文章编号: 1001-0920 (2013) 05-0716-05

直觉模糊群决策中专家权重确定的一种精确方法

周 伟, 何建敏, 余德建
(东南大学 经济管理学院，南京 211189)

摘 要: 在直觉模糊群决策中, 一般通过赋权法对不同专家或决策者进行有效区分, 相关研究多偏重等值赋权与主观赋权, 但两者均存在不足. 基于此, 提出一种仅依靠非犹豫度(专家对属性的非犹豫程度意味着对该属性信息的掌握程度)的精确加权(AWD)方法, 并证明了该方法的单调性与尺度不变性. 在AWD方法基础上, 提出FOAWA和IFOAWG算子, 证明了新算子的幂等性、有界性与交换性. 最后, 通过算例展示了所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 直觉模糊数；群决策；精确加权方法；单调性；尺度不变性
中图分类号: C394 **文献标志码:** A

Accurate method of obtaining decision expert weights in intuitionistic fuzzy group decision making

ZHOU Wei, *HE Jian-min*, *YU De-jian*
(School of Economics and Administration，Southeast University，Nanjing 211189，China．Correspondent：ZHOU Wei，E-mail：zw453@163.com)

Abstract: The weight-determined method is a good technique to distinguish different experts in intuitionistic fuzzy group decision making, such as the equal-weight method and the subjective weight-determined method. However, there are some puzzles in these two weight-determined methods. Therefore, an accurate weight-determined(AWD) method based on the membership and non-membership is proposed. The main idea of the AWD method is that putting larger weight into the expert with more attribute information. Then the monotonicity and the scale-invariance of the AWD method are investigated. Based on the AWD method, two intuitionistic fuzzy ordered accurate weighted aggregation operators are developed, and their properties are investigated in detail. Finally, a practical example is provided to illustrate the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: intuitionistic fuzzy number；group decision making；AWD method；monotonicity；scale-invariance

0 引 言

直觉模糊集 (IFS) 是 Atanassov[1]在模糊集 (FS)基础上扩展而来的一类广义模糊集, IFS 最大特点是通过隶属度和非隶属度的综合描述充分体现现实中的模糊性与不确定性, 因此 IFS 被进一步应用到诸多领域. 运用直觉模糊集进行决策的一个关键技术是直觉模糊信息集成, 特别是加入偏好的加权算子集成. 因此, Xu[2]在有序加权平均 (OWA) 算子[3]的基础上提出了直觉模糊环境下的加权平均 (IFWA) 算子和直觉模糊有序加权平均 (IFOWA) 算子, 以及在有序加权几何 (GOWA) 算子[4]的基础上提出的直觉模糊加权几何 (IFWG) 算子和直觉模糊有序加权几何 (IFOWA) 算子. Zhao 等[5]进一步提出了广义直觉模糊有序加权平均和几何 (GIFOWA/G) 算子等.

不难发现, 上述直觉模糊加权算子中一个关键因素就是权重, 故针对权重计算的研究引起了许多学者关注, 如 O'Hagan[6]提出了极大熵加权法, Filev 等[7]提出了指数平滑加权法, Nettleton 等[8]提出了几何算子加权法, Fuller 等[9]提出了方差最小加权法, Wang 等[10]提出了最大最小不一致加权法, Majlender[11]提出了极大 Renyi 熵加权法以及 Wang 等[12]提出了综合规划加权法等. 以上方法固然都能为不同属性赋权,

收稿日期: 2011-12-01；**修回日期:** 2012-03-28.
基金项目: 国家973计划项目(2010CB328104-02)；国家自然科学基金项目(71071034)；江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(CXZZ-0183)；教育部博士研究生学术新人奖资助项目.
作者简介: 周伟(1983−), 男, 博士生, 从事管理工程、金融工程等研究；何建敏(1956−), 男, 教授, 博士生导师, 从事管理工程、金融工程等研究.

但侧重点均不相同, 而具体从属性自身信息量大小出发, 结合数值的单调性与尺度不变性进行定权的方法几乎没有研究. 基于此, 本文将从直觉模糊数出发, 研究一种新的权重确定方法, 即精确加权方法 (AWD), 该方法的核心思想是对直觉模糊数越大的属性赋予越大权重, 同时保持不同属性值间原有内部关系, 即具备单调性与尺度不变性. 根据上述 AWD 方法的特征, 可认为该方法更合适于直觉模糊群决策中关于不同专家在不同属性中权重的确定, 因为专家针对属性给出隶属度与非隶属度 (非犹豫度) 大小意味着该专家对此属性信息和知识的了解程度, 故适合上述 AWD 方法进行权重计算. 进一步, 在 AWD 方法基础上, 提出了两类直觉模糊加权集成算子, 证明了新算子存在的幂等性、有序性和交换性. 最后, 利用具体算例充分验证了 AWD 方法和两类算子及其单调性与尺度不变性.

1 直觉模糊群决策中专家权重确定的AWD方法

群决策中, 如何客观确定多位专家或决策者的权重是关系到决策效果好坏的核心因素. 当然, 若拥有完备信息, 通过主观赋权法固然十分可靠, 但这不符合实情, 因为即使专家不变, 面对不同决策问题相同专家拥有的信息量也不相同, 因此, 如何客观确定群决策中专家权重意义重大.

为了方便直觉模糊数的比较与运算, Chen 等[13] 和 Hong 等[14]分别定义了直觉模糊数的得分函数和精确度函数. 不通过计算可知, 上述得分函数与精确度函数的取值区间分别为 $s(\alpha)\in[-1,1]$, $h(\alpha)\in[0,1]$. 为了方便后续权重的计算, 下面引入徐永杰等[15]提出的一种新得分函数 $s_2(\alpha)=0.5(1+\mu_\alpha-\nu_\alpha)$, 容易验证, 新得分函数取值区间为 $s_2(\alpha)\in[0,1]$, 且与原有得分函数存在一致性关系, 直觉模糊数之间的比较关系法则不变.

下面将提出一种群决策专家权重计算的加权法, 专家们对决策对象的了解程度充分反映在其评价值上, 即非犹豫度越大代表专家对该属性了解更多的信息, 则赋予专家更高权重. 该方法最大优点在于具备单调性与尺度一致性, 方法描述具体如下.

定义 1　设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$ 为一组直觉模糊数, $(a_{\sigma(1)},a_{\sigma(2)},\cdots,a_{\sigma(n)})$ 为 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的一个置换, 满足 $a_{\sigma(i-1)}\geqslant a_{\sigma(i)}$, 称 $(w_{\sigma(1)},w_{\sigma(2)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 为直觉模糊数组 α_i 的精确权重向量, 并有

$$w_{\sigma(i)}=T_{\sigma(i)}\Big/\sum_{i}^{n}T_{\sigma(i)}.\tag{1}$$

其中

$$T_{\sigma(i)}=S(\alpha_{\sigma(i)})\cdot I(\alpha_{\sigma(i)})\cdot L(\alpha_{\sigma(i)})\cdot R(\alpha_{\sigma(i)});$$

$$S(\alpha_{\sigma(i)})=$$
$$s_2(\alpha_{\sigma(i)}),\ S(\alpha_{\sigma(i)})\big|\big(s_2(\alpha_{\sigma(i)})=0\big)\to 0^+;$$

$$L(\alpha_{\sigma(i)})=\prod_{j=1}^{i-1}l(\alpha_{\sigma(j)}),\ i=2,3,\cdots,n;$$

$$R(\alpha_{\sigma(i)})=\prod_{j=i+1}^{n}r(\alpha_{\sigma(j)}),\ i=1,2,\cdots,n-1;$$

$$I(\alpha_{\sigma(i)})=$$
$$\begin{cases}h(\alpha_{\sigma(i)}), & \prod\limits_{j=1,j\neq i}^{n}(s_2(\alpha_{\sigma(i)})-s_2(\alpha_{\sigma(j)}))=0;\\ 1,\ \text{else};\end{cases}$$

$$l(\alpha_{\sigma(j)})=$$
$$\begin{cases}h(\alpha_{\sigma(j)}),\ s_2(\alpha_{\sigma(j-1)})-s_2(\alpha_{\sigma(j)})=0,\\ \qquad\qquad s_2(\alpha_{\sigma(j)})-s_2(\alpha_{\sigma(j+1)})>0;\\ 1,\ \text{else}\end{cases}$$

$$r(\alpha_{\sigma(j)})=$$
$$\begin{cases}h(\alpha_{\sigma(j)}),\ s_s(\alpha_{\sigma(j-1)})-s_s(\alpha_{\sigma(j)})>0,\\ \qquad\qquad s_2(\alpha_{\sigma(j)})-s_2(\alpha_{\sigma(j+1)})=0;\\ 1,\ \text{else}.\end{cases}$$

其中: $l(\alpha_{\sigma(1)})=l(\alpha_{\sigma(n)})=r(\alpha_{\sigma(1)})=r(\alpha_{\sigma(n)})=1$, $L(\alpha_{\sigma(1)})=1$, $R(\alpha_{\sigma(n)})=R(\alpha_{\sigma(n-1)})$, $j=2,3,\cdots,n-1$.

由定义 1 可得 $0\leqslant w_{\sigma(i)}\leqslant 1$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_{\sigma(i)}=1$.

进一步可定义由式 (1) 构成的专家权重计算方法为精确加权法 (AWD). 上述 AWD 方法计算的精确权重相比其他加权方法得到的权重存在两方面优良性质, 即单调性与尺度不变性, 证明如下.

定理 1 (单调性)　设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$ 为直觉模糊数组, $(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)})$ 为 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的一个置换, 满足 $\alpha_{\sigma(i-1)}\geqslant\alpha_{\sigma(i)}$, $(w_{\sigma(1)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 为数组 α_i 的精确权重向量, $\alpha_{\sigma(t_1)}$ 和 $\alpha_{\sigma(t_2)}$ $(t_1<t_2)$ 为 $\alpha_{\sigma(i)}$ 中任意两个直觉模糊数, 若 $\alpha_{\sigma(t_1)}\geqslant\alpha_{\sigma(t_2)}$, 则 $w_{\sigma(t_1)}\geqslant w_{\sigma(t_2)}$.

证明　下面分两种情况分别对其进行证明.

1) 若 $\alpha_{\sigma(t_1)}=\alpha_{\sigma(t_2)}$, 则 $\alpha_{\sigma(t_1)}=\cdots=\alpha_{\sigma(t_2)}$, $s_2(\alpha_{\sigma(t_1)})=\cdots=s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})$, 以及 $h(\alpha_{\sigma(t_1)})=\cdots=h(\alpha_{\sigma(t_2)})$, 进一步, 有

$$S(\alpha_{\sigma(t_1)})=S(\alpha_{\sigma(t_2)}),$$
$$I(\alpha_{\sigma(t_1)})=h(\alpha_{\sigma(t_1)})=I(\alpha_{\sigma(t_2)})=h(\alpha_{\sigma(t_2)}),$$
$$L(\alpha_{\sigma(t_2)})=\prod_{j=1}^{t_1-1}l(\alpha_{\sigma(j)})\cdot\prod_{j=t_1}^{t_2-1}l(\alpha_{\sigma(j)})=L(\alpha_{\sigma(t_1)}),$$

$$R(\alpha_{\sigma(t_1)})=\prod_{j=t_1+1}^{n}r(\alpha_{\sigma(j)})=R(\alpha_{\sigma(t_2)}),$$

$$T_{\sigma(t_1)}=T_{\sigma(t_2)}.$$

因此

$$w_{\sigma(t_1)}=\frac{T_{\sigma(t_1)}}{\sum_i^n T_{\sigma(i)}}=\frac{T_{\sigma(t_2)}}{\sum_i^n T_{\sigma(i)}}=w_{\sigma(t_2)}.$$

2) 若 $\alpha_{\sigma(t_1)}>\alpha_{\sigma(t_2)}$, 可分 2 类共 8 种情况证明:

第 1 类, $s_2(\alpha_{\sigma(t_1)})>s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})$, 且

① $I(\alpha_{\sigma(t_1)})=1$ 且 $I(\alpha_{\sigma(t_2)})=1$;

② $I(\alpha_{\sigma(t_1)})<1$ 且 $I(\alpha_{\sigma(t_2)})=1$;

③ $I(\alpha_{\sigma(t_1)})=1$ 且 $I(\alpha_{\sigma(t_2)})<1$;

④ $I(\alpha_{\sigma(t_1)})<1$ 且 $I(\alpha_{\sigma(t_2)})<1$.

第 2 类, $s_2(\alpha_{\sigma(t_1)})=s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})$, $h(\alpha_{\sigma(t_1)})>h(\alpha_{\sigma(t_2)})$ 且

① $I(\alpha_{\sigma(t_1)})=1$ 且 $I(\alpha_{\sigma(t_2)})=1$;

② $I(\alpha_{\sigma(t_1)})<1$ 且 $I(\alpha_{\sigma(t_2)})=1$;

③ $I(\alpha_{\sigma(t_1)})=1$ 且 $I(\alpha_{\sigma(t_2)})<1$;

④ $I(\alpha_{\sigma(t_1)})<1$ 且 $I(\alpha_{\sigma(t_2)})<1$.

相关证明可参考 1), 具体略. □

定理 2 (尺度不变性) 设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$ 为直觉模糊数组, $(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)})$ 为 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的一个置换, 满足 $\alpha_{\sigma(i-1)}\geqslant\alpha_{\sigma(i)}$, $(w_{\sigma(1)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 为数组 α_i 的精确权重向量, $\alpha_{\sigma(t_1)}$ 和 $\alpha_{\sigma(t_2)}$ $(t_1<t_2)$ 为数组 $\alpha_{\sigma(i)}$ 中任意两个直觉模糊数, 同时 $\alpha_{\sigma(g_1)}$ 和 $\alpha_{\sigma(g2)}$ 为 $(\alpha_{\sigma(t_1)},\cdots,\alpha_{\sigma(t_2)})$ 中任意两个直觉模糊数, 则:

1) 若 $s_2(\alpha_{\sigma(t_1)})>s_2(\alpha_{\sigma(t_1+1)})>\cdots>s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})$, 则有 $w_{\sigma(g_1)}:w_{\sigma(g_2)}=s_2(\alpha_{\sigma(g_1)}):s_2(\alpha_{\sigma(g_2)})$;

2) 若 $s_2(\alpha_{\sigma(t_1)})=s_2(\alpha_{\sigma(t_1+1)})=\cdots=s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})$, 则有 $w_{\sigma(g_1)}:w_{\sigma(g_2)}=h(\alpha_{\sigma(g_1)}):h(\alpha_{\sigma(g_2)})$.

证明 对于任意两个直觉模糊数 $\alpha_{\sigma(t_1)}$ 和 $\alpha_{\sigma(t_2)}$, 上述定理分别证明如下:

1) 若 $s_2(\alpha_{\sigma(t_1)})>s_2(\alpha_{\sigma(t_1+1)})>\cdots>s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})$, 则 $\alpha_{\sigma(t_1)}$ 和 $\alpha_{\sigma(t_2)}$ 可能存在 4 种前后关系, 即

$$s_2(\alpha_{\sigma(t_1-1)})>s_2(\alpha_{\sigma(t_1)}),\ s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})>s_2(\alpha_{\sigma(t_2+1)});$$

$$s_2(\alpha_{\sigma(t_1-1)})>s_2(\alpha_{\sigma(t_1)}),\ s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})=s_2(\alpha_{\sigma(t_2+1)});$$

$$s_2(\alpha_{\sigma(t_1-1)})=s_2(\alpha_{\sigma(t_1)}),\ s_2(\alpha_{\sigma(t_1-1)})>s_2(\alpha_{\sigma(t_1)});$$

$$s_2(\alpha_{\sigma(t_1-1)})=s_2(\alpha_{\sigma(t_1)}),\ s_2(\alpha_{\sigma(t_1-1)})=s_2(\alpha_{\sigma(t_1)}).$$

下面主要证明第 1 种情况, 其余类似.

1) 若 $s_2(\alpha_{\sigma(t_1-1)})>\cdots>s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})>s_2(\alpha_{\sigma(t_2+1)})$, 则

$$I(\alpha_{\sigma(t_1)})=I(\alpha_{\sigma(t_1+1)})=\cdots=I(\alpha_{\sigma(t_2)})=1,$$

$$L(\alpha_{\sigma(t_1)})=\cdots=L(\alpha_{\sigma(t_2)})=\prod_{j=1}^{t_1-1}l(\alpha_{\sigma(j)}),$$

$$R(\alpha_{\sigma(t_1)})=\cdots=R(\alpha_{\sigma(t_2)})=\prod_{j=t_2+1}^{n}r(\alpha_{\sigma(j)}).$$

因此, $w_{\sigma(g1)}:w_{\sigma(g2)}=s_2(\alpha_{\sigma(g1)}):s_2(\alpha_{\sigma(g2)})$.

2) 若 $s_2(\alpha_{\sigma(t_1-1)})>\cdots>s_2(\alpha_{\sigma(t_2)})=s_2(\alpha_{\sigma(t_2+1)})$, 则有 $I(\alpha_{\sigma(t_1)})=\cdots=I(\alpha_{\sigma(t_2-1)})=1$, 以及

$$I(\alpha_{\sigma(t_2)})=h(\alpha_{\sigma(t_2)}),$$

$$L(\alpha_{\sigma(t_1)})=\cdots=L(\alpha_{\sigma(t_2)})=\prod_{j=1}^{t_1-1}l(\alpha_{\sigma(j)}),$$

$$R(\alpha_{\sigma(t_1)})=\cdots=R(\alpha_{\sigma(t_2-1)})=h(\alpha_{\sigma(t_2)})\prod_{j=t_2+1}^{n}r(\alpha_{\sigma(j)}),$$

$$R(\alpha_{\sigma(t_2)})=\prod_{j=t_2+1}^{n}r(\alpha_{\sigma(j)}).$$

因此

$$w_{\sigma(g1)}:w_{\sigma(g2)}=s_2(\alpha_{\sigma(g1)}):s_2(\alpha_{\sigma(g2)}).$$

综上, 定理得证. □

2 基于 AWD 的两类直觉模糊集成算子

为了利用 AWD 方法进行直觉模糊群决策, 下面将研究两种有序精确加权集成算子, 并证明新算子类似原有算子, 存在幂等性、有界性和交换性.

定义 2 设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$ 为一组直觉模糊数, 直觉模糊有序精确加权平均 (IFOAWA) 算子与直觉模糊有序精确加权几何 (IFOAWG) 算子均为映射 $\Omega^n\to\Omega$, 并有

$$\mathrm{IFOAWA}_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}=w_{\sigma(1)}\alpha_{\sigma(1)}\oplus\cdots\oplus w_{\sigma(n)}\alpha_{\sigma(n)},\tag{2}$$

$$\mathrm{IFOAWG}_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}=\alpha_{\sigma(1)}^{w_{\sigma(1)}}\otimes\cdots\otimes\alpha_{\sigma(n)}^{w_{\sigma(n)}}.\tag{3}$$

其中: $(w_{\sigma(1)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 为直觉模糊数组 α_i 的精确权重向量, $(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)})$ 为 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的一个置换, 并满足 $\alpha_{\sigma(i-1)}\geqslant\alpha_{\sigma(i)}$.

定理 3 设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$ 为一组直觉模糊数, $(w_{\sigma(1)},w_{\sigma(2)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 为直觉模糊数组精确权重向量, 则通过 IFOAWA 算子和 IFOAWG 算子集成的直觉模糊数组仍为直觉模糊数, 并存在

$$\mathrm{IFOAWA}_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}=\Big(1-\prod_{i=1}^{n}(1-\mu_{\sigma(i)})^{w_{\sigma(i)}},\prod_{i=1}^{n}\nu_{\sigma(i)}^{w_{\sigma(i)}}\Big),\tag{4}$$

$$\mathrm{IFOAWG}_{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}=\Big(\prod_{i=1}^{n}\mu_{\sigma(i)}^{w_{\sigma(i)}},1-\prod_{i=1}^{n}(1-\nu_{\sigma(i)})^{w_{\sigma(i)}}\Big).\tag{5}$$

证明　因为 $(w_1,\cdots,w_n)$ 为 $(w_{\sigma(1)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 的位置还原置换, 且 $w_{\sigma(i)}\in[0,1]$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_{\sigma(i)}=1$. 根据定理 2 可知

$$\text{IFOAWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\text{IFWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n),\tag{6}$$

$$\text{IFOAWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\text{IFWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n).\tag{7}$$

再参考 Xu[2] 关于 IFWA 与 IFWG 的证明可证得定理 1 成立. □

定理 4(幂等性)　设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$ 为一组直觉模糊数, $(w_{\sigma(1)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 为直觉模糊数组 α_i 的精确权重向量, 且 $w_{\sigma(i)}\in[0,1]$ 和 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_{\sigma(i)}=1$. 若所有直觉模糊数均相等, 即 $\alpha_i=\alpha$, 则

$$\text{IFOAWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha,\tag{8}$$

$$\text{IFOAWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha.\tag{9}$$

证明　因为存在 $\alpha_i=\alpha$, 根据定理 2 可知 $w_{\sigma(1)}=\cdots=w_{\sigma(n)}$, 即 $w_{\sigma(1)}=\cdots=w_{\sigma(n)}=1/n$. 再根据定义 2, 可以得到

$$\text{IFOAWA}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\frac{1}{n}a\oplus\cdots\oplus\frac{1}{n}a=a,\tag{10}$$

同理可得 $\text{IFOAWG}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=\alpha$. □

推论 1　设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$ 为最大直觉模糊数组, 即任意 $\alpha_i=\alpha=(1,0)$, 并有 $(w_{\sigma(1)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 为直觉模糊数组的精确权重向量, 则

$$\text{IFOAWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha=(1,0),\tag{11}$$

$$\text{IFOAWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\alpha=(1,0).\tag{12}$$

类似定理 4, 可证明推论 1 成立.

推论说明, 在新构建的 IFOAWA 和 IFOAWG 算子中, 若专家一致认可某方案已满足最优条件, 即属性为最大直觉模糊数 $(1,0)$, 则该方案将为最优方案.

定理 5(有界性)　设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$ 为一组直觉模糊数, $(w_{\sigma(1)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 为直觉模糊数组 α_i 精确权重向量, 且 $w_{\sigma(i)}\in[0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n}w_{\sigma(i)}=1$, 若

$$\alpha^-=(\min_i\{\mu_i\},\max_i\{\nu_i\}),$$

$$\alpha^+=(\max_i\{\mu_i\},\min_i\{\nu_i\}),$$

则有

$$\alpha^-\leqslant\text{IFOAWA}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\alpha^+,\tag{13}$$

$$\alpha^-\leqslant\text{IFOAWG}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\leqslant\alpha^+.\tag{14}$$

定理 5 的证明可类似文献 [2] 中相关证明.

定理 6(交换性)　设 $\alpha_i=(\mu_{\alpha_i},\nu_{\alpha_i})$ 为直觉模糊数组, $(\tilde\alpha_1,\cdots,\tilde\alpha_n)$ 为 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的任意置换, 则

$$\text{IFOAWA}(\tilde\alpha_1,\cdots,\tilde\alpha_n)=\text{IFOAWA}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\tag{15}$$

$$\text{IFOAWG}(\tilde\alpha_1,\cdots,\tilde\alpha_n)=\text{IFOAWG}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n).\tag{16}$$

证明　因为 $(\tilde\alpha_1,\tilde\alpha_2,\cdots,\tilde\alpha_n)$ 为 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 的任意一组置换, 所以有

$$(\tilde\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\tilde\alpha_{\sigma(n)})=(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)}).\tag{17}$$

其中: $(\tilde\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\tilde\alpha_{\sigma(n)})$ 为 $(\tilde\alpha_1,\cdots,\tilde\alpha_n)$ 的置换, $(\alpha_{\sigma(1)},\cdots,\alpha_{\sigma(n)})$ 为 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的置换. 若 $(\tilde w_{\sigma(1)},\cdots,\tilde w_{\sigma(n)})$ 和 $(w_{\sigma(1)},\cdots,w_{\sigma(n)})$ 分别为直觉模糊数组 $(\tilde\alpha_1,\cdots,\tilde\alpha_n)$ 和 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 的精确权重向量, 则有

$$(\tilde w_{\sigma(1)},\cdots,\tilde w_{\sigma(n)})=(w_{\sigma(1)},\cdots,w_{\sigma(n)}).\tag{18}$$

结合式 (17) 和式 (18) 可得结论. □

上述幂等性、有界性与交换性的证明反映了新构建的直觉模糊加权集成算子满足直觉模糊集成算子基本性质, 有效拓展了直觉模糊集成方法理论.

3　算例计算与分析

某公司拟将一笔钱进行对外投资, 可选方案有 4 个: 1) 软件外包企业 A_1; 2) 清洁能源企业 A_2; 3) 连锁餐饮企业 A_3; 4) 快递企业 A_4. 由于资金与人员的有限性, 只能选择投资于其中某企业, 并且, 企业认为投资选择决定依赖以下 4 个指标: 1) 企业近 3 年成长能力 C_1; 2) 企业潜在风险 C_2; 3) 企业未来持续盈利能力 C_3; 4) 企业内外部经营环境 C_4. 为了科学合理决策, 投资公司聘请了由学者和管理人员组成的 4 人专家团队进行评价, 并最终决策.

决策前, 公司从企业自身投资目的与风格出发对上述 4 个主要评价因素进行了排序和权重的确定, 即 $w=(0.21,0.18,0.33,0.28)$. 但专家对不同企业不同属性的认知程度不了解, 无法主观确定权重. 专家对属性的评价值将充分考虑属性指标好与不好两方面, 具体由直觉模糊数体现. 将成本指标 C_2 转换为收益指标, 构成 4 个直觉模糊决策矩阵, 即 $D_{(q)}=(d_q^{ij})_{4\times5}$, $q=1,2,3,4$, 具体见表 1 ~ 表 4.

表 1　直觉模糊决策矩阵 $D_{(1)}$

属性	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$(0.80,0.10)$	$(0.67,0.20)$	$(0.90,0.05)$	$(0.77,0.21)$
A_2	$(0.67,0.20)$	$(0.82,0.15)$	$(0.86,0.12)$	$(0.79,0.15)$
A_3	$(0.90,0.05)$	$(0.88,0.12)$	$(0.68,0.25)$	$(0.86,0.12)$
A_4	$(0.77,0.21)$	$(0.73,0.12)$	$(0.79,0.15)$	$(0.98,0.01)$

表 2　直觉模糊决策矩阵 $D_{(2)}$

属性	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$(0.73,0.12)$	$(0.57,0.10)$	$(0.88,0.12)$	$(0.77,0.21)$
A_2	$(0.66,0.32)$	$(0.78,0.15)$	$(0.89,0.10)$	$(0.92,0.02)$
A_3	$(0.78,0.15)$	$(0.90,0.05)$	$(0.98,0.01)$	$(0.68,0.25)$
A_4	$(0.75,0.11)$	$(0.66,0.22)$	$(0.90,0.05)$	$(0.90,0.05)$

表 3 直觉模糊决策矩阵 $D_{(3)}$

属性	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$(0.64, 0.21)$	$(0.66, 0.32)$	$(0.78, 0.02)$	$(0.66, 0.10)$
A_2	$(0.66, 0.22)$	$(0.68, 0.25)$	$(0.64, 0.21)$	$(0.77, 0.22)$
A_3	$(0.85, 0.08)$	$(0.79, 0.15)$	$(0.77, 0.22)$	$(0.79, 0.15)$
A_4	$(0.83, 0.11)$	$(0.56, 0.32)$	$(0.66, 0.32)$	$(0.49, 0.45)$

表 4 直觉模糊决策矩阵 $D_{(4)}$

属性	C_1	C_2	C_3	C_4
A_1	$(0.82, 0.11)$	$(0.49, 0.45)$	$(0.80, 0.10)$	$(0.70, 0.08)$
A_2	$(0.77, 0.22)$	$(0.98, 0.01)$	$(0.66, 0.33)$	$(0.79, 0.15)$
A_3	$(0.92, 0.02)$	$(0.89, 0.10)$	$(0.77, 0.22)$	$(0.98, 0.01)$
A_4	$(0.66, 0.33)$	$(0.86, 0.12)$	$(0.56, 0.32)$	$(0.92, 0.02)$

本文考虑到专家在属性信息和知识上的不对称性, 以及对属性了解程度的变化性, 提出的AWD方法将是一个相对合适的专家权重计算方法. 首先, 利用IFOAWA算子进行集成, 主要步骤如下:

Step 1: 利用新得分函数 $s_2(\alpha)$ 和精确度函数 $h(\alpha)$ 计算直觉模糊数得分值与精确度, 可得得分矩阵和精确度矩阵 $S_{(q)} = (s_q^{ij})_{4\times 5}$ 和 $H_{(q)} = (h_q^{ij})_{4\times 5}$, 具体略.

Step 2: 利用AWD方法计算

$$w(d_q^{ij}) = (w(d_{\sigma(1)}^{ij}), w(d_{\sigma(2)}^{ij}), w(d_{\sigma(3)}^{ij}), w(d_{\sigma(4)}^{ij})).$$

由于篇幅限制, 下面具体给出属性1下4位专家权重, 其余可类似计算, 具体略.

$$w(d_q^{11}) = (0.279\,2, 0.264\,4, 0.241\,7, 0.214\,7),$$
$$w(d_q^{12}) = (0.331\,5, 0.255\,3, 0.232\,7, 0.180\,6),$$
$$w(d_q^{13}) = (0.290\,1, 0.275\,9, 0.220\,8, 0.213\,2),$$
$$w(d_q^{14}) = (0.272\,3, 0.262\,2, 0.262\,2, 0.203\,3).$$

以上权重的计算还能充分体现AWD加权方法的单调性与尺度不变性.

Step 3: 利用IFOAWA算子及AWD方法计算精确权重对直觉模糊决策矩阵 $D_{(q)} = (d_q^{ij})_{4\times 5}$ 的综合, 得到集成直觉模糊决策矩阵 D, 如表5所示.

表 5 集成直觉模糊决策矩阵 D

属性	C_1	C_2
A_1	$(0.762\,7, 0.125\,7)$	$(0.615\,4, 0.216\,4)$
A_2	$(0.696\,0, 0.234\,2)$	$(0.888\,0, 0.075\,4)$
A_3	$(0.875\,3, 0.056\,6)$	$(0.872\,5, 0.095\,9)$
A_4	$(0.764\,9, 0.163\,3)$	$(0.739\,0, 0.169\,7)$

属性	C_3	C_4
A_1	$(0.854\,9, 0.0603)$	$(0.732\,3, 0.138\,9)$
A_2	$(0.8045, 0.160\,2)$	$(0.836\,7, 0.092\,8)$
A_3	$(0.88\,20, 0.088\,7)$	$(0.895\,6, 0.071\,8)$
A_4	$(0.783\,3, 0.148\,1)$	$(0.924\,5, 0.033\,9)$

Step 4: 利用属性权重与IFWA算子对方案的属性值进行集成, 得到方案的总直觉模糊属性分别为 (0.772 4, 0.111 8), (0.815 5, 0.130 0), (0.883 0, 0.077 1), (0.830 3, 0.102 5).

Step 5: 分别利用新得分函数和精确函数计算上述4个投资方案的得分值和精确度为: (0.830 3, 0.945 5), (0.842 8, 0.945 5), (0.902 9, 0.960 2), (0.863 9, 0.932 9).

比较不同方案的得分值可得到4个方案排序如下: $A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$, 故最为合适方案是 A_3.

进一步可分析方法对算例的影响, 如在针对第1家公司企业成长能力的评价上, 专家给予的评分为 $(0.80, 0.10)$, $(0.73, 0.12)$, $(0.64, 0.21)$ 和 $(0.82, 0.11)$, 括号内分别为隶属度和非隶属度, 属于专家对属性了解的信息, 通过AWD方法得到4个专家在属性上的权重为 $w(d_q^{11}) = (0.279\,2, 0.264\,4, 0.241\,7, 0.214\,7)$. 由权重值可以看出非犹豫度越大的专家给予越多权重, 同时, 权重间的比例关系与非犹豫度一致, 故AWD方法能通过专家给出的属性值大小赋予专家具备单调性和尺度不变性的权重.

仍以上述属性为例, 由AWD方法计算的权重为 $w(d_q^{11}) = (0.279\,2, 0.264\,4, 0.241\,7, 0.214\,7)$. 利用文献[13]的方法, 首先有 V_i = (0.45, 0.425, 0.425, 0.465), 优先级为 V_4, V_1, V_2, V_3, 进而计算4个专家可以分配的权重为 $w(d_q^{11}) = (0.567\,1, 0.263\,7, 0.118\,6, 0.050\,4)$. 根据两种方法计算的权重值结果可知, 两种方法均可对不同专家区别对待, 即具备单调性; 但是第2种方法无法体现原有直觉模糊属性值的内部关系, 即属性值间比例关系, 称为尺度不变性. 本文提出的AWD方法具备该性质, 这也正是新方法的最大优势所在.

4 结 论

为了对直觉模糊环境中群决策的不同专家信息进行区别和集成, 本文提出了一种精确加权(AWD)方法, 新加权方法具备单调性与尺度不变性两个不同于其他加权方法的优良性质. 上述性质的存在能保证权重与非犹豫程度的数量关系恒定, 较好体现了直觉模糊数间的内在联系. 基于AWD加权方法, 进一步提出了两类直觉模糊有序精确加权集成算子, 证明了算子具备原有算子的幂等性、有界性与交换性. 最后, 通过算例进一步表明了新加权方法和新集成算子的可行性与有效性. 相信以上AWD加权方法和两类新集成算子的提出一方面扩展了直觉模糊信息集成理论, 另一方面也为直觉模糊环境下群决策中专家信息的差异化处理提供了一种客观合理的新技术.

参考文献(References)

[1] Atanassov K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

(下转第725页)