第 36 卷 第 6 期 应 用 数 学 学 报 Vol. 36 No. 6
2013 年 11 月 ACTA MATHEMATICAE APPLICATAE SINICA Nov., 2013

一类基于 IPM 策略的捕食者 - 食饵系统的动力学性质 *

王玲书

(河北经贸大学数学与统计学学院，石家庄 050061)

(E-mail: wanglingshu@126.com)

冯光辉

(军械工程学院应用数学研究所，石家庄 050003)

摘 要 基于综合害虫管理策略 (IPM), 研究了一类具有阶段结构和脉冲效应的捕食者 - 食饵系统的动力学性质. 根据 Floquet 乘子理论和小振幅扰动理论，证明了当脉冲周期小于某个临界值时，系统存在一个全局渐近稳定的害虫根除周期解；给出了系统持续生存的充分条件.

关键词 捕食系统； IPM 策略；持续生存；灭绝

MR(2000) 主题分类 34A37; 92D25

中图分类 O175.1

1 引言

在过去的二十年间，昆虫和其它节肢动物的控制变得更加复杂. 如何减少有害昆虫和带菌者对重要的植物、动物和人类疾病造成的损失一直是昆虫学家和社会关心的问题. 随着社会的发展和科学技术的进步，出现了许多控制害虫的方法，其中，综合害虫管理 (IPM)[1−4] 是使经济损失达到最小的一种非常有效的方法，它主要包括化学控制和生物控制两种方法. 化学控制是通过喷洒杀虫剂来控制害虫，它能使害虫数量迅速减少，尤其当害虫数量太大释放天敌不足以控制害虫或考虑到释放天敌的成本时，必须使用杀虫剂来控制害虫；生物控制通过释放天敌 (捕食者) 或利用病理来控制害虫 (食饵), 是近年来备受重视的生物防治的一个领域，因其可以避免化学药剂带来的问题而日益受到重视. 实践证明，综合害虫管理比任何一种传统的方法都更有效.

在经典的捕食者 - 食饵模型中，人们总假定每个捕食者具有相同的捕食和生产能

本文 2010 年 10 月 12 日收到. 2013 年 7 月 14 日收到修改稿.

* 国家自然科学基金 (11101117) 资助项目.

力. 这个假设对许多动物来说似乎是不切实际的. 在自然界中，物种的增长常常有一个成长发育的过程，如从幼年到成年等，而且在其成长的每一个阶段都会表现出不同的特征. 因此，考虑具有阶段结构的种群模型更具有实际意义. 近年来，具有阶段结构的种群动力学模型已引起了许多学者的关注 [4−6]. 在 [5] 中，作者考虑了下面具有阶段结构的单种群模型：

$$\begin{cases} \dot{x_1}(t) = rx_2(t) - dx_1(t) - \beta x_2(t), \\ \dot{x_2}(t) = \beta x_2(t) - ax_2^2(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $x_1(t)$ 表示幼年种群在时刻 t 的密度， $x_2(t)$ 表示成年种群在时刻 t 的密度.

本文基于 IPM 策略，讨论一类捕食者具有阶段结构的捕食者 - 食饵模型的动力学性质，为此考虑如下脉冲微分方程：

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &\dot{x}(t) = rx(t) - ax^2(t) - a_1p(x)y_2(t) \\ &\dot{y_1}(t) = a_2p(x)y_2(t) - (r_1+d)y_1(t) \\ &\dot{y_2}(t) = dy_1(t) - r_2y_2(t) \end{aligned}\right\} t \neq (n+l-1)\tau, \quad t \neq n\tau, \\ \left.\begin{aligned} &\Delta x(t) = -\delta x(t) \\ &\Delta y_1(t) = -\delta_1 y_1(t) \\ &\Delta y_2(t) = -\delta_2 y_2(t) \end{aligned}\right\} t = (n+l-1)\tau, \\ \left.\begin{aligned} &\Delta x(t) = 0 \\ &\Delta y_1(t) = u_1 \\ &\Delta y_2(t) = u_2 \end{aligned}\right\} t = n\tau, \end{cases} \tag{1.2}$$

其中， $x(t)$ 表示食饵 (害虫) 在时刻 t 的密度； $y_1(t)$ 和 $y_2(t)$ 分别表示幼年捕食者和成年捕食者 (天敌) 在时刻 t 的密度； $p(x)$ 表示捕食者的功能性反应函数，满足下面条件

$$p(0) = 0, \qquad \dot{p}(x) > 0, \qquad p_1 \leq p(x)/x \leq p_2, \tag{1.3}$$

a，a_1，a_2，d，p_1，p_2，r，r_1 和 r_2 为正常数，其具体的生物意义可以参考 [6]; $\triangle x(t) = x(t^+) - x(t)$, $\triangle y_i(t) = y_i(t^+) - y_i(t)$; τ 是脉冲周期, $n \in Z_+ = \{1, 2 \cdots\}$, $0 \leq \delta$, $\delta_i < 1$ 分别表示在 $t = (n+l-1)\tau$ 时刻由于杀虫剂的使用导致害虫和天敌死亡的比例, $u_i > 0$, $i = 1, 2$ 是在 $t = n\tau$ 时刻释放的天敌数量.

2　害虫根除周期解的全局渐近稳定性

令 $f = (f_1, f_2, f_3)$ 是系统 (1.2) 前三个方程的右端映射，显然 f 的光滑性保证了解的存在性和唯一性 [7]. 设 $z(t) = (x(t), y_1(t), y_2(t))$ 是系统 (1.2) 的解，在区间 $((n-1)\tau,\ (n+l-1)\tau)$ 和 $((n+l-1)\tau,\ n\tau)$ 上是连续可微的. 容易证明下面引理成立.

引理 2.1 设 $z(t)$ 是系统 (1.2) 的满足初始条件 $z(0^+) \geq 0$ 的解，于是对所有的 $t \geq 0$ 都有 $z(t) \geq 0$, 并且若 $z(0^+) > 0$, 则 $z(t) > 0$.

引理 2.2 系统 (1.2) 的所有正解是一致最终有界的，即存在一个正常数 M, 当 t 充分大时，有 $x(t) \leq M$, $y_i(t) \leq M$ $(i = 1, 2)$.

下面考虑害虫根除周期解的稳定性，即 $x(t)=0,\ t\geq 0$, 为此考虑 (1.2) 的子系统

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\dot{y_1}(t)=-(r_1+d)y_1(t)\\ \dot{y_2}(t)=dy_1(t)-r_2y_2(t)\end{array}\right\}t\neq(n+l-1)\tau,\quad t\neq n\tau,\\ \left.\begin{array}{l}y_1(t^+)=(1-\delta_1)y_1(t)\\ y_2(t^+)=(1-\delta_2)y_2(t)\end{array}\right\}t=(n+l-1)\tau,\\ \left.\begin{array}{l}y_1(t^+)=u_1+y_1(t)\\ y_2(t^+)=u_2+y_2(t)\end{array}\right\}t=n\tau.\end{array}\right. \tag{2.1}$$

引理 2.3 系统 (2.1) 存在一个全局渐近稳定的正周期解 $(y_1^*(t),y_2^*(t))$, 其中

$$y_1^*(t)=\begin{cases}\frac{u_1e^{-(r_1+d)(t-n\tau)}}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}, & n\tau<t\leq(n+l)\tau,\\ \frac{(1-\delta_1)u_1e^{-(r_1+d)(t-n\tau)}}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}, & (n+l)\tau<t\leq(n+1)\tau,\end{cases} \tag{2.2}$$

$$y_2^*(t)=\begin{cases}\Big[\frac{u_2}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}}+\frac{du_1(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}+(\delta_2-\delta_1)e^{-(r_1+d-r_2)l\tau-r_2\tau})}{(r_1+d-r_2)(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau})}\Big] & \\ \cdot e^{-r_2(t-n\tau)}-\frac{du_1e^{-(r_1+d)(t-n\tau)}}{(r_1+d-r_2)(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})}, & n\tau<t\leq(n+l)\tau,\\ (1-\delta_2)\Big[\frac{u_2}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}}+\frac{du_1(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}+(\delta_2-\delta_1)e^{-(r_1+d-r_2)l\tau-r_2\tau})}{(r_1+d-r_2)(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau})}\Big] & \\ \cdot e^{-r_2(t-n\tau)}-\frac{(1-\delta_1)du_1e^{-(r_1+d)(t-n\tau)})}{(r_1+d-r_2)(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})}, & (n+l)\tau<t\leq(n+1)\tau.\end{cases} \tag{2.3}$$

证 在区间 $n\tau<t\leq(n+1)\tau$ 上求解 (2.1), 可以得到

$$\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}y_1(t)=y_1(n\tau^+)e^{-(r_1+d)(t-n\tau)}\\ y_2(t)=y_2(n\tau^+)e^{-r_2(t-n\tau)}+\dfrac{dy_1(n\tau^+)}{r_1+d-r_2}[e^{-r_2(t-n\tau)}-e^{-(r_1+d)(t-n\tau)}]\end{array}\right\}n\tau<t\leq(n+l)\tau,\\ \left.\begin{array}{l}y_1(t)=y_1((n+l)\tau^+)e^{-(r_1+d)(t-(n+l)\tau)}\\ y_2(t)=y_2((n+l)\tau^+)e^{-r_2(t-(n+l)\tau)}+\dfrac{dy_1((n+l)\tau^+)}{r_1+d-r_2}\\ \qquad\cdot[e^{-r_2(t-(n+l)\tau)}-e^{-(r_1+d)(t-(n+l)\tau)}]\end{array}\right\}(n+l)\tau<t\leq(n+1)\tau,\\ y_i(n\tau^+)=u_i+y_i(n\tau),\\ y_i((n+l)\tau^+)=(1-\delta_i)y_i((n+l)\tau),\qquad i=1,2.\end{array}\right. \tag{2.4}$$

令 $y_i(n\tau^+)=y_i((n+1)\tau^+)$, $i=1,2$, 代入上式可以得到系统 (2.1) 的 τ 周期解 $(y_1^*(t),y_2^*(t))$. 进一步，由 (2.4) 可以得到迭代映射

$$\left\{\begin{array}{l}y_1(n\tau^+)=u_1+(1-\delta_1)y_1((n-1)\tau^+)e^{-(r_1+d)\tau},\\ y_1((n+l)\tau^+)=(1-\delta_1)y_1(n\tau^+)e^{-(r_1+d)l\tau},\\ y_2(n\tau^+)=u_2+(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}y_2((n-1)\tau^+)+\dfrac{d(1-\delta_2)(e^{-r_2\tau}-e^{-(r_1+d-r_2)\tau-r_2\tau})}{r_1+d-r_2}\\ \qquad\cdot y_1((n-1)\tau^+)+\dfrac{d(e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau})}{r_1+d-r_2}y_1((n+l-1)\tau^+)\\ y_2((n+l)\tau^+)=(1-\delta_2)y_2(n\tau^+)e^{-r_2l\tau}+\dfrac{d(1-\delta_2)(e^{-r_2l\tau}-e^{-(r_1+d)l\tau})}{r_1+d-r_2}y_1(n\tau^+)\end{array}\right.$$

由此可以得到

$$
\begin{aligned}
y_1(n\tau^+) &= \frac{u_1[1-(1-\delta_1)^n e^{-n(r_1+d)\tau}]}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}} + y_1(0^+)(1-\delta_1)^n e^{-n(r_1+d)\tau},\\
y_1((n+l)\tau^+) &= (1-\delta_1)e^{-(r_1+d)l\tau}\Big[\frac{u_1(1-(1-\delta_1)^n e^{-n(r_1+d)\tau})}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\\
&\qquad + y_1(0^+)(1-\delta_1)^n e^{-n(r_1+d)\tau}\Big]\\
y_2(n\tau^+) &= \Big[u_2 + \frac{d(1-\delta_2)(e^{-r_2\tau}-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau - r_1\tau})}{r_1+d-r_2} y_1(n\tau^+) + dy_1((n+l)\tau^+)\\
&\qquad \cdot \frac{e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau}}{r_1+d-r_2}\Big]\frac{1-(1-\delta_2)^n e^{-nr_2\tau}}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}} + y_2(0^+)(1-\delta_2)^n e^{-nr_2\tau},\\
y_2((n+l)\tau^+) &= \frac{d(1-\delta_2)y_1(n\tau^+)(e^{-r_2 l\tau}-e^{-(r_1+d)l\tau})}{r_1+d-r_2} + (1-\delta_2)y_2(n\tau^+)e^{-r_2 l\tau}.
\end{aligned}
$$

因此，$\lim\limits_{t\to+\infty}(y_1(t),y_2(t)) = (y_1^*(t),y_2^*(t))$, 即系统 (2.1) 的周期解是全局渐近稳定的.

定理 2.1　系统 (1.2) 的害虫根除周期解 $(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是全局渐近稳定的，若下列条件成立

(H_1)　$r\tau - a_1p_1\int_0^\tau y_2^*(t)\,\mathrm{d}t < \ln\frac{1}{1-\delta}$, 其中

$$
\begin{aligned}
\int_0^\tau y_2^*(t)\,\mathrm{d}t =& \frac{1}{r_2(1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau})}\Big[\Big(u_2+\frac{du_1}{r_1+d-r_2}\Big)(1-\delta_2 e^{-r_2 l\tau}-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau})\\
&+\frac{du_1(1-\delta_2)(\delta_2-\delta_1)(1-e^{-r_2\tau})e^{-(r_1+d)l\tau}}{(r_1+d-r_2)(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})}\Big]\\
&-\frac{du_1(1-\delta_1 e^{-(r_1+d)l\tau}-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})}.
\end{aligned}
$$

证　设 $z(t)=(x(t),y_1(t),y_2(t))$ 是系统 (1.2) 的具有正初值的解, 令 $x_1(t)=x(t)$, $x_2(t)=y_1(t)-y_1^*(t)$, $x_3(t)=y_2(t)-y_2^*(t)$, 则系统 (1.2) 的线性化系统为

$$
\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
\dot{x_1}(t) &= (r-a_1\dot{p}(0)y_2^*(t))x_1(t)\\
\dot{x_2}(t) &= a_2\dot{p}(0)y_2^*(t)x_1(t)-(r_1+d)x_2(t)\\
\dot{x_3}(t) &= dx_2(t)-r_2x_3(t)
\end{aligned}\right\} t\neq(n+l-1)\tau,\quad t\neq n\tau,\\
\left.\begin{aligned}
\Delta x_1(t) &= -\delta x_1(t)\\
\Delta x_2(t) &= -\delta_1 x_2(t)\\
\Delta x_3(t) &= -\delta_2 x_3(t)
\end{aligned}\right\} t=(n+l-1)\tau,\\
\left.\begin{aligned}
\Delta x_1(t) &= 0\\
\Delta x_2(t) &= 0\\
\Delta x_3(t) &= 0
\end{aligned}\right\} t=n\tau
\end{cases}
\tag{2.5}
$$

定义

$$A(t)=\begin{pmatrix} r-a_1\dot{p}(0)y_2^*(t) & 0 & 0 \\ a_2\dot{p}(0)y_2^*(t) & -(r_1+d) & 0 \\ 0 & d & -r_2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1-\delta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\delta_2 \end{pmatrix}.$$

根据脉冲微分方程的 Floquet 乘子理论，如果单值矩阵

$$M(\tau)=Be^{\int_0^\tau A(t)\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix} (1-\delta)e^{\int_0^\tau (r-a_1\dot{p}(0)y_2^*(t))\,\mathrm{d}t} & 0 & 0 \\ & (1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau} & 0 \\ 0 & \Delta & (1-\delta_2)e^{-r_2\tau} \end{pmatrix}$$

的特征值的模小于 1, 则周期解 $(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是局部渐近稳定的. 实际上, $M(\tau)$ 的特征值 $0<\lambda_2=(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}<1,\ 0<\lambda_3=(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}<1$, 由 (H_1) 成立可知 $0<\lambda_1=(1-\delta)e^{\int_0^\tau (r-a_1\dot{p}(0)y_2^*(t))\,\mathrm{d}t}<1$, 因此 $(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是局部渐近稳定的.

其次，证明 $(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是全局吸引的. 由 (H_1) 成立，可以取 $\varepsilon>0$, 使得 $\sigma\triangleq(1-\delta)e^{\int_0^\tau (r-a_1p_1(y_2^*(t)-\varepsilon))\,\mathrm{d}t}<1$. 由引理 2.3 和脉冲微分方程的比较定理 [7] 有，当 t 充分大时，不等式 $y_2(t)>y_2^*(t)-\varepsilon$ 成立. 不妨假设对所有的 $t\geq0$ 上式成立，由 (1.2) 可知

$$\begin{cases} \dot{x}(t)<x(t)[r-a_1p_1(y_2^*(t)-\varepsilon)], & t\neq(n+l-1)\tau, \\ x(t^+)=(1-\delta)x(t), & t=(n+l-1)\tau. \end{cases} \tag{2.6}$$

在 $((n+l-1)\tau,\ (n+l)\tau]$ 上求解上式，可以得到

$$\begin{aligned} x((n+l)\tau)<&x((n+l-1)\tau^+)e^{\int_{(n+l-1)\tau}^{(n+l)\tau}(r-a_1p_1(y_2^*(t)-\varepsilon))\mathrm{d}t} \\ =&x((n+l-1)\tau)(1-\delta)e^{\int_0^\tau(r-a_1p_1(y_2^*(t)-\varepsilon))\mathrm{d}t} \\ =&x((n+l-1)\tau)\sigma. \end{aligned}$$

由此可以得到 $x((n+l)\tau)<x(l\tau)\sigma^n$, 于是有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x((n+l)\tau)=0$. 另一方面，当 $t\in((n+l-1)\tau,\ (n+l)\tau]$ 时, $0<x(t)\leq x((n+l-1)\tau)(1-\delta)e^{r\tau}$, 所以当 $t\to+\infty$ 时, $x(t)\to0$. 由此可知存在 T_0, 使得 $t\geq T_0$ 时, $0<x(t)<\varepsilon$.

不妨设 $t\geq0$ 时, $0<x(t)<\varepsilon$, 于是由引理 2.2 和 (1.2) 可以得到 $\dot{y}_1(t)<a_2p_2M\varepsilon-(r_1+d)y_1(t)$. 考虑

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \dot{y_1}(t)&=a_2p_2M\varepsilon-(r_1+d)y_1(t) \\ \dot{y_2}(t)&=dy_1(t)-r_2y_2(t) \end{aligned}\right\} t\neq(n+l-1)\tau,\quad t\neq n\tau, \\ \left.\begin{aligned} y_1(t^+)&=(1-\delta_1)y_1(t) \\ y_2(t^+)&=(1-\delta_2)y_2(t) \end{aligned}\right\} t=(n+l-1)\tau, \\ \left.\begin{aligned} y_1(t^+)&=y_1(t)+u_1 \\ y_2(t^+)&=y_2(t)+u_2 \end{aligned}\right\} t=n\tau. \end{cases} \tag{2.7}$$

对任意初值 $(y_1(0), y_2(0))$, 求解 (2.7) 可以得到，当 $n\tau < t \le (n+l)\tau$ 时，

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1^*(t) + (1-\delta_1)^n\Big[y_1(0) - \dfrac{u_1}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big]\, e^{-(r_1+d)t} \\ +\dfrac{\varepsilon a_2 p_2 M}{r_1+d}\Big[1-(1-\delta_1)^n e^{-(r_1+d)t} - \dfrac{\delta_1(e^{(r_1+d)n\tau}-(1-\delta_1)^n)e^{-(r_1+d)(t+(1-l)\tau)}}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big], \\ y_2(t) = y_2^*(t) + h_1 e^{-r_2 t} + h_2 e^{-r_2(t-n\tau)} + \varepsilon a_2 p_2 M d h_3 - \dfrac{d y_1(0)(1-\delta_1)^n}{r_1+d-r_2} e^{-(r_1+d)t}, \end{cases}$$

其中

$$\begin{cases} h_1 = (1-\delta_2)^n\Big[y_2(0) - \dfrac{u_2}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}} \\ \qquad -\dfrac{d u_1 e^{-r_2\tau}(1-\delta_2)(1-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau})(1-(1-\delta_1)^{n-1}e^{-(n-1)(r_1+d)\tau})}{(r_1+d-r_2)(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau})}\Big] \\ h_2 = \dfrac{d y_1(0)(1-\delta_1)^n e^{-(r_1+d)n\tau}}{r_1+d-r_2}\Big[1+\dfrac{e^{(1-l)(r_1+d)\tau - r_2\tau}(1-\delta_2)(1-(1-\delta_2)^n e^{-r_2 n\tau})}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}} \\ \qquad \cdot(1-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau}+e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau})\Big] \\ h_3 = \dfrac{1}{r_2(r_1+d)} + \dfrac{e^{-(r_1+d)(t-n\tau)}}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)} - \dfrac{e^{-r_2(t-n\tau)}}{r_2(r_1+d-r_2)} \\ \qquad +\frac{e^{-r_2(t-n\tau)}-(1-\delta_2)^n e^{-r_2 t}}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}} \\ \qquad \cdot(1-\delta_2)\Big[\dfrac{e^{-r_2(1-l)\tau}}{r_2(r_1+d)} + \dfrac{e^{-(r_1+d-r_2)l\tau - r_2\tau}}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)} - \dfrac{e^{-r_2\tau}}{r_2(r_1+d-r_2)}\Big] \\ \qquad +\frac{d}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)}\cdot\dfrac{e^{-r_2(t-n\tau)}-(1-\delta_2)^n e^{-r_2 t}}{(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau})} \\ \qquad \cdot\big[(1-(1-\delta_1)^{n-1}e^{-(n-1)(r_1+d)\tau})(1-\delta_1 e^{-(r_1+d)(1-l)\tau}-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}) \\ \qquad \cdot((1-\delta_2)e^{-r_2\tau}(1-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau})+(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)l\tau} \\ \qquad \cdot(e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau})+(1-e^{-(r_1+d)l\tau})(e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau}))\big] \end{cases}$$

当 $(n+l)\tau < t \le (n+1)\tau$ 时，

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1^*(t) + (1-\delta_1)^{n+1}\Big[y_1(0) - \dfrac{u_1}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big]\, e^{-(r_1+d)t} \\ \qquad +\dfrac{\varepsilon a_2 p_2 M}{r_1+d}\Big[1-(1-\delta_1)^{n+1}e^{-(r_1+d)t} \\ \qquad -\dfrac{\delta_1 e^{l\tau}(e^{(r_1+d)n\tau}-(1-\delta_1)^{n+1}e^{-(r_1+d)\tau})e^{-(r_1+d)t}}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big], \\ y_2(t) = y_2^*(t) + g_1 e^{-r_2 t} + g_2 e^{-r_2(t-n\tau)} + \varepsilon a_2 p_2 M d g_3 - \dfrac{d y_1(0)(1-\delta_1)^{n+1}}{r_1+d-r_2} e^{-(r_1+d)t}, \end{cases}$$

其中

$$
\begin{cases}
g_1=(1-\delta_2)^{n+1}\Big[y_2(0)-\dfrac{u_2}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}} \\
\qquad -\dfrac{du_1(1-\delta_1)(e^{-r_2\tau-(r_1+d-r_2)l\tau}-e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-\delta_1)^{n-1}e^{-(r_1+d)\tau})}{(r_1+d-r_2)(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})(1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau})}\Big] \\
g_2=\dfrac{dy_1(0)(1-\delta_2)(1-\delta_1)^n}{r_1+d-r_2}\Big[1+\dfrac{e^{-r_2\tau}(1-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau})+e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau}}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}}\Big] \\
g_3=(1+e^{-r_2(t-(n+l)\tau)})\Big(\dfrac{1}{r_2(r_1+d)}+\dfrac{e^{-(r_1+d)(t-(n+l)\tau)}}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)}-\dfrac{e^{-r_2(t-(n+l)\tau)}}{r_2(r_1+d-r_2)}\Big) \\
\qquad +(1-\delta_2)\dfrac{e^{-r_2(t-(n+l)\tau)}-e^{-(r_1+d)(t-(n+l)\tau)}}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)} \\
\qquad \cdot\Big[\frac{e^{-r_2(1-l)\tau}}{r_2(r_1+d)}+\frac{e^{-(r_1+d-r_2)l\tau-r_2\tau}}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)}-\frac{e^{-r_2\tau}}{r_2(r_1+d-r_2)} \\
\qquad +\dfrac{(1-e^{-(r_1+d)l\tau})(e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau})}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)} \\
\qquad +(1-\delta_1e^{-(r_1+d)(1-l)\tau}-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}) \\
\frac{(1-(1-\delta_1)^{n-1}e^{-(n-1)(r_1+d)\tau})[e^{-r_2(1-l)\tau}-e^{-(r_1+d)(1-l)\tau}+(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}(1-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau})]}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)(1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau})}\Big].
\end{cases}
$$

这样，当 t 充分大时，就可以得到 $y_1(t)<y_1^*(t)+\varepsilon_1$，$y_2(t)<y_2^*(t)+\varepsilon_1$.

另一方面，由 (1.2) 可以得到 $\dot{y}_1(t)\geq-(r_1+d)y_1(t)$. 于是由引理 2.3 和比较定理可知，当 t 充分大时，有 $y_1(t)>y_1^*(t)-\varepsilon_1$，$y_2(t)>y_2^*(t)-\varepsilon_1$.

由以上分析可知 $\lim\limits_{t\to\infty}(y_1(t),y_2(t))=(y_1^*(t),y_2^*(t))$. 这样就证明了系统 (1.2) 的害虫根除周期解 $(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是全局渐近稳定的.

3 系统的持续生存

定理 3.1 系统 (1.2) 是持续生存的，若下列条件成立

(H_2) $r\tau-a_1p_2\int_0^\tau y_2^*(t)\,\mathrm{d}t>\ln\frac{1}{1-\delta}$.

证 由引理 2.2 可知存在常数 $M>0$, 当 t 充分大时， $x(t)\leq M$，$y_i(t)\leq M(i=1,2)$, 不妨设 $t\geq 0$ 时， $x(t)\leq M$，$y_i(t)\leq M$. 因此，要证系统 (1.2) 是持续生存的，仅需证明存在常数 $m_j>0$ $(j=1,2,3)$, 使得 $x(t)\geq m_1$，$y_1(t)\geq m_2$，$y_2(t)\geq m_3$. 由 (1.2) 可得 $\dot{y}_1(t)\geq-(r_1+d)y_1(t)$, 则由引理 2.3 可知，对 $\forall\varepsilon>0$, 当 t 充分大时， $y_1(t)\geq y_1^*(t)-\varepsilon$. 因此，当 t 充分大时， $y_1(t)\geq\frac{u_1(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}-\varepsilon\triangleq m_2$. 类似可得，当 t 充分大时，$y_2(t)\geq\frac{u_2(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}}-\varepsilon\triangleq m_3$. 下面只需要证明存在一个正常数 m_1, 当 t 充分大时，$x(t)\geq m_1$. 我们分两步来证明.

1° 由 (H_2) 成立，取 $0<m_4<\frac{r\tau-a_1p_2\int_0^\tau y_2^*(t)\,\mathrm{d}t-\ln\frac{1}{1-\delta}}{(a+a_1a_2p_2dMC)\tau}$ 和充分小的 ε_2, 使得

$$\eta\triangleq(1-\delta)e^{r\tau-m_4(a+a_1a_2p_2dMC)\tau-a_1p_2\int_0^\tau(y_2^*(t)+\varepsilon_2)\,\mathrm{d}t}>1,$$

其中

$$C = \frac{1}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}}\Big[\frac{1}{r_2(r_1+d)} + \frac{e^{-(r_1+d)\tau} + de^{-r_2\tau}((1-\delta_2)(1-e^{-(r_1+d-r_2)l\tau})}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)} + \frac{(1-\delta_1 e^{-(r_1+d)l\tau}))(e^{-r_2(1-l)\tau} - e^{-(r_1+d)(1-l)\tau})}{(r_1+d)(r_1+d-r_2)} - \frac{e^{-r_2\tau}}{r_2(r_1+d-r_2)}\Big].$$

我们将证明一定存在一点 $t_1 > 0$, 使得 $x(t_1) \geq m_4$, 否则 $\dot{y}_1(t) < a_2p_2m_4M - (r_1+d)y_1(t)$. 考虑系统

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \dot{y_1}(t) &= a_2p_2m_4M - (r_1+d)y_1(t) \\ \dot{y_2}(t) &= dy_1(t) - r_2y_2(t) \end{aligned}\right\} t \neq (n+l-1)\tau, \quad t \neq n\tau, \\ \left.\begin{aligned} y_1(t^+) &= (1-\delta_1)y_1(t) \\ y_2(t^+) &= (1-\delta_2)y_2(t) \end{aligned}\right\} t = (n+l-1)\tau, \\ \left.\begin{aligned} y_1(t^+) &= u_1 + y_1(t) \\ y_2(t^+) &= u_2 + y_2(t) \end{aligned}\right\} t = n\tau. \end{cases} \tag{3.1}$$

类似于 (2.7) 可以得到，当 t 充分大时，下面不等式成立

$$y_2(t) \leq y_2^*(t) + m_4a_2p_2dMC + \varepsilon_2.$$

设 $t \in ((n+l)\tau,\ (n+l+1)\tau]$, 由此可以得到

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \geq x(t)[r - am_4 - a_1p_2(y_2^*(t) + m_4a_2p_2dMC + \varepsilon_2)], & t \neq (n+l)\tau, \\ x(t^+) = (1-\delta)x(t), & t = (n+l)\tau. \end{cases}$$

设 $(n+l)\tau \geq t_1$, 在区间 $((n+l)\tau, (n+l+1)\tau]$ 上求解上式有

$$\begin{aligned} x((n+l+1)\tau) \geq & x((n+l)\tau)(1-\delta)e^{\int_0^\tau [r - am_4 - a_1p_2(y_2^*(t) + m_4a_2p_2dMC + \varepsilon_2)]\,\mathrm{d}t} \\ = & x((n+l)\tau)\eta, \end{aligned}$$

于是当 $k \to \infty$ 时， $x(n+l+k)\tau \geq x((n+l)\tau)\eta^k \to \infty$, 这与 $x(t)$ 的有界性矛盾. 因此，存在一点 $t_1 > 0$, 使得 $x(t_1) \geq m_4$.

2° 如果 $t \geq t_1$ 时，均有 $x(t) \geq m_4$, 则结论成立. 否则，令 $t^* = \inf\limits_{t > t_1}\{x(t) < m_4\}$， t^* 分为脉冲点和非脉冲点两种情况.

1) t^* 为脉冲点. 令 $t^* = (n_1+l)\tau,\ n_1 \in Z_+$, 则 $x(t) \geq m_4,\ t \in [t_1, t^*]$, 且 $(1-\delta)m_4 < x(t^{*+}) = (1-\delta)x(t^*) < m_4$. 选取 $n_2, n_3 \in Z_+$, 使得

$$n_2\tau > -\frac{1}{r_2}\ln\frac{\varepsilon_3}{C_1}, \qquad (1-\delta)^{n_2}e^{n_2\tau\sigma_1}\eta^{n_3} > 1,$$

其中,

$$\begin{aligned}C_1 =& (1-\delta_2)^{n_1}\Big(y_2(0)-\frac{u_2}{1-(1-\delta_2)e^{-r_2\tau}}+\frac{du_1}{r_1+d-r_2}\frac{1}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big)\\ &+\frac{d(1-\delta_1)^{n_1-1}(1-\delta_2)}{(r_1+d-r_1)(1-(1-p_2)e^{-r_2\tau})}\Big(y_1(0^+)-\frac{u_1}{1-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}}\Big)\\ &\cdot\big((1-\delta_2)e^{-r_2\tau}+(\delta_2-\delta_1)\mathrm{e}^{-(r_1+d-r_2)l\tau-r_2\tau}-(1-\delta_1)e^{-(r_1+d)\tau}\big),\\ \sigma_1 =& r-am_4-a_1p_2M<0.\end{aligned}$$

令 $T=(n_2+n_3)\tau$, 则一定存在 $t_2\in[t^*,t^*+T]$, 使得 $x(t_2)\geq m_4$. 否则，当 $t\in[t^*,t^*+T]$ 时有 $\dot{y}_1(t)<a_2p_2m_4M-(r_1+d)y_1(t)$. 类似于 (2.7) 可以得到，当 $t\in[t^*+n_2\tau,t^*+T]$ 时,

$$|y_2(t)-y_2^*(t)-m_4a_2p_2dMC|\leq C_1e^{-n_2r_2\tau},$$

从而 $y_2(t)\leq y_2^*(t)+m_4a_2p_2dMC+\varepsilon_3$, 同步骤 1° 类似可得 $x(t^*+T)\geq x(t^*+n_2\tau)\eta^{n_3}$. 另一方面，由 (1.2) 有

$$\begin{cases}\dot{x}(t)\geq x(t)(r-am_4-a_1p_2M)=\sigma_1x(t), & t\neq(n+l)\tau,\\ x(t^+)=(1-\delta)x(t), & t=(n+l)\tau.\end{cases}\tag{3.2}$$

在 $[t^*,t^*+n_2\tau]$ 上求解 (3.2), 可得 $x(t^*+n_2\tau)\geq m_4(1-\delta)^{n_2}e^{\sigma_1n_2\tau}$. 由此可知 $x(t^*+T)\geq m_4(1-\delta)^{n_2}e^{\sigma_1n_2\tau}\eta^{n_3}>m_4$, 矛盾. 令 $\overline{t}=\inf\limits_{t>t^*}\{x(t)\geq m_4\}$, 于是当 $t\in(t^*,\overline{t}]$ 时，$x(t)<m_4$, 且 $x(\overline{t})=m_4$. 对于 $t\in(t^*,\overline{t}]$, 由 $\dot{x}(t)\geq\sigma_1x(t)$ 可知 $x(t)\geq m_4(1-\delta)^{n_2+n_3}\exp^{(n_2+n_3)\sigma_1\tau}\triangleq m_1'$. 由于 $x(\overline{t})\geq m_4$, 因此对于 $t>\overline{t}$, 重复上述过程可知，当 $t\geq t_1$ 时， $x(t)\geq m_1'$.

2) t^* 不是脉冲点，则 $t\in[t_1,t^*)$ 时， $x(t)\geq m_4$ 且 $x(t^*)=m_4$. 假设 $t^*\in((n_1'+l)\tau,(n_1'+l+1)\tau)$, 对 $t\in(t^*,(n_1'+l+1)\tau]$, $x(t)$ 的取值有两种可能.

(i) 对所有的 $t\in(t^*,(n_1'+l+1)\tau]$ 时， $x(t)\leq m_4$, 则类似于情形 1) 可以证明一定存在一点 $t_2'\in((n_1'+l+1)\tau,(n_1'+l+1)\tau+T]$, 使得 $x(t_2')>m_4$. 令 $\tilde{t}=\inf\limits_{t>t^*}\{x(t)>m_4\}$, 则 $t\in(t^*,\tilde{t})$ 时, $x(t)\leq m_4$, 而 $\widetilde{x}(t)=m_4$. 对于 $t\in(t^*,\widetilde{t})$, 有 $x(t)\geq m_4(1-\delta)^{n_2+n_3}e^{(n_2+n_3+1)\sigma_1\tau}\triangleq m_1<m_1'$. 由于 $x(\widetilde{t})\geq m_4$, 重复上述过程可知当 $t\geq t_1$ 时， $x(t)\geq m_1$.

(ii) 存在一点 $t\in(t^*,(n_1'+l+1)\tau]$, 使得 $x(t)\geq m_4$. 令 $\widehat{t}=\inf\limits_{t>t^*}\{x(t)\geq m_4\}$, 于是 $t\in[t^*,\widehat{t})$ 时， $x(t)<m_4$ 且 $x(\widehat{t})=m_4$. 在 $(t^*,\widehat{t})$ 上有 $x(t)\geq x(t^*)e^{\sigma_1(t-t^*)}\geq m_4e^{\sigma_1\tau}>m_1$. 由 $x(\widehat{t})\geq m_4$, 重复上述过程可知，当 $t>t_1$ 时， $x(t)\geq m_1$. 综上所述，当 $t>t_1$ 时, $x(t)\geq m_1$. 这样就证明了当 (H_2) 成立时，系统 (1.2) 是持续生存的.

注 3.1 设 $f(\tau)=r\tau-a_1p_1\int_0^\tau y_2^*(t)\,\mathrm{d}t-\ln\frac{1}{1-\delta}$, 因为 $f(0)=-\ln\frac{1}{1-\delta}<0$, $\lim\limits_{\tau\to\infty}f(\tau)=\infty$ 且 $f''(\tau)>0$, 所以 $f(\tau)=0$ 有唯一正根，记为 $\tau_{\max}$. 由定理 2.1 和定理 3.1 知， $\tau_{\max}$ 是一个阈值：当 $\tau<\tau_{\max}$ 时，害虫根除周期解 $(0,y_1^*(t),y_2^*(t))$ 是全局渐近稳定的；当 $\tau>\tau_{\max}$ 时，系统是持续生存的的，害虫根除周期解失去稳定性而经历了一个超临界的分支. 事实上，小规模数量的害虫的正周期解意味着我们的害虫治理策略可以控制害虫低于经济危害水平而没有完全根除它，这表明我们的害虫控制策略仍然是有效的.

参 考 文 献

[1] Barclay H J. Models for Pest Control Using Predator Release, Habitat Management and Pesticide Release in Combination. *J. Applied Ecology*, 1982, 19: 337–348

[2] Van Lentern J C. Integrated Pest Management in Protected Crops. In: D Dent ed. Integrated Pest Management. London: Chapman & Hall, 1995

[3] 刘兵，陈兰荪，张玉娟. 基于 IPM 策略的捕食与被捕食系统的动力学性质. 工程数学学报, 2005, 22(1): 9–14
(Liu B, Chen L S, Zhang Y J. The Dynamics of Apredator-prey System Concerning Integrated Pest Management. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2005, 22(1): 9–14)

[4] Cheng H, Yin Z, Liu H. Analysis of the Dynamics of a Stage-structured Pest Control Model. *Mathematica Applicata*, 2012, 25(4): 816–823

[5] Aiello W G, Freedman H I. A Time Delay Model of Single Species Growth With Stage-Structure. *Math. Biosci*, 1990, 101: 139–156

[6] Wang W. Chen L. A Predator-prey System with Stage-sructure For Predator. *Comput. Math. Appl.*, 1997, 33: 83–91

[7] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solution and Applications. New York: Longman, 1993

The Dynamics of a Predator-Prey Model Concerning Integrated Pest Management

WANG Lingshu

(*School of Mathematics and Statistics, Hebei University of Economics & Business, Shijiazhuang* 050061)

(*E-mail: wanglingshu@126.com*)

FENG Guanghui

(*Institute of Applied Mathematics, Mechanical Engineering College, Shijiazhuang* 050003)

Abstract Based on integrated pest management, a stage-structured predator-prey system with impulsive effect is proposed and investigated. By the Floquet theory and small amplitude perturbation skills, it is proved that there exists a globally stable pest-eradication periodic solution when the impulsive period is less than some critical values. Further, sufficient conditions for the permanence of the system is established.

Key words predator-prey system; IPM; permanence; extinction.

MR(2000) Subject Classification 34A37, 92D25

Chinese Library Classification O175.1