \times \frac{5}{4} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = 0$.

最后，验证 8- 点的新权．仿照 [13] 中的证明，易得如下观察：

观察 1 设点 $v \in V(G)$ 且 $d(v) = 8$, v_1, v_2, $\ldots$, v_k 是 v 的 k 个相继邻点，若 $d(v_i) = d(v_{i+2}) = 2$, $d(v_{i+1}) \geq 3$, f_i 和 f_{i+1} 是 4^+- 面， $1 \leq i \leq 6$. 则由 R3, R4 和引理 4

知，$\tau(v\to\{f_i,f_{i+1}\})\le 2\times\frac{3}{4}$. 若 $d(v_i)=d(v_{i+3})=2$，$d(v_{i+1})\ge 3$，$d(v_{i+2})\ge 3$，f_i, f_{i+1} 和 f_{i+2} 是 4^+- 面，$1\le i\le 5$. 则由 R3, R4 和引理 4 知，$\tau(v\to\{f_i,f_{i+1},f_{i+2}\})\le 1+2\times\frac{3}{4}$.

观察 2　设点 $v\in V(G)$ 且 $d(v)=8$，v_1, v_2, $\cdots$, v_k 是 v 的 k 个相继邻点，若 $d(v_i)=d(v_{i+3})=2$，$d(v_j)\ge 3$，$i+1\le j\le i+2$, 则 v 至多向 f_i, f_{i+1}, f_{i+2} 共转出 $\frac{11}{4}$.

引理 7　设点 $v\in V(G)$ 且 $d(v)=8$，$v_1,v_2,\cdots,v_k$ 是 v 的 k 个相继邻点, 其中 $d(v_i)=d(v_{i+5})=2$，$1\le i\le 3$; $d(v_j)\ge 3$，$i+1\le j\le i+4$. 若 $d(f_{i+1})=d(f_{i+2})=d(f_{i+3})=3$, 则 $\tau(v\to\{f_i,f_{i+1},\cdots,f_{i+4}\})\le\frac{21}{4}$.

证　由引理 3(2) 知，f_i, f_{i+4} 均不为 3- 面, 故 3- 面 $f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3}$ 构成一个 3- 扇. 由引理 3(4), 3- 扇中坏 3- 面的个数 $t\le 2$, 且 $t=2$ 时，$d(v_{i+1})=d(v_{i+4})=3$，$d(v_{i+2})\ge 7$, $d(v_{i+3})\ge 7$. 由引理 3(6) 知，f_i 和 f_{i+4} 均为 5^+- 面. 所以，$\tau(v\to\{f_i,f_{i+1},\cdots,f_{i+4}\})\le 2\times\frac{3}{2}+1+2\times\frac{1}{3}<\frac{21}{4}$. 当 $t=1$ 时, 由引理 3(4), $d(v_{i+1})=3$ 或 $d(v_{i+4})=3$. 由对称性, 不妨设 $d(v_{i+1})=3$. 此时，$f_{i+2}, f_{i+3}, f_{i+4}$ 均为好面. 由引理 3(6) 知，f_i 为 5^+- 面. 所以，$\tau(v\to\{f_i,f_{i+1},\cdots,f_{i+4}\})\le\frac{3}{2}+2\times\frac{5}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}<\frac{21}{4}$. 当 $t=0$ 时，$f_{i+1}, f_{i+2}, f_{i+3}$ 均为好 3- 面, 故 f_i 和 f_{i+4} 均为好 4^+- 面. 因此，$\tau(v\to\{f_i,f_{i+1},\cdots,f_{i+4}\})\le 3\times\frac{5}{4}+2\times\frac{3}{4}=\frac{21}{4}$. 引理 7 证毕.

对于 8- 点 v, $\mathrm{ch}(v)=10$. 由 R1 知，v 向每个相邻的 2- 点转 1. 根据 v 关联的 2- 点的个数分以下 6 种情形验证 8- 点的新权.

情形 1　$5\le n_2(v)\le 8$. 由引理 3(2) 知，若 $d(v_i)=2$, 则 vv_i 关联的面为 4^+- 面. 此时易得 $f_3(v)\le 2$, 即 v 不关联 3- 扇.

情形 2　$n_2(v)=4$. 2- 点的各种位置分配如图 4 所示.

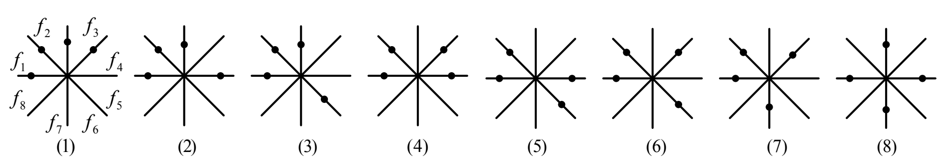

图 4　点 v 相邻 4 个 2- 点

在图 4(1) 中，当 $i\in\{1,2,3\}$ 时，由引理 2(2) 知，$d(f_i)\ne 3$; 由引理 2(3) 知，$d(f_i)\ne 4$; 再由引理 3(5) 知，$d(f_i)\ne 5$. 故 $f_{6^+}(v)\ge 3$. 由引理 3(2) 知，f_4, f_8 都是 4^+- 面. 因此，v 恰关联一个 3- 扇，它由面 f_5, f_6 和 f_7 构成. 由 R1 和引理 7 知，$\mathrm{ch}'(v)\ge 10-4-\frac{21}{4}=\frac{3}{4}>0$. 在图 4(2)–4(8) 中，$f_3(v)\le 2$，$v$ 均不关联 3- 扇，由 [13] 知，$\mathrm{ch}'(v)\ge 0$.

情形 3　$n_2(v)=3$. 2- 点的位置分配如图 5 所示.

图 5(1) 中，同上，f_1 和 f_2 均为 6^+- 面，f_3 和 f_8 均为 4^+- 面. 由 v 关联 3- 扇且不关联 4- 扇知，$f_3(v)=3$. 由对称性，不妨设 v 关联的 3- 扇由面 f_4, f_5 和 f_6 构成. 由引理 3(4) 知，$t\le 2$, 且 $t=2$ 时，$d(v_4)=d(v_7)=3$, 由引理 2(2) 知，$d(v_5)\ge 7$, $d(v_6)\ge 7$. 据引理 3(6) 和 3(7) 知，f_3 为 5^+- 面，f_7 和 f_8 不能都是坏 4- 面. 因此 $\tau(v\to\{f_3,\cdots,f_8\})\le 2\times\frac{3}{2}+1+\frac{1}{3}+\max\{2\times\frac{3}{4},1+\frac{1}{3}\}=\frac{35}{6}$. 当 $t=1$ 时，由引理 3(6) 和

3(7) 知, $\tau(v\to\{f_3,\cdots,f_8\})\le\frac{3}{2}+2\times\frac{5}{4}+\max\{\frac{1}{3}+1+\frac{3}{4},\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{3}{4},3\times\frac{3}{4}\}=\frac{25}{4}$. 当 $t=0$ 时, v 至少关联两个好 4^+- 面 f_3, f_7, 有 $\tau(v\to\{f_3,\cdots,f_8\})\le 3\times\frac{5}{4}+1+2\times\frac{3}{4}=\frac{25}{4}$. 所以, $\mathrm{ch}'(v)\ge 10-3-\max\left\{\frac{35}{6},\frac{25}{4}\right\}=\frac{3}{4}>0$.

图 5(2) 中, $f_{6^+}(v)\ge 1$ 且 $f_3(v)=3$. 由 R1, 观察 1 和引理 7 知, $\mathrm{ch}'(v)\ge 10-3-2\times\frac{3}{4}-\frac{21}{4}=\frac{1}{4}>0$.

图 5(3)–5(5) 中, v 均不关联 3- 扇, $\mathrm{ch}'(v)\ge 0$.

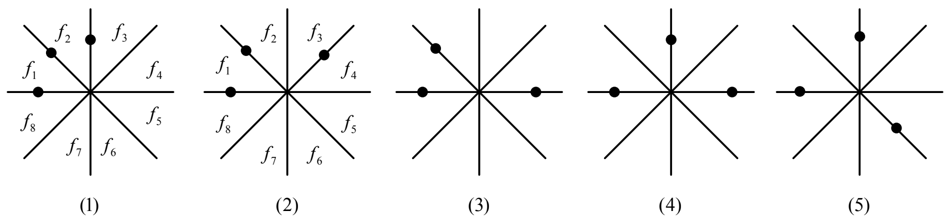

图 5 点 v 相邻 3 个 2- 点

情形 4 $n_2(v)=2$. 2- 点的位置分配如图 6 所示.

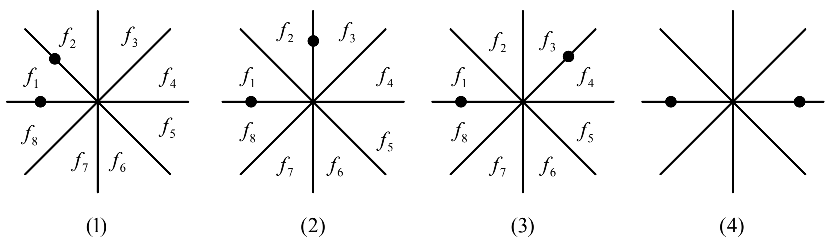

图 6 点 v 相邻 2 个 2- 点

图 6(1) 中, $d(f_1)\ge 5$, f_2 和 f_8 都是 4^+- 面. 由 v 关联 3- 扇且不关联 4- 扇知, $3\le f_3(v)\le 4$. 据 v 关联的 3- 面的个数, 分两种子情形讨论:

(i) $f_3(v)=3$.

先设 $d(f_3)=d(f_4)=d(f_5)=3$ ($d(f_5)=d(f_6)=d(f_7)=3$ 时可同理讨论). 由引理 3(4) 知, $t\le 2$, 且 $t=2$ 时, $d(v_3)=d(v_6)=3$; 由引理 2(2) 知, $d(v_4)\ge 7$, $d(v_5)\ge 7$; 由引理 3(6) 知, f_2 为 5^+- 面, 因此 $\mathrm{ch}'(v)\ge 10-2-2\times\frac{3}{2}-1-3\times 1-2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}>0$. 当 $t=1$ 时, $d(v_3)=3$ 或 $d(v_6)=3$. 若 $d(v_3)=3$, 则 $d(v_6)\ge 4$, f_6 是好 4^+- 面. 由引理 3(6) 知, f_2 是 5^+- 面. 可得 $\mathrm{ch}'(v)\ge 10-2-\frac{3}{2}-2\times\frac{5}{4}-\frac{3}{4}-2\times 1-2\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}>0$. 若 $d(v_6)=3$, 则 $d(v_3)\ge 4$, f_2 是好 4^+- 面. 由引理 3(8) 知, f_6, f_7, f_8 中至少有一个好 4^+- 面. 可得 $\mathrm{ch}'(v)\ge 10-2-\frac{3}{2}-2\times\frac{5}{4}-2\times\frac{3}{4}-2\times 1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}>0$. 当 $t=0$ 时, $d(v_3)\ge 4$, $d(v_6)\ge 4$. v 至少关联两个好 4^+- 面 f_2 和 f_6. 则 $\mathrm{ch}'(v)\ge 10-2-3\times\frac{5}{4}-2\times\frac{3}{4}-2\times 1-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}>0$.

再设 $d(f_4)=d(f_5)=d(f_6)=3$. 由引理 3(4) 知, $t\le 2$, 且 $t=2$ 时, $d(v_4)=d(v_7)=3$, 由引理 2(2) 知, $d(v_5)\ge 7$, $d(v_6)\ge 7$. 据引理 3(7) 知, f_2 和 f_3 中至少有一个是好 4^+- 面, 同理, f_7 和 f_8 中至少有一个是好 4^+- 面. 因此 $\mathrm{ch}'(v)\ge 10-2-2\times\frac{3}{2}-1-2\times\frac{3}{4}-$

$2\times1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}>0$. 当 $t=1$ 时，$d(v_4)=3$ 或 $d(v_7)=3$. 由对称性，不妨设 $d(v_4)=3$, 则 $d(v_7)\geq4$，f_7 是好 4^+- 面. 由引理 3(7) 知，f_2 和 f_3 中至少有一个是好 4^+- 面. 因此 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-2-\frac{3}{2}-2\times\frac{5}{4}-2\times\frac{3}{4}-2\times1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}>0$. 当 $t=0$ 时，$d(v_4)\geq4$, $d(v_7)\geq4$, v 至少关联两个好 4^+- 面 f_3 和 f_7. 因此 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-2-3\times\frac{5}{4}-2\times\frac{3}{4}-2\times1-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}>0$.

(ii) $f_3(v)=4$.

由对称性, 不妨设 $d(f_3)=d(f_4)=d(f_5)=d(f_7)=3$. 由引理 3(4) 知，$t\leq3$. 当 $t=3$ 时，$d(v_3)=d(v_6)=3$，$d(v_4)\geq7$, $d(v_5)\geq7$. 若 $d(v_7)=3$, $d(v_8)\geq7$, 则 f_8 是好 4^+- 面. 由引理 3(6) 和引理 5 知，f_2 和 f_6 都是 5^+- 面. 若 $d(v_8)=3$, 则 $d(v_7)\geq7$，f_6 是好 4^+- 面. 由引理 3(6) 知，f_2 和 f_8 都是 5^+- 面. 总有 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-2-3\times\frac{3}{2}-1-\frac{3}{4}-3\times\frac{1}{3}=\frac{3}{4}>0$. 当 $t=2$ 时，由引理 3(6) 和引理 5 知，v 不关联坏 4- 面，且除 f_1 外，v 至少关联一个 5^+- 面. 故 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-2-2\times\frac{3}{2}-2\times\frac{5}{4}-2\times\frac{3}{4}-2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}>0$. 当 $t\leq1$ 时，v 关联的 4^+- 面均为好 4^+- 面，$\mathrm{ch}'(v)\geq10-2-t\times\frac{3}{2}-(4-t)\times\frac{5}{4}-3\times\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}t>0$.

图 6(2) 中，f_1, f_2, f_3 和 f_8 都是 4^+- 面. 由图 5(1) 中的的分析可知，$\tau(v\rightarrow\{f_3,\cdots,f_8\})\leq\frac{25}{4}$, 再由观察 1 知，$\tau(v\rightarrow\{f_1,f_2\})\leq2\times\frac{3}{4}$, 故 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-2-\frac{25}{4}-2\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}>0$.

图 6(3) 中，由观察 2 和引理 7 知，$\mathrm{ch}'(v)\geq10-2-\frac{11}{4}-\frac{21}{4}=0$.

图 6(4) 中，点 v 不关联 3- 扇，$\mathrm{ch}'(v)\geq0$.

情形 5 $n_2(v)=1$. 设 v_1 是与 v 相邻的唯一的一个 2- 点. 据此 2- 点是否关联 3- 面有两种情形需要讨论.

(i) v_1 关联 3- 面.

由于 G 是简单图，v_1 仅关联一个 3- 面. 不妨设 f_1 是这个 3- 面. 易见，$3\leq f_3(v)\leq6$. 由引理 3(9) 和 3(10) 知，其它 3- 面都是好 3- 面.

若 $f_3(v)=3$, 则 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-1-\frac{3}{2}-2\times\frac{5}{4}-5\times1=0$.

设 $f_3(v)=4$. 显然，与好 3- 面相邻的 4^+- 面 f_i 都是好 4^+- 面，即 v 至少关联一个好 4^+- 面. 故 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-1-\frac{3}{2}-3\times\frac{5}{4}-\frac{3}{4}-3\times1=0$.

设 $f_3(v)=5$. 无论这 5 个 3- 面的位置如何分配，与好 3- 面相邻的 4^+- 面 f_i 都是好 4^+- 面，因此 v 至少关联两个好 4^+- 面，故 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-1-\frac{3}{2}-4\times\frac{5}{4}-2\times\frac{3}{4}-1=0$.

最后设 $f_3(v)=6$. 易见，$d(f_1)=d(f_2)=d(f_3)=d(f_5)=d(f_6)=d(f_7)=3$，$f_4, f_8$ 是好 4^+- 面. 由引理 6(5) 知，$d(v_6)\geq5$，$d(v_7)\geq5$. 故 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-1-\frac{3}{2}-4\times\frac{5}{4}-1-2\times\frac{3}{4}=0$.

(ii) v_1 不关联 3- 面. 由于 v 关联 3- 扇而不关联 4- 扇，$3\leq f_3(v)\leq5$.

若 $f_3(v)=3$, 由引理 3(4) 知，$t\leq2$. 由 R2 知，v 向这三个 3- 面至多转 $\max\{2\times\frac{3}{2}+1,\frac{3}{2}+2\times\frac{5}{4},3\times\frac{5}{4}\}=4$, 从而 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-1-4-5\times1=0$.

设 $f_3(v)=4$. 由引理 3(4) 知，$t\leq3$. 由对称性，f_2, f_3, f_4 构成 3- 扇或 f_3, f_4, f_5 构成 3- 扇. 由图 G 中无 4- 扇知，另外一个 3- 面，不与该 3- 扇相邻，故 v 至少关联一个好 4^+- 面. 当 $t=3$ 时，由引理 3(3), 引理 6(3) 和引理 5 知，v 至少关联一个 5^+- 面，故 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-1-3\times\frac{3}{2}-1-\frac{3}{4}-\frac{1}{3}-2\times1=\frac{5}{12}>0$. 当 $t\leq2$ 时，v 至少关联两个好 4^+- 面，从而 $\mathrm{ch}'(v)\geq10-1-t\times\frac{3}{2}-(4-t)\times\frac{5}{4}-2\times\frac{3}{4}-2\times1=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}t\geq0$.

设 $f_3(v)=5$. 由 G 中无 4- 扇知，v 仅关联一个 3- 扇和一个 2- 扇. 设 f_2, f_3 和 f_4 构成

3- 扇，f_6 和 f_7 构成 2- 扇. 由引理 3(4) 知，$t \le 4$ 且 3- 点 $u \in \{v_2, v_5, v_6, v_8\}$. 当 $t = 4$ 时, 由引理 6(3) 和引理 5 知，f_1, f_5, f_8 均为 5^+- 面, 因此 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10-1-4\times\frac{3}{2}-1-3\times\frac{1}{3} = 1 > 0$. 当 $t = 3$ 时, 由引理 6(3), 6(4) 和引理 5 知，v 至少关联两个 5^+- 面且不关联坏 4- 面, 从而 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10-1-3\times\frac{3}{2}-2\times\frac{5}{4}-2\times\frac{1}{3}-\frac{3}{4} = \frac{7}{12} > 0$. 当 $t = 2$ 时, 由引理 6(3) 和引理 5 知，v 至少关联一个 5^+- 面且不关联坏 4- 面, 所以 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10-1-2\times\frac{3}{2}-3\times\frac{5}{4}-2\times\frac{3}{4}-\frac{1}{3} = \frac{5}{12} > 0$. 当 $t = 1$ 时， v 至少关联两个好 4^+- 面，故 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10-1-\frac{3}{2}-4\times\frac{5}{4}-1-2\times\frac{3}{4} = 0$. 当 $t = 0$ 时， v 关联三个好 4^+- 面，可得 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10-1-5\times\frac{5}{4}-3\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2} > 0$.

情形 6　$n_2(v) = 0$. 由于 v 关联 3- 扇而不关联 4- 扇， $3 \le f_3(v) \le 6$.

若 $f_3(v) \le 4$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10 - f_3(v)\times\frac{3}{2} - (8 - f_3(v))\times 1 = 2 - \frac{1}{2}f_3(v) \ge 0$.

设 $f_3(v) = 5$. 此时 v 恰关联一个 3- 扇．设这个 3- 扇由 f_1, f_2 和 f_3 构成．由引理 6(2) 知， $t \le 4$. 若 $t \le 3$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10 - t\times\frac{3}{2} - (5-t)\times\frac{5}{4} - 1\times 3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}t \ge 0$. 设 $t = 4$. 由引理 6(2) 知， 3- 扇上有两个坏 3- 面且 $d(v_1) = d(v_4) = 3$. 由引理 2(2) 知， $d(v_2) \ge 7$, $d(v_3) \ge 7$, 所以 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10 - 4\times\frac{3}{2} - 1 - 3\times 1 = 0$.

最后设 $f_3(v) = 6$. 此时 v 关联两个 3- 扇，设它们分别由 f_1, f_2, f_3 和 f_5, f_6, f_7 构成．由引理 6(1) 和 6(2) 知 $t \le 4$. 易见，当且仅当 $d(v_1) = d(v_4) = d(v_5) = d(v_8) = 3$ 时， $t = 4$. 此时由引理 2(2) 知， $d(v_2) \ge 7$, $d(v_3) \ge 7$, $d(v_6) \ge 7$, $d(v_7) \ge 7$, 故 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10 - 4\times\frac{3}{2} - 2\times 1 - 2\times 1 = 0$. 若 $t = 3$, 由对称性和引理 6(3) 及 6(4), 可设 $d(v_1) = d(v_4) = d(v_5) = 3$, 从而 $d(v_8) \ge 4$, f_8 是好 4^+- 面．由引理 2(2) 知， $d(v_2) \ge 7$, $d(v_3) \ge 7$, 故 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10 - 3\times\frac{3}{2} - 2\times\frac{5}{4} - 1 - 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} > 0$. 最后若 $t \le 2$, 则 $\mathrm{ch}'(v) \ge 10 - t\times\frac{3}{2} - (6-t)\times\frac{5}{4} - 2\times 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t \ge 0$. 至此，定理 1 证毕.

参　考　文　献

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory. Berlin: Springer-Verlag, 2008

[2] Vizing V G. Some Unsolved Problems in Graph Theory. *Uspekhi Mat. Nauk.*, 1968, 23: 117–134 (in Russian)

[3] Behzad M. Graphs and their Chromatic Numbers. MI: Michigan State University, 1965

[4] Borodin O V, Kostochka A V, Woodall D R. Total Coloring of Planar Graphs with Large Maximum Degree. *J. Graph Theory*, 1997, 26: 53–59

[5] Wang W F. Total Chromatic Number of Planar Graphs with Maximum Degree Ten. *J. Graph Theory*, 2007, 54: 91–102

[6] Kowalik L, Sereni J S, Škrekovski R. Total Coloring of Plane Graphs with Maximum Degree Nine. *SIAM J. Discrete Math.*, 2008, 22: 1462–1479

[7] Hou J F, Liu G Z, Cai J S. List Edge and List Total Coloring of Planar Graphs without 4-cycles. *Theoretical Computer Sci.*, 2006, 369: 250–255

[8] Hou J F, Zhu Y, Liu G Z, Wu J L, L M. Total Coloring of Planar Graphs without Small Cycles. *J. Graphs Comb.*, 2008, 24: 91–100

[9] Shen L, Wang Y Q. Total Coloring of Planar Graphs with Maximum Degree at Least 8. *Science in*

China Series A, 2009, 52: 1733–1742

[10] Shen L, Wang Y Q, Wang W F, Lih K W. On the 9-total-colorability of Planar Graphs with Maximum Degree at Least 8 and without Intersecting Triangles. *Appl. Math. Lett.*, 2009, 22: 1369–1373

[11] Du D Z, Shen L, Wang Y Q. Planar Graphs with Maximum Degree 8 and without Adjacent Triangles are 9-totally-colorable. *Discrete Appl. Math.*, 2009, 157: 2778–2784

[12] Cai J S, Wang G H, Yan G Y. Planar Graphs with Maximum Degree 8 and without Intersecting Chordal 4-cycles are 9-totally-colorable. *Sci. China Math.*, 2012, 55: 2601–2612

[13] Chang J, Wang H J, Wu J L, A Y G. Total Colorings of Planar Graphs with Maximum Degree 8 and without 5-cycles with Two Chords. *Theoretical Computer Science*, 2013, 476: 16–23

[14] Sanders D P, Zhao Y. On the 9-coloring Planar Graphs of Maximum Degree Seven. *J Graph Theory*, 1999, 31: 67–73

[15] Wang B, Wu J L. Total Colorings of Planar Graphs with Maximum Degree Seven and without Intersecting 3-cycles. *Discrete Math.*, 2011, 311: 2052–2030

On the Total 9-colorability of Plane Graphs with Maximum Degree 8 without 4-fans

LI Huihui WANG Yingqian

(*College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua* 321004)

(*E-mail: lihuihui0123@163.com*)

Abstract Let $G=(V,E)$ be a graph with sets of vertices and edges V and E, respectively. A total k-coloring of G is a mapping ϕ: $V\cup E\rightarrow\{1,2,\ldots,k\}$ such that $\phi(x)\neq\phi(y)$ whenever x and y are two adjacent or incident elements of $V\cup E$. G is totally k-colorable if it admits a total k-coloring. Let Δ denote the maximum degree of G. Clearly, at least $\Delta+1$ colors are needed to totally color G. Behzad and Vizing independently conjectured that every graph is totally $(\Delta+2)$-colorable. It is known that plane graphs with maximum degree $\Delta\geq 9$ are totally $(\Delta+1)$-colorable. By exploring new reducibility of minimal counterexample, we use discharging method to prove that plane graphs with maximum degree 8 and without 4-fans are totally 9-colorable, where a k-fan in a plane graph consists of k consecutive 3-faces intersecting at a vertex. This improves some known results on the topic of total 9-colorability of plane graphs with maximum degree 8.

Key words Plane graphs; total coloring; maximum degree; fan.

MR(2000) Subject Classification 05C15

Chinese Library Classification O157.5