文章编号: 1001-0920 (2013) 05-0787-04

不确定时变时滞切换广义系统的鲁棒 H_∞ 保性能控制

杨 坤, 沈艳霞, 纪志成

(江南大学 a. 轻工过程先进控制教育部重点实验室，b. 电气自动化研究所，江苏 无锡 214122)

摘 要: 利用公共 Lyapunov 泛函方法和凸组合技术研究了一类不确定时变时滞切换广义系统的鲁棒 H_∞ 保性能控制和状态反馈镇定问题. 在设定的切换规则下, 给出了基于线性矩阵不等式表示的鲁棒 H_∞ 保性能控制器存在的充分条件, 保证了系统具有鲁棒 H_∞ 干扰抑制水平 γ 及状态反馈可切换镇定的同时满足保性能指标. 最后的仿真示例验证了该方法的有效性.

关键词: 切换广义系统；线性矩阵不等式；鲁棒 H_∞ 控制；保性能控制

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Robust H_∞ guaranteed cost control for uncertain switched singular systems with time-varying delay

YANG Kun, *SHEN Yan-xia*, *JI Zhi-cheng*

(a. Key Laboratory of Advanced Process Control for Light Industry，Ministry of Education，b. Institute of Electrical Automation，Jiangnan University，Wuxi 214122，China．Correspondent: YANG Kun，E-mail: ytyangkun@163. com)

Abstract: The problems of robust H_∞ guaranteed cost control and feedback stabilization for a class of uncertain switched singular systems with time-varying delay are studied based on the Lyapunov function approach and convex combination techniques. A sufficient condition for the existences of robust H_∞ guaranteed cost controller and switching strategy are given, and the designed state feedback controllers in terms of linear matrix inequality ensure that the closed-loop systems satisfy the guaranteed cost index with a presented H_∞ disturbance attenuation level γ. Finally, an illustrative example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: switched singular systems；linear matrix inequality；robust H_∞ control；guaranteed cost control

0 引 言

切换系统由若干连续或离散动态子系统组成, 是一类按照描述子系统关系的切换规则来实现控制目标的特殊混杂系统, 广泛存在于电力系统、运输系统、经济系统等实际系统模型中[1]. 广义系统是一类更一般化、同样有着较强应用背景的动态系统, 其中子系统均为广义系统的切换系统, 称为切换广义系统. 近年来, 对切换广义系统的研究引起了众多学者的广泛关注, 并取得了丰富的研究成果[2-4].

目前, H_∞ 控制和保性能控制已经广泛应用于切换系统的研究[5-8]. 文献 [6] 针对子系统含有参数不确定性的离散时间切换系统, 分别基于公共 Lyapunov 函数法和分段 Lyapunov 函数法研究了系统的鲁棒 H_∞ 控制问题; 文献 [7] 利用切换 Lyapunov 函数方法研究了一类不确定离散时间切换广义系统的 H_∞ 滤波和状态反馈问题, 并分别设计了比例积分 H_∞ 观测器和状态反馈控制器, 保证了闭环系统是正则、因果和鲁棒稳定的; 文献 [8] 则利用公共 Lyapunov 泛函方法提出一类不确定切换广义系统在任意切换规则下状态反馈保性能控制器存在的一个充分条件, 并给出了基于线性矩阵不等式的保性能控制器的设计方法.

上述文献仅针对 H_∞ 控制或保性能控制的某一方面进行了研究, 关于切换广义系统的 H_∞ 保性能控制问题的研究成果目前还未见相关报道. 本文针对同时具有不确定性和时变时滞的一类切换广义系统, 基于 Lyapunov 泛函方法和凸组合技术, 给出了切换规

收稿日期: 2011-12-19；**修回日期:** 2012-04-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61174032)；教育部新世纪优秀人才支持计划项目(NCET-10-0437)；中央高校基本科研业务费专项基金项目(JUDCF11040).

作者简介: 杨坤(1983−), 男, 博士生, 从事鲁棒控制、切换系统等研究；纪志成(1959−), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂非线性系统控制、智能控制等研究.

则和 H_∞ 保性能控制器的设计方法. 该控制器既能保证闭环系统渐近稳定和线性二次型性能指标有上界, 同时又是具有鲁棒 H_∞ 干扰抑制水平 γ 状态反馈可切换镇定的. 最后, 通过求解凸优化问题得到了最优鲁棒 H_∞ 保性能控制器.

1 问题描述和准备知识

考虑如下一类不确定时变时滞切换广义系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A_{\sigma(t)} + \Delta A_{\sigma(t)})x(t) + \\ \qquad (A_{\tau\sigma(t)} + \Delta A_{\tau\sigma(t)})x(t-\tau(t)) + \\ \qquad (B_{\sigma(t)} + \Delta B_{\sigma(t)})u(t) + G_{\sigma(t)}\omega(t), \\ z(t) = C_{\sigma(t)}x(t) + D_{\sigma(t)}u(t), \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-h,\ 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $u(t) \in \boldsymbol{R}^m$ 为控制输入, $z(t) \in \boldsymbol{R}^q$ 为被控输出, $\omega(t) \in \boldsymbol{R}^p$ 为属于 $L_2[0, +\infty)$ 空间的外部扰动信号. $\tau(t)$ 表示时变的系统状态时滞, 并满足 $0 < \tau(t) \leqslant h$, $\dot{\tau}(t) \leqslant a < 1$, $\tau(0) = b$, 即 h 为时滞的上界, a 为时滞变化率的上界. $\sigma : Z^+ \to \boldsymbol{M} = \{1, 2, \cdots, m\}$ 为分段常值切换信号, $\sigma(t) = i$ 表示第 i 个子系统在时刻 t 被激活. $A_i, A_{\tau i}, B_i, G_i, C_i, D_i$ 为系统具有适当维数的常数矩阵, $\Delta A_i, \Delta A_{\tau i}, \Delta B_i$ 为参数不确定矩阵, 假设满足如下条件:

$$[\Delta A_i\ \Delta A_{\tau i}\ \Delta B_i] = M_i F_i [H_{1i}\ H_{2i}\ H_{3i}], \tag{2}$$

M_i, $H_{ji}(j = 1, 2, 3)$ 是已知适当维数的常数矩阵; F_i 为不确定矩阵, 且满足 $F_i^{\mathrm{T}} F_i \leqslant I$. $E \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为奇异矩阵, 且满足 $\mathrm{rank}E = r < n$. $\phi(t)$ 是系统的初始条件.

假设本文讨论的切换广义系统均是正则、无脉冲的[9]. 系统 (1) 在状态反馈控制律 $u_{\sigma(t)} = K_{\sigma(t)}x(t)$ 作用下的闭环系统为

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (\bar{A}_{\sigma(t)} + \Delta\bar{A}_{\sigma(t)})x(t) + \\ \qquad (\bar{A}_{\tau\sigma(t)})x(t-\tau(t)) + G_{\sigma(t)}\omega(t), \\ z(t) \ = \bar{C}_{\sigma(t)}x(t). \end{cases} \tag{3}$$

记 $\widetilde{A}_{\sigma(t)} = \bar{A}_{\sigma(t)} + \Delta\bar{A}_{\sigma(t)}$, 且

$$\bar{A}_{\sigma(t)} = A_{\sigma(t)} + B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)},$$
$$\Delta\bar{A}_{\sigma(t)} = \Delta A_{\sigma(t)} + \Delta B_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)},$$
$$\bar{A}_{\tau\sigma(t)} = A_{\tau\sigma(t)} + \Delta A_{\tau\sigma(t)},$$
$$\bar{C}_{\sigma(t)} = C_{\sigma(t)} + D_{\sigma(t)}K_{\sigma(t)}.$$

引入性能指标函数

$$J = \int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) + u_{\sigma(t)}^{\mathrm{T}} R u_{\sigma(t)})\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中 Q 和 R 是给定的对称正定加权矩阵.

定义 1 对于给定的常数 $\gamma > 0$, 设计切换规则 $\sigma(t)$, 状态反馈控制律 $u_{\sigma(t)}$ 称为系统 (1) 的鲁棒 H_∞ 保性能控制律, 如果对于所有允许的参数不确定性和性能指标 (4), 以下条件成立:

1) 当 $\omega(t) = 0$ 时, 闭环系统 (3) 是渐近稳定的;

2) 在零初始条件下, 对于所有允许的不确定性和非零的 $\omega \in L_2[0,\ T](0 \leqslant T < \infty)$, 满足 $\|z\|_{L_2[0,\ T]} < \gamma\|\omega\|_{L_2[0,\ T]}$;

3) 存在性能指标的一个上界 $J^* > 0$, 使得闭环系统 (3) 是渐近稳定的, 且满足 $J \leqslant J^*$.

引理 1[10] 设 Y, M, H 是给定的适当维数矩阵, 则 $Y + MFH + H^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}} < 0$ 对于所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \leqslant I$ 的矩阵成立, 当且仅当存在标量 $\varepsilon > 0$, 有

$$Y + \varepsilon MM^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}H^{\mathrm{T}}H < 0. \tag{5}$$

引理 2[11] 对于任意给定的适当维数矩阵 X 和 Y, 有

$$X^{\mathrm{T}}Y + Y^{\mathrm{T}}X \leqslant \alpha X^{\mathrm{T}}X + \alpha^{-1}Y^{\mathrm{T}}Y,\ \forall\, \alpha > 0. \tag{6}$$

2 主要结果

定理 1 对于给定的常数 $\gamma > 0$ 和性能指标 (4), 若存在可逆矩阵 $P \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, 矩阵 K_i 及对称正定矩阵 Z, m 个满足 $\alpha_i > 0, i \in M$ 且 $\sum\limits_{i=1}^m \alpha_i = 1$ 的实数 α_i, 使得如下矩阵不等式成立:

$$E^{\mathrm{T}}P = P^{\mathrm{T}}E \geqslant 0, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \begin{bmatrix} \varGamma_i & P^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\tau i} & P^{\mathrm{T}}G_i & \bar{C}_i^{\mathrm{T}} \\ \bar{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}P & -(1-a)Z & 0 & 0 \\ G_i^{\mathrm{T}}P & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ \bar{C}_i & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

则系统 (1) 是具有鲁棒 H_∞ 干扰抑制水平 γ 状态反馈可切换镇定的. 其中 $\varGamma_i = P^{\mathrm{T}}\widetilde{A}_i + \widetilde{A}_i^{\mathrm{T}}P + Q + Z + K_i^{\mathrm{T}}RK_i$, $u_{\sigma(t)} = K_{\sigma(t)}x(t)$ 是系统 (1) 的一个鲁棒 H_∞ 保性能控制律, 且相应的性能指标函数满足

$$J \leqslant J^* = \widetilde{\phi}^{\mathrm{T}}(0)\widetilde{P}\widetilde{\phi}(0) + \int_{-b}^0 \phi^{\mathrm{T}}(s)Z\phi(s)\mathrm{d}s, \tag{9}$$

选取的切换规则为

$$\sigma(t) = \arg\min_{i\in M}\{x^{\mathrm{T}}(\varGamma_i + \bar{C}_i^{\mathrm{T}}\bar{C}_i + P^{\mathrm{T}}G_i\gamma^{-2}G_i^{\mathrm{T}}P + (1-a)^{-1}P^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\tau i}Z^{-1}\bar{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}P)x\}. \tag{10}$$

证明 由 Schur 补引理, 不等式 (8) 等价于

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i[\varGamma_i + \bar{C}_i^{\mathrm{T}}\bar{C}_i + P^{\mathrm{T}}G_i\gamma^{-2}G_i^{\mathrm{T}}P + (1-a)^{-1}P^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\tau i}Z^{-1}\bar{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}P] < 0, \tag{11}$$

即对于 $\forall x \in R^n\backslash\{0\}$, 有

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i[x^{\mathrm{T}}(\varGamma_i + \bar{C}_i^{\mathrm{T}}\bar{C}_i + P^{\mathrm{T}}G_i\gamma^{-2}G_i^{\mathrm{T}}P + (1-a)^{-1}P^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\tau i}Z^{-1}\bar{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}P)x] < 0. \tag{12}$$

由切换规则 (10), 考虑 $\bar{C}_i^{\mathrm{T}}\bar{C}_i$ 和 $P^{\mathrm{T}}G_i\gamma^{-2}G_i^{\mathrm{T}}P$ 均不小于 0, 故对于 $\forall t \geqslant 0$, 下列不等式总成立:

$$x^{\mathrm{T}}(\varGamma_i + (1-a)^{-1}P^{\mathrm{T}}\bar{A}_{\tau i}Z^{-1}\bar{A}_{\tau i}^{\mathrm{T}}P)x < 0. \tag{13}$$

假设 $\{(t_k, i_k),\ 0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots\}$ 是由切换规则 (10) 在区间 $[0, +\infty)$ 上生成的切换序列, 对闭环系统 (3) 构造 Lyapunov 泛函

$$V(x_t) = x^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}Ex(t) + \int_{t-\tau(t)}^{t} x^{\mathrm T}(s)Zx(s)\mathrm ds,\quad (14)$$

则对于任意非零状态 x, $V(x_t)$ 是正定的. 当 $\omega(t) = 0$ 时, $V(x_t)$ 沿闭环系统 (3) 的解轨线对时间的导数为

$$\begin{aligned}&\dot V(x_t) = \\ &x^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}E\dot x(t) + \dot x^{\mathrm T}(t)E^{\mathrm T}Px(t) + x^{\mathrm T}(t)Zx(t)- \\ &(1-\dot\tau(t))x^{\mathrm T}(t-\tau(t))Zx(t-\tau(t)) \leqslant \\ &x^{\mathrm T}(t)(\widetilde A_{i_k}^{\mathrm T}P + P^{\mathrm T}\widetilde A_{i_k} + Z)x(t)+ \\ &x^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\bar A_{\tau i_k}x(t-\tau(t)) + x^{\mathrm T}(t-\tau(t))\bar A_{\tau i_k}^{\mathrm T}Px(t)- \\ &(1-a)x^{\mathrm T}(t-\tau(t))Zx(t-\tau(t)) = \\ &\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t))\end{bmatrix}^{\mathrm T} \Psi_{i_k} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau(t))\end{bmatrix},\end{aligned}\quad (15)$$

其中

$$\Psi_{i_k} = \begin{bmatrix} \Gamma_i - Q - K_{i_k}^{\mathrm T}RK_{i_k} & P^{\mathrm T}\bar A_{\tau i_k} \\ \bar A_{\tau i_k}^{\mathrm T}P & -(1-a)Z\end{bmatrix}.$$

结合不等式 (13), 有

$$\dot V(x_t) < -x^{\mathrm T}(t)(Q + K_{i_k}^{\mathrm T}RK_{i_k})x(t) < 0.\quad (16)$$

由 Lyapunov 稳定性理论, 闭环系统 (3) 在切换规则 (10) 下是渐近稳定的. 假设初始状态为 $\phi(0)$ 时, 切换序列表示为 $\{\phi(0), (t_k, i_k), 0 = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots\}$. 其中 (t_k, i_k) 表示当 $(t_k \leqslant t \leqslant t_{k+1})$ 时第 i_k 个子系统被激活且在 t_{k+1} 时离开. 将式 (16) 两边分别对 t_k 从 0 到 ∞ 取积分, 并整理得

$$\begin{aligned}J &< -\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\dot V(x_t)\mathrm dt = V(x_{t_0}) = \\ &\phi^{\mathrm T}(0)P^{\mathrm T}E\phi(0) + \int_{-b}^{0}\phi^{\mathrm T}(s)Z\phi(s)\mathrm ds = \\ &\widetilde\phi^{\mathrm T}(0)\widetilde P\widetilde\phi(0) + \int_{-b}^{0}\phi^{\mathrm T}(s)Z\phi(s)\mathrm ds = J^*.\end{aligned}\quad (17)$$

对于任意的 $\omega(t) \in L_2[0, +\infty)$, 结合引理 2 可以推导出

$$\begin{aligned}&\dot V(x_t) + z^{\mathrm T}(t)z(t) - \gamma^2\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) \leqslant \\ &x^{\mathrm T}(t)(\widetilde A_{i_k}^{\mathrm T}P + P^{\mathrm T}\widetilde A_{i_k} + Z)x(t) - (1-a)x^{\mathrm T}(t- \\ &\tau(t))Zx(t-\tau(t)) + x^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\bar A_{\tau i_k}x(t-\tau(t))+ \\ &x^{\mathrm T}(t-\tau(t))\bar A_{\tau i_k}^{\mathrm T}Px(t) + x^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}G_{i_k}\omega(t)+ \\ &\omega^{\mathrm T}(t)G_{i_k}^{\mathrm T}Px(t) + z^{\mathrm T}(t)z(t) - \gamma^2\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) \leqslant \\ &x^{\mathrm T}(t)(\widetilde A_{i_k}^{\mathrm T}P + P^{\mathrm T}\widetilde A_{i_k} + Z + \gamma^{-2}P^{\mathrm T}G_{i_k}G_{i_k}^{\mathrm T}P)x(t)- \\ &(1-a)x^{\mathrm T}(t-\tau(t))Zx(t-\tau(t))+ \\ &x^{\mathrm T}(t)P^{\mathrm T}\bar A_{\tau i_k}x(t-\tau(t)) + x^{\mathrm T}(t-\tau(t))\bar A_{\tau i_k}^{\mathrm T}Px(t)+ \\ &\gamma^2\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) + z^{\mathrm T}(t)z(t) - \gamma^2\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) = \\ &\varphi^{\mathrm T}(t)\begin{bmatrix}\Phi_i & P^{\mathrm T}\bar A_{\tau i_k} \\ \bar A_{\tau i_k}^{\mathrm T}P & -(1-a)Z\end{bmatrix}\varphi(t).\end{aligned}\quad (18)$$

其中

$$\varphi(t) = [x^{\mathrm T}(t)\ \ x^{\mathrm T}(t-\tau(t))]^{\mathrm T},\ \forall\, t \geqslant 0,$$

$$\Phi_i = \Gamma_i + \gamma^{-2}P^{\mathrm T}G_{i_k}G_{i_k}^{\mathrm T}P + \bar C_i^{\mathrm T}\bar C_i - Q - K_{i_k}^{\mathrm T}RK_{i_k}.$$

根据矩阵不等式 (8) 并应用 Schur 引理可得到

$$\dot V(x_t) + z^{\mathrm T}(t)z(t) - \gamma^2\omega^{\mathrm T}(t)\omega(t) < 0.\quad (19)$$

由零初始条件, 式 (19) 两边分别对 t 从 $0 \sim \infty$ 积分, 可得

$$\int_0^\infty z^{\mathrm T}(t)z(t)\mathrm dt - \gamma^2\int_0^\infty \omega^{\mathrm T}(t)\omega(t)\mathrm dt < -V(x_\infty) \leqslant 0,$$

所以, 对于任意的 $\omega(t) \in L_2[0, +\infty)$, 有

$$\|z\|_{L_2[0,\,T]} < \gamma\|\omega\|_{L_2[0,\,T]}.\quad (20)$$

由此定理得证. □

定理 2　对于给定的常数 $\gamma > 0$ 和性能指标 (4), 若存在可逆矩阵 $X \in \boldsymbol R^{n\times n}$, 矩阵 K_i 及对称正定矩阵 $\widetilde Z$, 标量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ 和 m 个满足 $\alpha_i > 0\,(i \in M)$ 且 $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i = 1$ 的实数 α_i, 使得如下线性矩阵不等式成立:

$$E^{\mathrm T}X^{-1} = (X^{-1})^{\mathrm T}E \geqslant 0,\quad (21)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\begin{bmatrix}\Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22}\end{bmatrix} < 0,\quad (22)$$

则系统 (1) 是具有鲁棒 H_∞ 干扰抑制水平 γ 状态反馈可切换镇定的. 其中

$$\Xi_{11} = \begin{bmatrix}\Pi_i & * & * & * & * & * \\ X & -\widetilde Z & * & * & * & * \\ X & 0 & -Q^{-1} & * & * & * \\ W_i & 0 & 0 & -R^{-1} & * & * \\ H_{1i}X & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * \\ H_{3i}W_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I\end{bmatrix},$$

$$\Xi_{12} = \begin{bmatrix}A_{\tau i}\widetilde Z & XH_{1i}^{\mathrm T} & G_i & (C_iX + D_iW_i)^{\mathrm T} \\ H_{2i} & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Xi_{21} = \begin{bmatrix}\widetilde ZA_{\tau i}^{\mathrm T} & H_{2i}^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{1i}X & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_i^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_iX + D_iW_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\Xi_{22} = \begin{bmatrix}-(1-a)\widetilde Z & H_{2i}^{\mathrm T} & 0 & 0 \\ H_{2i} & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I\end{bmatrix}.$$

$*$ 表示矩阵中关于对角线的转置对称项, $\Pi_i = (A_iX +$

$B_iW_i)+(A_iX+B_iW_i)^{\mathrm T}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)M_iM_i^{\mathrm T}$, 则 $u_i(t)=W_iX^{-1}x(t)$ 是系统 (1) 的一个鲁棒 H_∞ 保性能控制律, 且性能函数满足

$$J\leqslant J^*=\widetilde\phi^{\mathrm T}(0)\widetilde X^{-1}\widetilde\phi(0)+\int_{-b}^{0}\phi^{\mathrm T}(s)\widetilde Z^{-1}\phi(s)\mathrm ds.$$

选取的切换规则为

$$\begin{aligned}&\sigma(t)=\\&\arg\min_{i\in M}\{x^{\mathrm T}(P^{\mathrm T}(A_i+B_iK_i)+(A_i+B_iK_i)^{\mathrm T}P+\\&Q+Z+(C_i+D_iK_i)^{\mathrm T}(C_i+D_iK_i)+K_i^{\mathrm T}RK_i+\\&(1-a)^{-1}P^{\mathrm T}A_{\tau i}Z^{-1}A_{\tau i}^{\mathrm T}P+P^{\mathrm T}G_i\gamma^{-2}G_i^{\mathrm T}P)x\}.\end{aligned}\tag{23}$$

其中: $P=X^{-1}, K_i=W_iX^{-1}, Z=\widetilde Z^{-1}$.

证明 将式 (8) 应用引理 1 转化后的矩阵分别左乘 $\varOmega$ 右乘 $\varOmega^{\mathrm T}$, 其中 $\varOmega=\{(P^{\mathrm T})^{-1},I,I,I,I,I,Z^{-1},I,I,I\}$, 令 $P=X^{-1}$, $Z=\widetilde Z^{-1}$, 则式 (21), (22) 分别与式 (7), (8) 等价, 且有 $W_i=K_iX$, 即可得证. □

利用凸组合技术, 考虑系统 (1) 和性能指标 (4), 对于给定的常数 $\gamma>0,\tau>0$, 若存在可逆矩阵 X, 标量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ 和正定对称矩阵 $\widetilde Z$, N, 使得以下凸优化问题有最优解 $(X^*,W_i^*,\widetilde Z^*,\beta^*,N^*)$:

$$\min_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\beta,X,\widetilde Z,N}\{\beta+\mathrm{trace}(N)\}.\tag{24}$$

$$\text{s.t.}\ \ \text{LMI (22)};$$

$$\begin{bmatrix}-\beta & \widetilde\phi^{\mathrm T}(0)\\ \widetilde\phi(0) & -X\end{bmatrix}<0;$$

$$\begin{bmatrix}-N & U^{\mathrm T}\\ U & -\widetilde Z\end{bmatrix}<0.$$

其中: N 为对称正定矩阵, $UU^{\mathrm T}=\int_{-\tau}^{0}\phi(s)\phi^{\mathrm T}(s)\mathrm ds$. 则状态反馈控制器 $u_i(t)=W_i^*X^{*-1}x(t)$ 是系统 (1) 的鲁棒 H_∞ 最优保性能控制器.

3 数值例子

考虑不确定时变时滞切换广义系统 (1), 参数如下:

$$E=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}-4&2\\-1&-2\end{bmatrix}, A_{\tau1}=\begin{bmatrix}-2&-1\\0&0.8\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, G_1=\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix}, C_1=\begin{bmatrix}4&2\\2&1\end{bmatrix}, D_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}-3&1\\0&-3\end{bmatrix}, A_{\tau2}=\begin{bmatrix}-1&-0.6\\0&0.5\end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix},$$

$$G_2=\begin{bmatrix}-0.2\\0.4\end{bmatrix}, C_2=\begin{bmatrix}-0.5&-2\\0&-1\end{bmatrix}, D_2=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},$$

$$H_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix}, H_{21}=\begin{bmatrix}0.2&0.5\\0&0\end{bmatrix}, H_{31}=\begin{bmatrix}0\\0.5\end{bmatrix},$$

$$H_{12}=\begin{bmatrix}0.4&0\\-0.2&0\end{bmatrix}, H_{22}=\begin{bmatrix}0.2&-0.5\\0&0\end{bmatrix},$$

$$H_{32}=\begin{bmatrix}0.5\\-0.3\end{bmatrix}, \phi(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\mathrm e^{t+1}\\0\end{bmatrix}, M_1=M_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

选取 $a=0.1, b=1, \alpha_1=\alpha_2=0.5$, H_∞ 指标 $\gamma=1$, 性能指标 (4) 的正定加权矩阵为 $Q=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.5\end{bmatrix}$, $R=1$, 系统的初始条件是

$$\phi(0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}e\\0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0.9061\\0\end{bmatrix},\ U\approx\begin{bmatrix}0.5958&0\\0&0\end{bmatrix},$$

通过应用 LMI 工具箱中的求解器 min cx 求解问题 (24), 得到最优解

$$X^*=\begin{bmatrix}1.1174&0\\-0.6407&1.3062\end{bmatrix},\ N^*=\begin{bmatrix}1.7822&0\\0&1.9941\end{bmatrix},$$

$$W_1^*=[-1.6970\ \ -1.1684],\ W_2^*=[-0.2407\ \ 0.8709],$$

$$\widetilde Z^*=\begin{bmatrix}1.2250&-0.1376\\-0.1376&2.5807\end{bmatrix},\ \beta^*=1.6014,$$

$$\varepsilon_1=0.6333,\ \varepsilon_2=0.5541.$$

利用这个可行解可构造出系统的最优 H_∞ 保性能控制器为

$$u_1(t)=[\,-2.0317\ \ -0.8945\,]x(t),$$

$$u_2(t)=[\,0.1669\ \ 0.6667\,]x(t),$$

相应的性能指标上界为 $J^*=1.3087$.

4 结 论

本文基于 Lyapunov 泛函方法结合凸组合技术, 研究了一类不确定时变时滞切换广义系统的鲁棒 H_∞ 保性能控制问题, 给出了切换规则的设计方法和基于线性矩阵不等式表示的状态反馈控制器存在的一个充分条件. 所设计的控制器使系统对给定的性能指标有上界且具有一定的 H_∞ 干扰抑制水平.

参考文献(References)

[1] Ma S P, Zhang C H, Wu Z. Delay-dependent stability and control for uncertain discrete switched singular systems with time-delay[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 206(1): 413-424.

[2] Meng B，Zhang J F. Output feedback based admissible control of switched linear singular systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2006, 32(2): 179-185.

[3] Lin J X, Fei S M. Robust exponential admissibility of uncertain switched singular time-delay systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(12): 1773-1779.

[4] Shi S, Zhang Q, Yuan Z, et al. Hybrid impulsive control for switched singular systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2011, 5(1): 103-111.

(下转第796页)