第 28 卷 第 5 期
Vol. 28 No. 5

控 制 与 决 策
Control and Decision

2013 年 5 月
May 2013

文章编号: 1001-0920 (2013) 05-0701-05

基于模糊双合作博弈的收益分配模型

冯庆华[1,2], 陈菊红[1], 刘 通[2]

(1. 西安理工大学 经济与管理学院，西安 710054；2. 西安财经学院 信息学院，西安 710100)

摘 要: 产品服务化供应链中, 多个提供商向系统集成商提供产品和服务, 获得了产品和服务收益. 以提供商的双重收益分配为例, 将提供商的服务质量作为参与程度, 在双合作博弈的基础上, 提出了模糊双合作博弈的收益分配模型, 定义了 Aubin 核心和 crisp 核心, 证明了凸模糊双合作博弈中, 韦伯集与 crisp 核心相等且是 Aubin 核心的子集, 并证明了提供商的服务质量提高时, 参与的联盟越大, 边际收益越大, 从而保证最优分配方案的存在性和模糊双联盟结构的稳定性.

关键词: 提供商；模糊双合作博弈；核心；韦伯集

中图分类号: O225 **文献标志码:** A

Model of profit allocation based on fuzzy bicooperative game

FENG Qing-hua[1,2], *CHEN Ju-hong*[1], *LIU Tong*[2]

(1. School of Economics and Management，Xi’an University of Technology，Xi’an 710054，China；2. School of Information，Xi’an University of Finance and Economics，Xi’an 710100，China．Correspondent：FENG Qing-hua, E-mail：fqhua96183@126.com)

Abstract: In the product servitization supply chain, the multiple providers provide products and services to the system integrators and gain the profits of products and services. Taking the double profit allocation of the providers as an example, the profit allocation model of the fuzzy bicooperative game is presented by the service quality of the provider as participation based on the bicooperative game. The Aubin core and the crisp core of the fuzzy bicooperative game are defined. It is proved that the Weber set is consistent with the crisp core and the Weber set is the subset of the Aubin core, and the greater the alliance, the greater the marginal profit with the service quality of the provider increases in the convex fuzzy bicooperative game, which indicate that the optimal allocation is existent and the fuzzy bicoalition is stable.

Key words: provider；fuzzy bicooperative game；core；Weber set

0 引 言

在运作管理中, 企业为了追求利益最大化选择了相互合作, 形成各种联盟. 如何进行收益分配是目前联盟研究的主要问题, 而合作博弈研究的正是参与人如何构成联盟, 联盟的总收益如何进行最优分配的问题[1-3]. 在合作博弈的最优分配解中, 研究最多的是Gillies[4]提出的核心解. 国外学者对核心的研究中, Weber[5]提出了韦伯集的定义, 证明了合作博弈的核心是韦伯集的子集. Shapley[6]提出了凸博弈的定义, 并证明了凸博弈核心非空以及凸博弈的核心、稳定集和韦伯集三者相等. Ichiishi[7]证明了如果韦伯集是核心的子集, 则该博弈是凸博弈. Branzei[8]将模糊理论引入合作博弈中, 提出了模糊合作博弈和凸模糊合作博弈的定义, 并证明了凸模糊合作博弈的联盟收益递增定理以及Aubin核心、crisp核心和韦伯集三者相等. Bilbao[9-10]等提出了双合作博弈模型, 定义了双合作博弈的核心和韦伯集, 证明了凸双合作博弈的核心与韦伯集相等. 目前还没有相关文献将模糊理论引入双合作博弈中来研究模糊双合作博弈模型以及博弈的核心与韦伯集之间关系的问题.

从应用来看, 模糊双合作博弈模型对解决双重收益分配问题具有一定的应用价值. 例如在服务型制造模式下, 多个提供商向系统集成商提供产品和服务, 形成了供应链联盟, 获得了产品收益和服务收益[11].

收稿日期: 2012-01-03；**修回日期:** 2012-04-19.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71272117)；陕西省软科学基金项目(2009K01-94); 陕西省高校重点学科基金项目(107-00X902).

作者简介: 冯庆华(1977−), 女, 讲师, 博士, 从事博弈论、供应链管理等研究；陈菊红(1964−), 女, 教授, 博士生导师, 从事物流、供应链管理等研究.

产品收益由产品的价格和数量来确定, 服务收益由于服务具有的无形性特征, 存在着不确定性, 并受到服务质量的影响, 应根据提供商的实际服务质量, 在服务的期望收益基础上按比例进行分配. 因此, 本文以产品服务化供应链中提供商的收益分配为例,在双合作博弈和模糊合作博弈模型基础上, 提出了如下的基于模糊双合作博弈的收益分配模型.

1 模糊双合作博弈模型

设 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为参与者的集合, 模糊双合作联盟为 (s, t), s 和 t 为 n 维向量, $i \in N$, s_i 和 t_i 分别表示参与者 i 参与到联盟 s 和 t 中的参与程度, 且 $0 \leqslant s_i \leqslant 1$, $0 \leqslant t_i \leqslant 1$. 设 $\mathrm{car}(s) = \{i \in N | s_i > 0\}$, $\mathrm{car}(t) = \{i \in N | t_i > 0\}$, $\mathrm{car}(s) \bigcap \mathrm{car}(t) = \phi$, $\mathrm{car}(s, t) = (\mathrm{car}(s), \mathrm{car}(t))$ 称为 (s, t) 的载体. 对于 $S, T \subseteq N$, 称 (e^S, e^{T}) 为 crisp 双合作联盟, 联盟中参与者的参与程度为 0 或 1, 0 表示不参与, 1 表示完全参与.

定义 1 设模糊双合作博弈 (N, bv), $bv : (BF)^N \to R$ 为模糊双联盟的收益函数, $bv(e^\phi, e^\phi) = 0$, $(BF)^N = \{(s, t) : s, t \in [0, 1]^N, \mathrm{car}(s) \bigcap \mathrm{car}(t) = \phi\}$ 表示所有模糊双合作联盟的集合. 下面用 $\mathcal{BFG}^N$ 表示模糊双合作博弈.

以产品服务化供应链为例, 设提供商 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$ 为同一个系统集成商提供产品和服务. 提供商的收益为: 产品收益 + 服务质量 × 期望的服务收益. 提供商有 3 种选择: 参与联盟 $\mathrm{car}(s)$ 提供产品和服务; 参与联盟 $\mathrm{car}(t)$ 既不提供产品也不提供服务; 参与联盟 $N \setminus (\mathrm{car}(s) \bigcup \mathrm{car}(t))$ 只提供产品不提供服务. s_i 表示 $\mathrm{car}(s)$ 中的提供商 i 根据实际的服务质量确定的参与程度. 假设 $bv(e^\phi, e^N)$ 表示所有提供商都拒绝提供产品和服务使得方案未执行的损失, $bv(e^N, e^\phi)$ 表示所有的提供商都提供产品和服务获得的最大总收益, 则模糊双合作联盟 (s, t) 的纯收益为 $bv(s, t) - bv(e^\phi, e^N)$, $\mathrm{car}(s)$ 和 $N \setminus (\mathrm{car}(s) \bigcup \mathrm{car}(t))$ 中的提供商来分享该收益, 而 $\mathrm{car}(t)$ 中的提供商获得的收益为 0. 假设 $N \setminus \mathrm{car}(t)$ 即 $\mathrm{car}(s) \bigcup (N \setminus (\mathrm{car}(s) \bigcup \mathrm{car}(t)))$ 中的提供商 i 获得的产品收益为 z_i, 而 $\mathrm{car}(s)$ 中的提供商不仅提供了产品, 还提供了服务, 需获得相应的服务收益. 假设提供商 i 的期望服务收益为 y_i, 而实际的服务收益为 $s_i y_i$. 从而可得出 $\mathrm{car}(s)$ 中的提供商 i 的总收益为 $s_i y_i + z_i$, $N \setminus (\mathrm{car}(s) \bigcup \mathrm{car}(t))$ 中的提供商 i 的总收益为 z_i.

转归是满足个体理性的所有可能的分配方案.

定义 2 模糊双合作博弈 $\mathcal{BFG}^N$ 的转归

$$I(bv) = \Big\{x \in I(bv) | x_i \geqslant bv(e^i, e^{N \setminus i}) - bv(e^\phi, e^N), \sum_{i \in N} x_i = bv(e^N, e^\phi) - bv(e^\phi, e^N)\Big\}. \quad (1)$$

核心给出了所有分配中的最优和最稳定的方案, 分为 Aubin 核心和 crisp 核心, crisp 核心是 Aubin 核心的特例, 即参与程度为 1 时的最优分配.

定义 3 模糊双合作博弈 $\mathcal{BFG}^N$ 的 Aubin 核心

$$C(bv) = \Big\{x \in I(bv) \Big| \text{存在 } y, z \in R^n, \text{ 使得 } x = y + z, \sum_{i \in \mathrm{car}(s)} s_i y_i + \sum_{i \in N \setminus \mathrm{car}(t)} z_i \geqslant bv(s, t) - bv(e^\phi, e^N)\Big\}. \quad (2)$$

定义 4 模糊双合作博弈 $\mathcal{BFG}^N$ 的 crisp 核心

$$C^{cr}(bv) = \Big\{x \in I(bv) \Big| \text{存在} y, z \in R^n, \text{使得} x = y + z, \sum_{i \in \mathrm{car}(s)} y_i + \sum_{i \in N \setminus \mathrm{car}(t)} z_i \geqslant bv(e^{\mathrm{car}(s)}, e^{\mathrm{car}(t)}) - bv(e^\phi, e^N)\Big\}. \quad (3)$$

Grabisch[12]等给出了如下的双合作联盟的偏序集和最大链的定义:

设两个双合作联盟 (A, B) 和 (C, D) 的包含关系为 $(A, B) \sqsubseteq (C, D) \iff A \subseteq C, B \supseteq D$. 将 $\sqsubset$ 定义为严格包含, 则 $(A, B) \sqsubset (C, D)$ 表示 $A \subset C, B \supset D$. 双合作博弈的偏序集 $(3^N, \sqsubseteq)$ 满足如下性质:

1) (ϕ, N) 是偏序集的第 1 个元素, 且满足 $(\phi, N) \sqsubseteq (A, B)$, 其中 $(A, B) \in 3^N$.

2) (N, ϕ) 是偏序集的最后一个元素, 且满足 $(A, B) \sqsubseteq (N, \phi)$, 其中 $(A, B) \in 3^N$.

3) 3^N 中 (A, B) 和 (C, D) 的并为 $(A, B) \bigvee (C, D) = (A \bigcup C, B \bigcap D)$; 交为 $(A, B) \bigwedge (C, D) = (A \bigcap C, B \bigcup D)$.

设 $\overline{N} = \{-n, \cdots, -1, 1, \cdots, n\}$, $\Lambda : 3^N \to 2^{\overline{N}}$ 满足 $\Lambda(S, T) = S \bigcup \{-i : i \in (N \setminus T)\}$. 在偏序集 $(3^N, \sqsubseteq)$ 中, $\Theta(3^N)$ 表示所有从 (ϕ, N) 到 (N, ϕ) 的最大链的集合, 则最大链 $\theta \in \Theta(3^N)$ 表示为

$$(\phi, N) \sqsubset (S_1, T_1) \cdots \sqsubset (S_j, T_j) \cdots \sqsubset (S_{2n-1}, T_{2n-1}) \sqsubset (N, \phi). \quad (4)$$

可以看出, 每个最大链有 $2n + 1$ 个双联盟, 在 $\overline{N}$ 上有个对应的序 $\theta = (i_1, \cdots, i_{2n})$ 满足 $\Lambda(S_j, T_j) = \theta(i_j)$, $j = 1, 2, \cdots, 2n$, $i_j \in \overline{N}$. $\theta(i_j) = \{i_1, \cdots, i_j\}$ 表示在 i_j 之前的参与者集合, 则在 $2^{\overline{N}}$ 上可得到相应的最大链为

$$\phi \subset \{i_1\} \cdots \subset \{i_1, \cdots, i_j\} \cdots \subset \{i_1, \cdots, i_{2n-1}\} \subset \overline{N}. \quad (5)$$

根据上述定义, 可得出模糊双合作博弈的偏序集和最大链的定义为:

模糊双合作博弈的偏序关系为 $(s,t)\leqslant(m,n)\Leftrightarrow s\leqslant m, t\geqslant n$. 每个参与者 i, $s\leqslant m$ 表示 $s_i\leqslant m_i$, $t\leqslant n$ 表示 $t_i\leqslant n_i$. 偏序集 $(\mathcal{BFG}^N,\leqslant)$ 具有如下性质:

1) (e^ϕ,e^N) 是偏序集的第 1 个元素, 且满足 $(e^\phi, e^N)\leqslant(s,t)$, 其中 $(s,t)\in(BF)^N$.

2) (e^N,e^ϕ) 是偏序集的最后一个元素, 且满足 $(s,t)\leqslant(e^N,e^\phi)$, 其中 $(s,t)\in(BF)^N$.

3) $(BF)^N$ 中 (s,t) 和 (m,n) 的并为 $(s,t)\bigvee(m,n) = (\max(s_i,m_i),\min(t_i,n_i))$; 交为 $(s,t)\bigwedge(m,n) = (\min(s_i,m_i),\max(t_i,n_i))$.

由 $\Lambda(\mathrm{car}(s,t))=\mathrm{car}(s)\bigcup\{-i:i\in(N\setminus\mathrm{car}(t)\}$, 可得到如下的最大链:

$$(\phi,N)\ \sqsubset\ \mathrm{car}(s_1,t_1)\cdots\sqsubset\mathrm{car}(s_j,t_j)\cdots\sqsubset \mathrm{car}(s_{2n-1},t_{2n-1})\sqsubset(N,\phi).\tag{6}$$

这个最大链在 $\overline{N}$ 上有一个对应的序 $\theta=(i_1,\cdots,i_{2n})$ 且 $\theta(i_j)=\Lambda(\mathrm{car}(s_j,t_j))=\mathrm{car}(s_j)\bigcup\{-i_j:i_j\in N\backslash\mathrm{car}(t_j)\}$. $\theta(i_j)=\{i_1,\cdots,i_j\}$ 表示在 i_j 之前的参与者的集合, 则 $\Lambda^{-1}(\theta(i_1)\setminus i_1)=(\phi,N)$, $\Lambda^{-1}(\theta(i_{2n}))=(N,\phi)$. $2^{\overline{N}}$ 上可得到相应的最大链为

$$\phi\subset\{i_1\}\cdots\subset\{i_1,\cdots,i_j\}\cdots\subset\{i_1,\cdots,i_{2n-1}\}\subset\overline{N}.\tag{7}$$

最大链体现了提供商的选择和联盟结构的动态变化过程. Λ 函数将双合联盟转化为合作联盟, 即 θ 序, 将 $\mathrm{car}(s)$ 中的每个提供商根据既提供产品又提供服务分为了产品提供商和服务提供商, 从而将 N 个提供商集合转变为 $2N$ 个产品和服务提供商的集合.

Bilbao 等[10]提出了双合作博弈的韦伯集的定义: 设 b 为双合作博弈的联盟函数, 在 $2^{\overline{N}}$ 上的最大链 θ 的边际向量 $M^\theta(b)$ 和 $m^\theta(b)$ 分别表示为

$$M^\theta_{i_j}(b)=b\Big[\Lambda^{-1}\Big(\sum_{r=1}^{j}e^{i_r}\Big)\Big]-b\Big[\Lambda^{-1}\Big(\sum_{r=1}^{j-1}e^{i_r}\Big)\Big],\tag{8}$$

$$m^\theta_{-i_j}(b)=b\Big[\Lambda^{-1}\Big(\sum_{r=1}^{j}e^{i_r}\Big)\Big]-b\Big[\Lambda^{-1}\Big(\sum_{r=1}^{j-1}e^{i_r}\Big)\Big].\tag{9}$$

则韦伯集 $W(b)$ 是由边际向量 $a^\theta(b)=M^\theta_{i_j}(b)+m^\theta_{-i_j}(b)$ 组成的凸包, 可得出 $W(b)=W^{cr}(bv)$, $M^\theta_{i_j}(b)$ 表示提供商 i_j 的产品边际收益, $m^\theta_{-i_j}(b)$ 表示提供商 i_j 的服务边际收益.

2　凸模糊双合作博弈

根据 Branzei 等[8]提出的凸模糊合作博弈的定义, 本文提出了凸模糊双合作博弈应满足的两个性质:

1) 超模性, 即 $bv((s^1,t^1)\bigvee(s^2,t^2))+bv((s^1,t^1)\bigwedge(s^2,t^2))\geqslant bv(s^1,t^1)+bv(s^2,t^2)$.

2) 凸性, 即设 $i\in N$, $j\in N\setminus\{i\}$, 对于任一模糊双联盟 (s,t), 当 t 不变, s 中除 s_i 之外的分量 s_j 也不变时, $bv(s,t)$ 是关于 $s_i\in[0,1]$ 的一个凸函数. 下面用 $\mathcal{CBFG}^N$ 表示所有凸模糊双合作博弈的集合.

凸模糊双合作博弈满足如下的收益递增定理:

定理 1　凸模糊双合作博弈 $\mathcal{CBFG}^N$, 设 $i\in N$, $(s^1,t^1),(s^2,t^2)\in(BF)^N$ 且 $(s^1,t^1)\leqslant(s^2,t^2)$, 令 $\varepsilon\in R_+$ 且 $0\leqslant\varepsilon\leqslant1-s_i^2$, 有

$$bv(s^1+\varepsilon e^i,t^1)-bv(s^1,t^1)\leqslant bv(s^2+\varepsilon e^i,t^2)-bv(s^2,t^2).\tag{10}$$

证明　设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$, 模糊双合作联盟 $(c^0,d^0),(c^1,d^1),\cdots,(c^n,d^n)$ 满足 $c^0=s^1,d^0=t^1$ 且 $c^k=c^{k-1}+(s_k^2-s_k^1)e^k$, $d^k=d^{k-1}+(t_k^2-t_k^1)e^k$, 其中 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$, 则可以推出 $c^n=s^2,d^n=t^2$. 下面先来证明当 $k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 时如下不等式成立:

$$bv(c^k+\varepsilon e^i,d^k)-bv(c^k,d^k)\geqslant bv(c^{k-1}+\varepsilon e^i,d^{k-1})-bv(c^{k-1},d^{k-1}).\tag{11}$$

当 $k\neq i$ 时, 根据凸模糊双合作博弈的超模性, 设 $(s^1,t^1)=(c^{k-1}+\varepsilon e^i,d^{k-1})$, $(s^2,t^2)=(c^k,d^k)$, 则 $(s^1,t^1)\bigvee(s^2,t^2)=(c^k+\varepsilon e^i,d^k)$, $(s^1,t^1)\bigwedge(s^2,t^2)=(c^{k-1},d^{k-1})$, 可得到不等式 (11) 成立.

当 $k=i$ 时, 根据凸性, 可得到如下不等式:

$$bv(c^i+\varepsilon e^i,d^i)-bv(c^i,d^i)\geqslant bv(c^{i-1}+\varepsilon e^i,d^i)-bv(c^{i-1},d^i).\tag{12}$$

根据超模性, 设 $(s^1,t^1)=(c^{i-1}+\varepsilon e^i,d^{i-1})$, $(s^2,t^2)=(c^{i-1},d^i)$, 则 $(s^1,t^1)\bigvee(s^2,t^2)=(c^{i-1}+\varepsilon e^i,d^i)$, $(s^1,t^1)\bigwedge(s^2,t^2)=(c^{i-1},d^{i-1})$, 可得到如下不等式:

$$bv(c^{i-1}+\varepsilon e^i,d^i)-bv(c^{i-1},d^i)\geqslant bv(c^{i-1}+\varepsilon e^i,d^{i-1})-bv(c^{i-1},d^{i-1}).\tag{13}$$

联立不等式 (12) 和 (13) 可得到不等式 (11) 成立. 将不等式 (11) 中 k 分别等于 $1,2,\cdots,n$ 的 n 个不等式相加, 可得到不等式 (10) 成立. □

定理 2　凸模糊双合作博弈 $\mathcal{CBFG}^N$, 设 $i\in N$, $(s^1,t^1),(s^2,t^2)\in(BF)^N$ 且 $(s^1,t^1)\leqslant(s^2,t^2)$, 令 ε_1, $\varepsilon_2>0$ 且 $s_i^1+\varepsilon_1\leqslant s_i^2+\varepsilon_2\leqslant1$, 有

$$\varepsilon_1^{-1}[bv(s^1+\varepsilon_1e^i,t^1)-bv(s^1,t^1)]\leqslant \varepsilon_2^{-1}[bv(s^2+\varepsilon_2e^i,t^2)-bv(s^2,t^2)].\tag{14}$$

证明　设 $(s^2,t^2)=(s^2+(s_i^1-s_i^2)e^i,t^2)$, $\varepsilon=\varepsilon_1$, 根据定理 1, 可得

$$\varepsilon_1^{-1}[bv(s^2+(s_i^1-s_i^2+\varepsilon_1)e^i,t^2)- bv(s^2+(s_i^1-s_i^2)e^i,t^2)]\geqslant \varepsilon_1^{-1}[bv(s^1+\varepsilon_1e^i,t^1)-bv(s^1,t^1)].\tag{15}$$

由于 $s_i^2+\varepsilon_2\geqslant s_i^2+(s_i^1-s_i^2+\varepsilon_1)$, $s_i^2\geqslant s_i^2+(s_i^1-$

s_i^2), 根据凸性, 可得到如下的不等式:

$$\varepsilon_2^{-1}[bv(s^2+\varepsilon_2 e^i,t^2)-bv(s^2,t^2)]\geqslant$$
$$\varepsilon_1^{-1}[bv(s^2+(s_i^1-s_i^2+\varepsilon_1)e^i,t^2)-$$
$$bv(s^2+(s_i^1-s_i^2)e^i,t^2). \tag{16}$$

联立不等式 (15) 和 (16), 可以得到不等式 (14) 成立. □

定理 1 和定理 2 说明了当模糊联盟函数满足超模性和凸性, 提供商提高服务质量时, 参与的联盟越大, 增加的收益越多.

推论 1 如果模糊双合作博弈 $\mathcal{BFG}^N$ 满足超模性, 对于 $i\in N$, $(s^1,t^1),(s^2,t^2)\in(BF)^{N\setminus i}$ 且 $(s^1,t^1)\leqslant(s^2,t^2)$, 则 $bv(s^1,t^1)-bv(s^1,t^1+\varepsilon e^i)\leqslant bv(s^2,t^2)-bv(s^2,t^2+\varepsilon e^i)$.

证明 设 $t^{2\prime}=t^2+\varepsilon e^i$, 对 (s^1,t^1) 和 $(s^2,t^{2\prime})$ 应用超模性, 可证明该不等式成立. □

3 凸模糊双合作博弈核心非空定理

Bilbao 等[10]证明了当双合作博弈满足超模性 $b((S_1,T_1)\bigvee(S_2,T_2))+b((S_1,T_1)\bigwedge(S_2,T_2))\geqslant b(S_1,T_1)+b(S_2,T_2)$ 时, $C(b)=W(b)$ 成立, 因为韦伯集是一个非空集合, 所以该双合作博弈的核心非空.

对于凸模糊双合作博弈, 可证明如下定理.

定理 3 凸模糊双合作博弈的核心非空, 且满足 $W^{cr}(bv)=C^{cr}(bv)$, $W^{cr}(bv)\subseteq C(bv)$.

证明 根据定义可知 $C^{cr}(bv)=C(b)=W(b)=W^{cr}(bv)$, 要证明 $W^{cr}(bv)\subseteq C(bv)$, 只需证明 $C^{cr}(bv)\subseteq C(bv)$ 成立即可[13]. 设 $\phi(s)=|\{i\in N|0<s_i<1\}|$, 下面用数学归纳法来证明, 对于任一 $y,z\in C^{cr}(bv)$, $\sum\limits_{i\in\mathrm{car}(s)}s_iy_i+\sum\limits_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i\geqslant bv(s,t)-bv(e^\phi,e^N)$ 在 $\phi(s)$ 上都成立. 当 $\phi(s)=0$ 时, 有

$$s=e^{\mathrm{car}(s)},$$
$$bv(s,t)-bv(e^\phi,e^N)=bv(e^{\mathrm{car}(s)},t)-bv(e^\phi,e^N)=$$
$$bv(e^{\mathrm{car}(s)},e^{\mathrm{car}(t)})-bv(e^\phi,e^N)\leqslant$$
$$\sum_{i\in\mathrm{car}(s)}y_i+\sum_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i=\sum_{i\in\mathrm{car}(s)}s_iy_i+\sum_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i$$

成立. 假设 $\phi(s)=k,0\leqslant k<r\leqslant n$, 对于任一 $(s,t)\in(BF)^N$, $bv(s,t)-bv(e^\phi,e^N)\leqslant\sum\limits_{i\in\mathrm{car}(s)}s_iy_i+\sum\limits_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i$ 成立. 当 $\phi(s)=r$ 时, 设 $j\in N$, $0<s_j<1$, $a=s-s_je^j$, $b=s+(1-s_j)e^j$, 则 $s=(1-s_j)a+s_jb$, $\phi(a)=\phi(b)=r-1$. 根据假设可得

$$bv(a,t)-bv(e^\phi,e^N)\leqslant\sum_{i\in\mathrm{car}(a)}a_iy_i+\sum_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i,$$
$$bv(b,t)-bv(e^\phi,e^N)\leqslant\sum_{i\in\mathrm{car}(b)}b_iy_i+\sum_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i.$$

凸模糊双合作博弈满足凸性, 因而有

$$bv(s,t)-bv(e^\phi,e^N)=$$
$$bv((1-s_j)a+s_jb,t)-bv(e^\phi,e^N)\leqslant$$
$$(1-s_j)bv(a,t)+s_jbv(b,t)-bv(e^\phi,e^N)\leqslant$$
$$(1-s_j)\Big(\sum_{i\in\mathrm{car}(a)}a_iy_i+\sum_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i+bv(e^\phi,e^N)\Big)+$$
$$s_j\Big(\sum_{i\in\mathrm{car}(b)}b_iy_i+\sum_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i+bv(e^\phi,e^N)\Big)-bv(e^\phi,e^N)=$$
$$\sum_{i\in\mathrm{car}(s)}s_iy_i+\sum_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i.$$

因此 $\sum\limits_{i\in\mathrm{car}(s)}s_iy_i+\sum\limits_{i\in N\setminus\mathrm{car}(t)}z_i\geqslant bv(s,t)-bv(e^\phi,e^N)$ 成立, 所以 $y,z\in C(bv)$, 即 $C^{cr}(bv)\subseteq C(bv)$. 由于 $C^{cr}(bv)=W(b)=W^{cr}(bv)$, 韦伯集是一个非空集合, 说明了凸模糊双合作博弈的核心非空. □

上述定理证明了凸模糊双合作博弈的crisp核心与韦伯集相等, 韦伯集是Aubin核心的子集.

4 应用算例

Choquet 积分[14]给出了模糊联盟函数的具体形式, 本文将 Choquet 积分应用在模糊双合作联盟函数中, 即给定联盟 $(s,t)\in 3^N$, $(s,t)_h=\{i|i\in N,s_i\geqslant h\}$, 其中 $h\in[0,1]$. $Q(s)=\{s_i|s_i>0\}$, $q(s)$ 为 $Q(s)$ 中元素的个数, 将 $Q(s)$ 中的元素按照非减序列排列为 $h_1\geqslant h_2\geqslant\cdots\geqslant h_{q(s)}$, $[S,T]_{h_l}$ 表示参与程度 $s_i\geqslant h_l$ 的所有双合作联盟, 则具有 choquet 积分形式的模糊双合作博弈的联盟收益函数为

$$bv(s,t)=\sum_{l=1}^{q(s)}b([S,T]_{h_l})(h_l-h_{l-1}).$$

设某产品服务化供应链中有 3 个提供商 $\{1,2,3\}$, 在 3^N 上存在一个最大链 θ 为 $(\phi,N)\sqsubset(\phi,\{2,3\})\sqsubset(\phi,\{3\})\sqsubset(\phi,\phi)\sqsubset(\{1\},\phi)\sqsubset(\{1,2\},\phi)\sqsubset(N,\phi)$. 对于每个双合作联盟, 根据 $\theta(i_j)=\Lambda(\mathrm{car}(s_j,t_j))=\mathrm{car}(s_j)\bigcup\{-i_j:i_j\in N\setminus\mathrm{car}(t_j)\}$, 在 $2^{\overline{N}}$ 上相应的最大链为 $\phi\subset\{-1\}\subset\{-1,-2\}\subset\{-1,-2,-3\}\subset\{-1,-2,-3,1\}\subset\{-1,-2,-3,1,2\}\subset\{\overline{N}\}$.

设 $b(\phi,N)=0$, $b(\phi,\{2,3\})=20$, $b(\phi,\{3\})=40$, $b(\phi,\phi)=50$, $b(\{1\},\phi)=80$, $b(\{1,2\},\phi)=120$, $b(N,\phi)=180$. 可证明, 对于 $(S,T)\in\theta(3^N)$, 双合作联盟函数 $b(S,T)$ 是满足超模性的, 由 Choquet 积分得到的模糊双联盟函数 $b(s,t)$ 也是满足超模性和凸性的 ($b(s,t)$ 关于 s_i 的二阶导数为 0). 所以根据韦伯集的定义, 可得到 $z_1=b(\phi,\{2,3\})=20$, $z_2=b(\phi,\{3\})-b(\phi,\{2,3\})=20$, $z_3=b(\phi,\phi)-b(\phi,\{3\})=10$, $y_1=b(\{1\},\phi)-b(\phi,\phi)=30$, $y_2=b(\{1,2\},\phi)-b(\{1\},\phi)=40$, $y_3=b(N,\phi)-b(\{1,2\},\phi)=60$. 最大链中期望服务质量为

1 时的一种最优分配方案如表 1 所示, 可验证此分配方案满足 crisp 核心的定义.

表 **1**　期望服务质量均为 1 时的收益分配表

联 盟	联盟收益	z_1	y_1	z_2	y_2	z_3	y_3
(ϕ, N)	0	0	0	0	0	0	0
$(\phi, \{2,3\})$	20	20	0	0	0	0	0
$(\phi, \{3\})$	40	20	0	20	0	0	0
(ϕ, ϕ)	50	20	0	20	0	10	0
$(\{1\}, \phi)$	80	20	30	20	0	10	0
$(\{1,2\}, \phi)$	120	20	30	20	40	10	0
(N, ϕ)	180	20	30	20	40	10	60

当提供商的服务质量不同时, 企业加入联盟越早, 技术越成熟, 相应的服务质量也越高, 故设 $s_1 = 0.9, s_2 = 0.8, s_3 = 0.5$. 根据 Choquet 积分得

$$b(\{s_1\}, \phi) = 0.9 \times 80 = 72,$$

$$b(\{s_1, s_2\}, \phi) =$$
$$0.8 \times b(\{1,2\}, \phi) + (0.9 - 0.8) \times b(\{1\}, \phi) =$$
$$0.8 \times 120 + 0.1 \times 80 = 104,$$

$$b(\{s_1, s_2, s_3\}, \phi) =$$
$$0.5 \times b(\{1,2,3\}, \phi) + (0.8 - 0.5) \times b(\{1,2\}, \phi) +$$
$$(0.9 - 0.8) \times b(\{1\}, \phi) =$$
$$0.5 \times 180 + 0.3 \times 120 + 0.1 \times 80 = 134,$$

进一步得出提供商 1 的收益为 $0.9 \times 30 + 20 = 47$, 提供商 2 的收益为 $0.8 \times 40 + 20 = 52$, 提供商 3 的收益为 $0.5 \times 60 + 10 = 40$. 最大链中每个模糊双合作联盟的收益分配结果如表 2 所示, 可验证结果满足 Aubin 核心的定义. 同时可验证, 当 s_1 和 s_2 分别增加 ε_1 和 ε_2 时, 满足定理 1($\varepsilon_1 = \varepsilon_2$) 和定理 2.

表 **2**　实际服务质量不同时的收益分配表

联 盟	联盟收益	z_1	s_1y_1	z_2	s_2y_2	z_3	s_3y_3
(ϕ, N)	0	0	0	0	0	0	0
$(\phi, \{2,3\})$	20	20	0	0	0	0	0
$(\phi, \{3\})$	40	20	0	20	0	0	0
(ϕ, ϕ)	50	20	0	20	0	10	0
$(\{s_1\}, \phi)$	72	20	27	20	0	10	0
$(\{s_1, s_2\}, \phi)$	104	20	27	20	32	10	0
$(\{s_1, s_2, s_3\}, \phi)$	134	20	27	20	32	10	30

5 结　论

在双合作博弈的基础上, 建立了基于模糊双合作博弈的收益分配模型, 定义了 Aubin 核心和 crisp 核心, 提出了凸模糊双合作博弈满足的两个性质, 证明了凸模糊双合作博弈中的 crisp 核心与韦伯集相等, 韦伯集是 Aubin 核心的子集, 说明了核心的存在性. 并证明了凸模糊双合作博弈的收益递增定理. 最后给出了产品服务化供应链中提供商收益分配的一个应用算例, 求出了一种最优的分配方案, 保证了模糊双联盟的稳定性.

参考文献(References)

[1] Owen G. Game theory[M]. New York: Academic Press, 1995.

[2] 占家权, 张强. 一类模糊合作博弈资源与收益分配研究[J]. 运筹与管理, 2010, 19(2): 7-11.
(Zhan J Q, Zhang Q. Investigation on resource and payoff allocation on a class of fuzzy cooperative games[J]. Operations Research and Management, 2010, 19(2): 7-11.)

[3] 孙红霞, 张强. 基于联盟结构的模糊合作博弈的收益分配方案[J]. 运筹与管理, 2011, 19(5): 84-89.
(Sun H X, Zhang Q. Scheme of profit allocation based on fuzzy cooperative game in coalition structure[J]. Operations Research and Management, 2011, 19(5): 84-89.)

[4] Gillies D B. Some theorems on n-person games[M]. Princeton: Princeton University Press, 1953.

[5] Weber R J. Probabilistic values for games[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.

[6] Shapley L S. Cores of convex games[J]. Int J of Game Theory, 1971, 1(1): 11-26.

[7] Ichiishi T. Supermodularity: Application to convex games and greedy algorithm for LP[J]. J of Economy Theory, 1981, 25(2): 283-286.

[8] Rodica Branzei, Dinko Dimitrov, Stef Tijs. Models in cooperative game theory[M]. Berlin: Springer, 2008.

[9] Bilbao J M. Cooperative games on combinatorial structures[M]. Bosten: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[10] Bilbao J M, Fernandez J R, Jimenez N, et al. The core and the Weber set for bicooperative games[J]. Int J of Game Theory, 2007, 36(2): 209-222.

[11] Mont O K. Clarifying the concept of product-service system[J]. J of Cleaner Production, 2002, 10(3): 237-245.

[12] Grabisch M, Labreuche Ch. Bi-capacitities-I: Definition. Möbius transform and interaction[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 151(2): 211-223.

[13] Derkes J J M. A short proof of the inclusion of the core in the weber set[J]. Int J of Game Theory, 1992, 21(2): 149-150.

[14] Choquet G. Theory of capacities[J]. Annals de I'institut Fourier, 1953, 87(5): 131-295.