

# 基于混合 EI 成型器的多模态柔性结构振动控制<sup>1)</sup>

张 鹏 李元春<sup>2)</sup>

(吉林大学控制科学与工程系, 长春 130025)

**摘要** 提出了一种基于零点配置技术的 EI(extra-insensitive) 成型器设计方法. 通过偏值点, 将基于零点配置的传统 ZV 成型器转换为 EI 成型器或者 ZVD 成型器, 并且保持延迟时间与脉冲数量不变. 基于偏值点设计了二阶混合 EI 成型器和 Multi-EI 成型器, 该成型器在延迟时间不变的情况下鲁棒性得到很大提高. 利用成型器具有周期性的特点, 设计了一种多模态柔性结构振动控制方法, 在保证延迟时间差别不大情况下, 使成型器的脉冲数量有明显减少. 仿真结果验证了该方法的有效性.

**关键词** 偏值点, Mutli-EI, 前馈控制, 输入成型, 多模态, 振动

中图分类号: O328 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2010)04-0774-08

## 引 言

输入成型作为抑制柔性物体振动的一种前馈方法, 已经被证明具有很好的抑制残余振动的能力, 并且可以根据设计要求使成型器具有高阶鲁棒性<sup>[1]</sup>. 输入成型方法是利用物体自身的参数(振动频率与阻尼)设计成型器, 得到成型器的脉冲函数后用该函数与期望输入卷积得到成型输入来驱动系统运动, 因此获得精确的模态频率和阻尼是非常重要的. 模态试验是一项很复杂的工作, 通过试验测定某一物体的模态阻尼和频率存在很大困难, 即使能够测得, 也会由于各种因素影响而产生很大的误差, 因此设计带有鲁棒性的成型器是非常重要的.

自从 Singer 等<sup>[1]</sup>提出输入成型方法以来, 很多学者围绕着这种方法进行了研究. Singhose 等<sup>[2]</sup>提出用矢量图方法设计输入成型控制器, 为了增加鲁棒性, 放宽了对名义频率处振动为 0 的要求, 设计了 EI(extra-intensitive) 输入成型器. Tuttle 等<sup>[3]</sup>提出采用零点配置的方法设计成型器, 使计算时间大大减少. Pao<sup>[4]</sup>提出采用多输入成型方法设计输入成型控制器, 当系统存在多模态时, 这种方法与单输入相比延迟时间大大减小. 文献 [5-7] 针对柔性结构, 研究了时间最优输入成型器. 文献 [8-10] 采用自适应方法设计了输入成型器. 张瑞军等<sup>[11]</sup>研究了闭环控制与输入成型相结合的控制策略, 共同抑制

二阶振动系统的残留振动, 使闭环系统具有更强的抗外界干扰能力和对系统参数误差的鲁棒性. 董明晓等<sup>[12]</sup>应用优化理论和矢量图法设计了一种新型最优鲁棒 EI 输入成型器, 并将这一控制技术用于桥式起重机试验系统中, 有效抑制载荷的残留摆动.

本文针对传统 EI 成型器设计过程复杂、计算量大的问题, 提出一种新的混合 EI 成型器的设计方法, 并且利用这种方法对多模态柔性结构的振动进行抑制. 首先, 通过偏值点的引入, 将文献 [3] 中的 ZV 成型器在不改变脉冲数量和延迟时间的情况下转换为 ZV-EI 成型器, 以增加成型器的鲁棒性. 其次, 沿用偏值点的设计原理, 分别设计二阶 ZV-EI 成型器和 Multi-EI 成型器, 给出各个成型器脉冲序列的参数. 通过分析计算, 对以上成型器的延迟时间与鲁棒性进行综合比较. 最后, 利用 Multi-EI 成型器对多模态柔性结构的振动进行抑制, 以解决文献 [13] 中每一阶模态均设计成型器而造成的成型器脉冲数量庞大、延迟时间变长的问题. 随机选择一个具有四阶模态的振动系统来验证方法的有效性.

## 1 基于偏值点的混合 EI 输入成型器

根据文献 [3] 的零点配置输入成型的设计步骤, 在离散坐标系下, ZV 成型器的结构形式如下

$$H(z) = \frac{c}{z^2}(z-p)(z-p^*) \quad (1)$$

2009-03-11 收到第 1 稿, 2009-05-20 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (60375030, 60674091).

2) E-mail: liyc@email.jlu.edu.cn

其中  $p, p^*$  为离散坐标系下模态的极点, 表达式为

$$p, p^* = \exp(-\delta\omega T) \exp(\pm j\sqrt{1-\delta^2}\omega T) \quad (2)$$

其中,  $\delta$  为模态阻尼,  $\omega$  为模态频率,  $T$  为采样周期,  $c$  为归一化系数. 为了节省运算, 此处设  $\delta$  为 0. 从文献 [1] 可以看出, 按零点配置设计的 ZV 成型器如图 1 所示有 3 个脉冲, 与 EI 成型器脉冲数量相同.

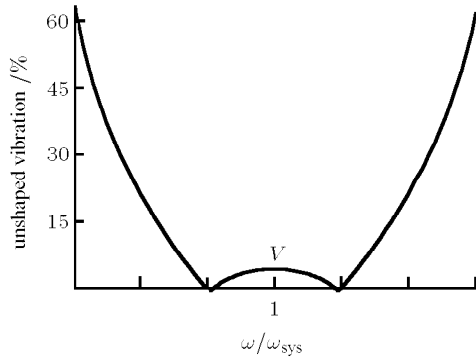


图 1 EI 成型器的幅频响应曲线

Fig.1 Amplitude-frequency curve of EI shaper

图中  $\omega$  为柔性结构实际频率,  $\omega_{sys}$  为柔性结构名义频率, 即用来设计成型器的频率,  $V$  为可以接受的残余振动. 根据零点配置输入成型技术, 当阻尼为零时成型器在频域内结构如下

$$H(s) = c[1 - 2\cos\theta e^{-sT} + e^{-2sT}] \quad (3)$$

其中,  $\theta = \omega_{sys}T$ ,  $c = 1/(2 - 2\cos\theta)$ . 幅频响应函数为

$$|H(j\omega)| = \frac{|\cos\theta - \cos\omega T|}{1 - \cos\theta} \quad (4)$$

从式 (4) 可以看出, 响应函数为周期函数, 响应曲线如图 2.

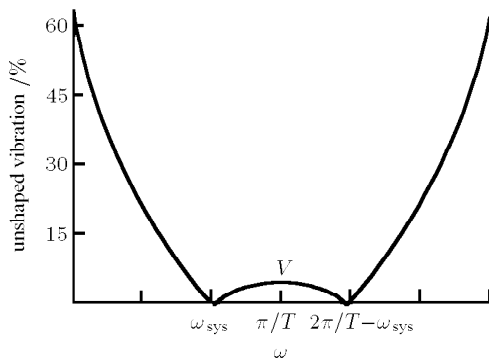


图 2 ZV 成型器的幅频响应曲线

Fig.2 Amplitude-frequency curve of ZV shaper

比较图 1 和图 2 可以看出, 它们具有相同的结构; 但是, 在图 1 中振动为零的点是关于  $\omega_{sys}$  对称的, 在图 2 中则是关于  $\pi/T$  对称的. 配置零点频率  $\omega^* = (1 - \alpha)\omega_{sys}$ , 采样周期

$$T = \frac{\pi}{\omega_{sys}} \quad (5)$$

其中,  $\alpha$  是关于  $\omega_{sys}$  的偏值频率, 其决定了零点位置. 此时成型器在  $\omega^*$  处为 ZV 成型器, 在  $\omega_{sys}$  处为 EI 成型器; 因此, 将这种成型器定义为 ZV-EI 成型器. 如果将零点配置于  $\alpha = 0$ , 采样周期  $T = \pi/\omega_{sys}$ , 式 (3) 的成型器结构变为 ZVD 成型器.

从式 (4) 和式 (5) 得出: 当残余振动达到极大值  $V$  时,  $\omega = \omega_{sys}$  或者  $\cos(\omega T) = -1$ . 因此, 有如下等式成立

$$\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta} = V \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{1 - V}{1 + V}\right) \quad (6)$$

ZV-EI 成型器的脉冲序列为

$$H(t) = \frac{1 + V}{4} \left[ 1 + 2\frac{1 - V}{1 + V} \delta(t - T) + \delta(t - 2T) \right] \quad (7)$$

振动保持在  $V$  以下的频率范围为

$$\omega \in \left[ \frac{\pi - \arccos\left(\frac{1 - 3V}{1 + V}\right)}{T}, \frac{\pi + \arccos\left(\frac{1 - 3V}{1 + V}\right)}{T} \right] \quad (8)$$

从式 (6) 中可以看出, 偏值点  $\alpha$  的大小与文献 [2] 相同; 并且只要知道残余振动允许值  $V$ , 就可以得到对应的成型器. 本节将文献 [3] 中的 ZV 成型器转化为 ZVD 和 EI 成型器, 同时脉冲数量与延迟时间保持不变.

## 2 基于偏值点的高阶混合 EI 成型器

### 2.1 基于偏值点的二阶 ZV-EI 成型器

本节将进一步扩展基于偏值点的混合 EI 成型器的设计. 由 EI 成型器的幅频响应曲线可以看出, 在名义频率两侧的某个频率处振动为零, 根据零点配置输入成型控制器原理可知, 输入成型器有零点位于此处. 不失一般性, 可以设在振动为零处的频率是关于  $\omega_{sys}$  对称的, 分别设

$$\omega_1 = (1 - \alpha)\omega_{sys}, \quad \omega_2 = (1 + \alpha)\omega_{sys} \quad (9)$$

将式 (2) 和式 (9) 代入式 (1) 得

$$\left. \begin{aligned} H_1(z) &= c_1 [1 - (e^{j\theta_1} + e^{-j\theta_1})z^{-1} + z^{-2}] \\ H_2(z) &= c_2 [1 - (e^{j\theta_2} + e^{-j\theta_2})z^{-1} + z^{-2}] \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

将式 (10) 转化为频率方程

$$\left. \begin{aligned} H_1(s) &= c_1 [1 - 2 \cos \theta_1 e^{-sT} + e^{-2sT}] \\ H_2(s) &= c_2 [1 - 2 \cos \theta_2 e^{-sT} + e^{-2sT}] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2 - 2 \cos \theta_1}, \quad c_2 = \frac{1}{2 - 2 \cos \theta_2} \\ \theta_1 &= (1 - \alpha) \omega_{\text{sys}} T, \quad \theta_2 = (1 + \alpha) \omega_{\text{sys}} T \end{aligned}$$

在设计时, 采样周期的选择必须使  $-\cos \theta_1$  和  $-\cos \theta_2$  均大于 0, 以使脉冲值都为正. 两个 ZV 成型器卷积后的成型器为

$$\begin{aligned} H(s) &= H_1(s) \cdot H_2(s) = \\ & c_1 c_2 [1 - 2 \cos \theta_1 e^{-sT} + e^{-2sT}] \cdot \\ & [1 - 2 \cos \theta_2 e^{-sT} + e^{-2sT}] \end{aligned} \quad (12)$$

将  $s = j\omega$  代入式 (11) 可得成型器幅频响应函数为

$$\left. \begin{aligned} |H_1(j\omega)| &= \frac{|\cos \theta_1 - \cos \omega T|}{1 - \cos \theta_1} \\ |H_2(j\omega)| &= \frac{|\cos \theta_2 - \cos \omega T|}{1 - \cos \theta_2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式 (13) 中的两式相乘, 即可得到成型器的响应函数

$$|H(j\omega)| = \frac{|\cos \theta_2 - \cos \omega T| |\cos \theta_1 - \cos \omega T|}{(1 - \cos \theta_2)(1 - \cos \theta_1)} \quad (14)$$

其对应的响应曲线如图 3 所示.

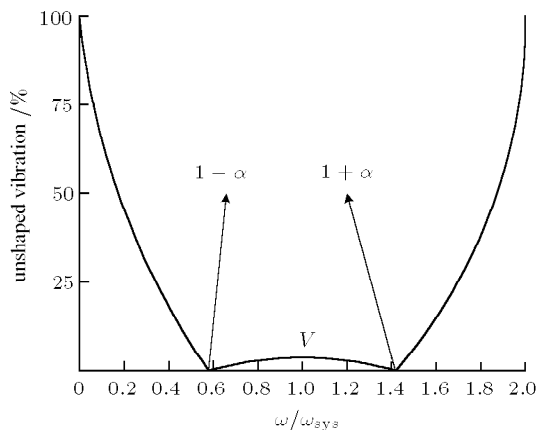


图 3 混合成型器的幅频响应曲线

Fig.3 Amplitude-frequency curve of hybrid shaper

由图 3 可见: EI 成型器有 2 个零点, 而式 (14) 有 4 个零点, 此处设

$$\cos \theta_1 = \cos \theta_2, \quad \theta_2 = 2\pi - \theta_1$$

基于以上假设, 式 (14) 变成只有 2 个零点 (有 4 个零点的情况将在下节讨论). 采样周期为

$$T = \frac{\pi}{\omega_{\text{sys}}} \quad (15)$$

当脉冲响应函数达到最大值时有以下关系

$$\left. \begin{aligned} \frac{d|H(j\omega)|}{d\omega} &= 0 \\ (1 - \alpha) \omega_{\text{sys}} < \omega < (1 + \alpha) \omega_{\text{sys}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将式 (14) 代入式 (16) 得到下列关系

$$\begin{aligned} \sin(\omega T)(\cos \theta_1 - \cos \omega T)(\cos \theta_2 - \cos \omega T) \cdot \\ (\cos \theta_1 + \cos \theta_2 - 2 \cos \omega T) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

从式 (15) 和式 (17) 得到, 当脉冲响应函数达到极大值时,  $\sin(\omega T) = 0$  或者  $\omega = \omega_{\text{sys}}$ , 此时

$$|H_1(j\omega)| = |H_2(j\omega)| \quad (18)$$

$$\left( \frac{1 - \cos \alpha\pi}{1 + \cos \alpha\pi} \right)^2 = V \quad (19)$$

为了保证  $-\cos \theta_1$  和  $-\cos \theta_2$  均大于 0,  $\alpha\pi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 解得

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1 - \sqrt{V}}{1 + \sqrt{V}}$$

符合要求的频率容许度范围为

$$\omega \in \left[ \frac{\pi - \arccos \frac{1 - 3\sqrt{V}}{1 + \sqrt{V}}}{T}, \frac{\pi + \arccos \frac{1 - 3\sqrt{V}}{1 + \sqrt{V}}}{T} \right]$$

混合 EI 成型器的脉冲函数为

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{(1 + \sqrt{V})^2}{16} \left\{ \delta(t) + 4 \frac{1 - \sqrt{V}}{1 + \sqrt{V}} \delta(t - T) + \right. \\ & \left[ 2 + 4 \left( \frac{1 - \sqrt{V}}{1 + \sqrt{V}} \right)^2 \right] \delta(t - 2T) + \\ & \left. 4 \frac{1 - \sqrt{V}}{1 + \sqrt{V}} \delta(t - 3T) + \delta(t - 4T) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

根据以上推导过程可以看出,  $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$ , 式 (12) 可以变成如下形式

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = c^2 [1 - 2 \cos \theta e^{-sT} + e^{-2sT}]^2 \quad (21)$$

其中  $\theta = (1 - \alpha)\pi$  或者  $\theta = (1 + \alpha)\pi$ . 式 (21) 就是在偏值点处配置的 ZVD 成型器, 即

$$H(z) = \frac{c}{z^4}(z - p)^2(z - p^*)^2$$

将这种成型器称为二阶 ZV-EI 成型器.

经过以上混合 ZV-EI 成型器的推导过程可以得出如下规律: 如果本身就在偏值点处配置两个零点, 此时设计的 ZVD-EI 结构形式应为

$$H(z) = \frac{c}{z^8}(z - p)^4(z - p^*)^4$$

类似前面的推导可以得出此时混合输入成型器时偏值

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1 - \sqrt[4]{V}}{1 + \sqrt[4]{V}}$$

符合要求的频率容许度范围为

$$\omega \in \left[ \frac{\arccos \frac{3\sqrt[4]{V} - 1}{1 + \sqrt[4]{V}}}{T}, \frac{2\pi - \arccos \frac{3\sqrt[4]{V} - 1}{1 + \sqrt[4]{V}}}{T} \right]$$

如果系统对时间要求不是很严格, 完全可以设计更高阶数的成型器, 以获得更好的鲁棒性, 此时只能使偏值点的频率无限接近名义频率  $1/2$  处. 本设计方法的优点是在保证延迟时间相同的情况下, 增加了成型器的鲁棒性.

## 2.2 基于偏值点的混合 Multi-EI 输入成型器

如果配置多个零点, 当  $\cos \theta_1 \neq \cos \theta_2$  时, 在 1 个周期频率范围内, 应该有多个振动为零的点. 通过设计  $\theta_1$  和  $\theta_2$  即偏值  $\alpha, \beta$  ( $\alpha \neq \beta$ )

$$\theta_1 = (1 - \alpha)\omega_{\text{sys}}T, \quad \theta_2 = (1 - \beta)\omega_{\text{sys}}T$$

可以使幅频响应在  $\theta_1$  和  $\theta_2$  之间有多个波峰形式.

通过式 (17) 可以看出, 脉冲响应函数取极大值时的频率

$$\omega T = \pi, \quad \omega = \omega_{\text{sys}}$$

$$2 \cos(\omega T) = \cos \theta_1 + \cos \theta_2$$

此时可得

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{1 - \cos \alpha\pi}{1 + \cos \alpha\pi} \right) \left( \frac{1 - \cos \beta\pi}{1 + \cos \beta\pi} \right) &= V \\ \frac{(\cos \alpha\pi - \cos \beta\pi)^2}{4(1 + \cos \alpha\pi)(1 + \cos \beta\pi)} &= V \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

同时  $\alpha, \beta$  必须满足以下条件

$$0 < \alpha < \beta < \frac{1}{2} \quad (23)$$

设计的任务就是在满足式 (23) 的条件下求式 (22), 解出  $\alpha, \beta$  并且使  $\beta$  在符合要求的情况下取最大值. 令  $x = \cos \alpha\pi, y = \cos \beta\pi$ . 由式 (22) 中的第 1 式得

$$x = \frac{1 - y - V(1 + y)}{1 - y + V(1 + y)} \quad (24)$$

将式 (24) 代入式 (22) 中的第 2 式得

$$\begin{aligned} (1 - V)^2 y^4 + (12V^2 - 8V - 4)y^3 + \\ (14V^2 + 12V + 6)y^2 - 4(V - 1)^2 y - \\ (7V^2 + 10V - 1) = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

要设计适当的  $\alpha, \beta$  满足振动条件  $V$ , 只要将  $V$  的值代入式 (25), 根据费拉里和塔塔利亚公式解一元四次方程, 并求满足约束条件式 (23) 及  $\beta$  最大化要求即可. 因此, 当  $V = 0.05$  时, 式 (25) 有 4 个解, 但是只有 1 组满足约束条件. 此时

$$x = \cos \alpha\pi \approx 0.8619, \quad y = \cos \beta\pi \approx 0.1948$$

$$\alpha = 0.1693, \quad \beta = 0.4376$$

$$\theta_1 = (1 - \alpha)\pi = 0.8307\pi$$

$$\theta_2 = (1 - \beta)\pi = 0.5624\pi$$

取极大值点处的频率分别为

$$\omega_{1,3} = \frac{\pi \mp \arccos \frac{\cos \alpha\pi + \cos \beta\pi}{2}}{T}$$

$$\omega_2 = \omega_{\text{sys}} = \frac{\pi}{T}$$

符合要求的频率容许度范围为

$$\omega \in \left[ \frac{\pi - \arccos 0.0567}{T}, \frac{\pi + \arccos 0.0567}{T} \right]$$

多 EI 成型器脉冲函数为

$$\begin{aligned} H(t) &= 0.1124 + 0.2375\delta(t - T) + \\ &0.3002\delta(t - 2T) + 0.2375\delta(t - 3T) + \\ &0.1124\delta(t - 4T) \end{aligned}$$

多 EI 混合成型器原理曲线及幅频响应曲线如图 4 所示.

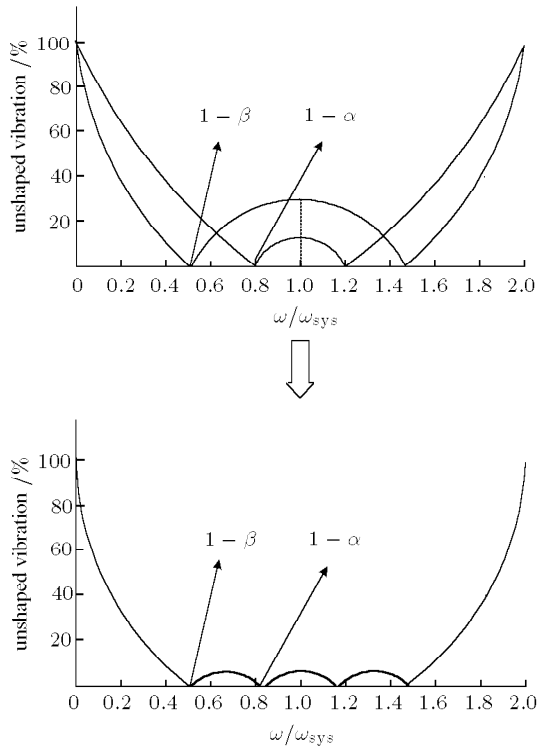


图 4 混合多 EI 成型器的幅频响应曲线

Fig.4 Amplitude-frequency curve of Hybrid Multi-EI

这种多波峰形式的混合 EI 成型器在对称位置可以配置多个零点, 并且每配置 1 个零点, 延长时间增加  $2\pi/\omega_{sys}$ , 波峰增加 2 个; 随着配置零点的增多, 处在  $V$  下的频率范围也变大, 直至最终接近覆盖所有频率.

从整个系统设计来看, 采样时间之所以不能像文献 [3] 选择, 是因为配置零点的 2 个偏值点模态相差不大, 因此很难选择合适的采样周期使脉冲幅值都大于 0.

$$\text{鲁棒性定义为 } \lambda = \frac{|\omega - \omega_{sys}|}{\omega_{sys}}$$

从表 1 数值可以比较各种 EI 成型器的鲁棒性, 可以看出, 相同的延迟时间多 EI 成型器的鲁棒性比二阶 ZV-EI 成型器好, 但是整体值即  $2\lambda$  都没超过 1, Multi-EI 成型器的鲁棒性达到 48.4%, 也就是说可以几乎将 50% 的自然频率的振动抑制在可以接受的范围内. 与传统多 EI 成型器相比, 这种方法计算更加简单, 设计过程更加直观.

表 1 鲁棒性比较 ( $V = 5\%$ )

Table 1 Comparison of robustness ( $V = 5\%$ )

	ZVD	EI	ZV-EI	Multi-EI	ZVD-EI
delay	$2T$	$2T$	$4T$	$4T$	$8T$
robustness	14.36	19.97	41.33	48.2	59.17

### 2.3 数据验证

为了验证成型器的有效性, 以简单的二阶振动方程为例, 通过计算比较成型后的残余振动情况.

$$G(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

因为成型器关于名义频率对称, 对称位置振动抑制效果相同, 本文只采用小于  $\omega_{sys}$  的频率. 设系统的名义频率为  $\omega_{sys} = 20$ , 通过计算可以得到残余振动如表 2 所示.

表 2 残余振动幅值 ( $\omega_{sys} = 20$ )

Table 2 Residual vibration ( $\omega_{sys} = 20$ )

Frequency	ZVD	EI	Multi-EI
10.36 or 29.64	47	42	5
11.248 or 28.752	40	37	0
16.624 or 23.386	6.4	2.3	0
17.2 or 20.28	3.8	0	1.2
20	0	5	5

从表 2 可以看出: 仿真结果与理论推导一致.

Multi-EI 能够使残余振动保持在 5%, 即  $|\omega - \omega_{sys}|/\omega_{sys} = 48.2\%$ , 也就是说, 因为周期性的影响, 这种成型器可以使自然界近乎 50% 的振动频率的残余振动保持在 5% 以下; 从 ZVD 成型器到 Multi-EI 成型器, 延迟时间变为原来的 2 倍, 而鲁棒性几乎变为原来的 3 倍.

## 3 多模态振动抑制

### 3.1 成型器设计

根据 EI 成型器特性及输入成型方法的周期性, 当柔性结构存在多模态时, 可以以某一频率设计成型器, 使系统模态都落在频率容许度范围内; 这样可以大大简化计算, 并且可以减小延迟时间和脉冲数量. 当然这种方法存在一个问题: 是否存在一个频率及以此频率设计的成型器, 能够使系统的所有模态落在成型器的频率容许度范围内? 从理论上讲, 频率允许度范围越小, 解存在的可能性越小.

柔性结构存在 4 个模态, 频率分别为  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ , 它们之间存在如下关系

$$\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4$$

针对 4 个模态, 系统的简化传递函数为

$$G(s) = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4^2}{(s^2 + 2\delta\omega_1 s + \omega_1^2) \cdots (s^2 + 2\delta\omega_4 s + \omega_4^2)} \quad (26)$$

根据设计要求，以频率  $\omega$  为系统名义频率设计成型器，各个模态频率必须落在成型器频率容许范围内，因此它们之间要满足以下不等式

$$\left. \begin{aligned} |\omega_1 - (2n_1 + 1)\omega| &\leq \lambda\omega \\ |\omega_2 - (2n_2 + 1)\omega| &\leq \lambda\omega \\ |\omega_3 - (2n_3 + 1)\omega| &\leq \lambda\omega \\ |\omega_4 - (2n_4 + 1)\omega| &\leq \lambda\omega \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

其中  $\lambda$  为成型器频率容许度。同时为了使延迟时间尽可能小，在满足式 (27) 的条件下， $\omega$  越大越好，解上述不等式得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega_1}{2n_1 + 1 + \lambda} &\leq \omega \leq \frac{\omega_1}{2n_1 + 1 - \lambda} \\ \frac{\omega_2}{2n_2 + 1 + \lambda} &\leq \omega \leq \frac{\omega_2}{2n_2 + 1 - \lambda} \\ \frac{\omega_3}{2n_3 + 1 + \lambda} &\leq \omega \leq \frac{\omega_3}{2n_3 + 1 - \lambda} \\ \frac{\omega_4}{2n_4 + 1 + \lambda} &\leq \omega \leq \frac{\omega_4}{2n_4 + 1 - \lambda} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

因此  $\omega$  的取值范围为式 (28) 中 4 个不等式的交集，即

$$\omega \in \left[ \max \left( \frac{\omega_1}{2n_1 + 1 + \lambda} \cdots \frac{\omega_4}{2n_4 + 1 + \lambda} \right), \min \left( \frac{\omega_1}{2n_1 + 1 - \lambda} \cdots \frac{\omega_4}{2n_4 + 1 - \lambda} \right) \right]$$

下一步根据实际频率值，选择满足条件的  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 为非负整数，以使延迟时间最短， $n_i$  越小越好。

### 3.2 设计算例

设柔性结构的 4 个模态频率大小分别为 10, 35, 68, 124，此频率是随机选取的；在实际设计的时候可以根据系统要求选择自然频率或角频率。

当采用 EI 成型器  $V = 0.05$  时，频率容许度  $\lambda = 0.1997$ 。

在不等式方程组 (28) 中只有 4 个不等式，但是有 5 个未知数，因此只能通过试凑来取值。首先，为了使采样时间最小，此时  $n_1 = 0$ ，由式 (28) 中的第 1 式得

$$\frac{10}{1 + 0.1997} < \omega < \frac{10}{1 - 0.1997} \quad (29)$$

可以看出， $n_2 = 1$  时与式 (29) 有交集

$$\frac{35}{3 + 0.1997} < \omega < \frac{35}{3 - 0.1997} \quad (30)$$

但是此时  $n_3$  无论取何值，与不等式 (29),(30) 都没有交集，因此  $n_1 = 0$  不满足；增大  $n_1 = 1$ ，重复以上试凑步骤，但是此时空间范围比  $n_1 = 0$  小，通过计算可以看出，此时也没有交集，因此可以得出频率容许范围越小，解存在的可能性越小。

以 Multi-EI 成型器研究解的存在性， $\lambda = 0.4819$ ，重复以上步骤。

当  $n_1 = 0$  时，可以看出此时频率容许范围比 EI 成型器大很多

$$\frac{10}{1 + 0.4819} < \omega < \frac{10}{1 - 0.4819}$$

重复试凑过程可以得到：取  $n_2 = 1, n_3 = 2, n_4 = 4$  时，不等式方程组 (27) 有交集，交集为

$$\omega \in (13.0775, 13.8994)$$

或者  $n_2 = 3, n_3 = 4, n_4 = 8$  时，有交集为

$$\omega \in (7.1716, 7.5069)$$

可以看出，在  $\lambda = 0.4819$  条件下， $n_1 = 0$  时，不等式方程组 (27) 有解，当然解的空间已经很小；如果需要，可以继续以  $n_1 = 1$  开始试凑，不过由于频率变小，会使延迟时间大大增加。以交集内的频率设计 Multi-EI 成型器可以使各个模态的振动都在允许振动范围  $V$  内。根据以上计算，以  $\omega_{\text{sys}} = 13.5$  为名义频率设计的 Multi-EI 成型器，系统的各个频率均落在成型器及其周期的频率允许度范围内，此时采样周期  $T = \pi/13.5$ 。各个频率在成型器中的名义位置如图 5 所示。

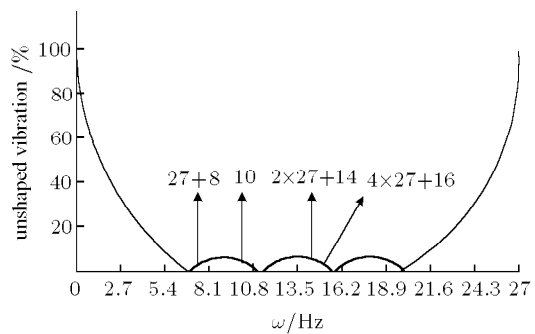


图 5 各频率在成型器中的名义位置

Fig.5 Nominal position of frequencies

图 5 为示意图，各个点并不在 1 个周期，它们分布在 4 个不同的周期，然而在 1 个图上画出 4 个周期的成型曲线空间有点紧凑，因此在 1 个周期内

标注出示意位置, 但是这些频率在各自对应的周期内所处的位置与图中描述是一致的.

从设计算例可以看出以频率  $\omega = 13.5 \text{ rad/s}$  设计的 Multi-EI 成型器延迟时间为  $t = 4\pi/13.5$ . 按每一个模态设计 EI 成型器的延迟时间  $t = \frac{2\pi}{10} + \frac{2\pi}{35} + \frac{2\pi}{68} + \frac{2\pi}{124} \approx \frac{4\pi}{13.22}$ , 可以看出前一个延迟时间较少, 但是 Multi-EI 成型器只有 5 个脉冲, EI 成型器有 81 个脉冲.

### 3.3 仿真结果

针对式 (26) 所示的多模态系统, 设计的成型器输入如图 6 所示. 通过给系统一个输入为 10 的无量纲阶跃, 观察成型器的振动抑制效果, 如图 7 所示, 其中, 图 7(a) 为阻尼  $\delta = 0$  的情况, 图 7(b) 为阻尼  $\delta = 0.01$  的情况.

从图 7 可以看出, 成型器的抑制效果基本满足了设计成型器的设计要求, 在输入结束后, 残余振动被控制在原幅值的 5% 内.

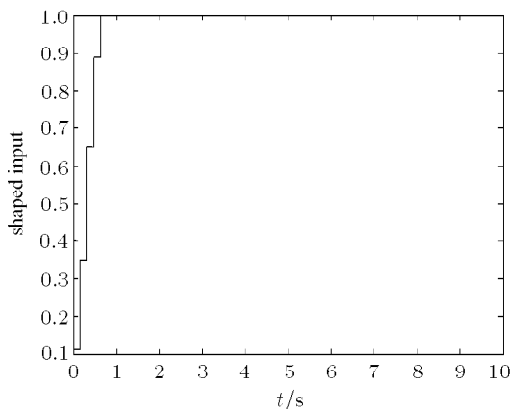
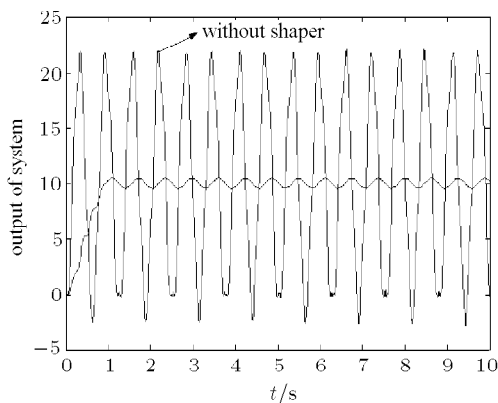
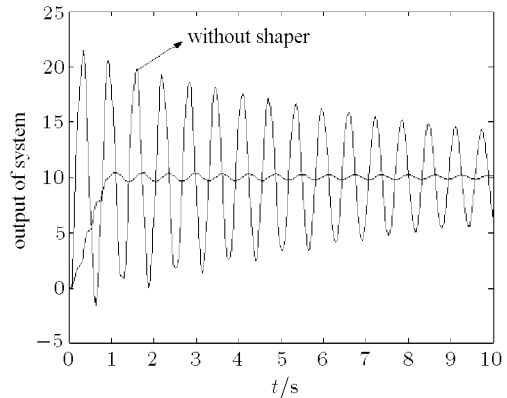


图 6 成型器的输入  
Fig.6 Input of shaper



(a)  $\delta = 0$



(b)  $\delta = 0.01$

图 7 系统的输出

Fig.7 Output of system

### 4 结 论

通过引入偏值点, 基于零点配置技术设计了混合 EI 成型器. 将基于零点配置的 ZV 转换为 EI 成型器. 设计了二阶 ZV-EI 和 Multi-EI 成型器, 这两种成型器可以用在系统参数变化大的场合. 利用成型器周期性这一特点, 抑制多模态柔性结构的振动, 能够在延迟时间相差不大的情况下, 使脉冲数量大大减小. 在实际设计过程中, 可以概括为以下几个步骤: 首先, 确定系统允许的残余振动  $V$ ; 其次, 确定系统的鲁棒性要求, 选择合适的成型器; 再次, 根据  $V$  与选择的成型器, 计算偏值零点; 最后计算出脉冲序列函数.

### 参 考 文 献

- 1 Singer NC, Seering WP. Preshaping command inputs to reduce system vibration. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1990, 112(1): 76-82
- 2 Singhose W, Seering WP, Singer NC. Residual vibration reduction using vector diagrams to generate shaped inputs. *Journal of Mechanical Design*, 1994, 116(2): 654-659
- 3 Tuttle TD, Seering WP. A zero-placement technique for designing shaped inputs to suppress multiple-mode vibration. *Proceeding of The American Control Conference*, 1994, (1-3): 2533-2537
- 4 Pao LY. Multi-input shaping design for vibration reduction. *Automatica*, 1999, 35(1): 81-89
- 5 Lau MA, Pao LY. Input shaping and time-optimal control of flexible structures. *Automatica*, 2003, 39(5): 893-900
- 6 Pao LY, La-orpararapan C. Shaped time-optimal feedback controllers for flexible structures. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2004, 126(1): 173-186

- 7 Baumgart MD, Pao LY. Discrete time-optimal command shaping. *Automatica*, 2007, 43(8): 1403–1409
- 8 Rhim S, Book WJ. Adaptive time-delay command shaping filter for flexible manipulator control. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2004, 9(4): 619–626
- 9 Cutforth CF, Pao LY. Adaptive input shaping for maneuvering flexible structures. *Automatica*, 2004, 40(4): 685–693
- 10 John S, Tzes A. Adaptive input shaping for nonlinear systems: a case study. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 2007, 129(2): 219–223
- 11 张瑞军, 张明勤, 秦英林. 闭环时滞滤波器消除二阶振荡系统残留振动的仿真研究. *振动与冲击*, 2007, 26(11): 163–165(Zhang Ruijun, Zhang Mingqin, Qin Yinglin. Simulation study on closed loop time-delayed filter for eliminating residual vibration of two order oscillation system. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(11): 163–165(in Chinese))
- 12 董明晓, 梅雪松, 郑康平等. 最优鲁棒极不灵敏时滞滤波器消除小阻尼柔性系统残留振动. *振动工程学报*, 2007, 20(2): 155–160 (Dong Mingxiao, Mei Xuesong, Zheng Kangping, et al. Optimal robust extra-insensitive time-delayed filter to eliminate residual vibrations of slight-damping flexible systems. *Journal of Vibration Engineering*, 2007, 20(2): 155–160(in Chinese))
- 13 Banerjee AK, Singhose W. Command shaping in tracking control of a two-link flexible robot. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1998, 21(6): 1012–1015

(责任编辑: 何漫丽)

## VIBRATION CONTROL OF MULTI-MODE FLEXIBLE STRUCTURE BASED ON HYBRID EXTRA-INSENSITIVE SHAPER<sup>1)</sup>

Zhang Peng Li Yuanchun<sup>2)</sup>

(Department of Control Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

**Abstract** The modal experiment of flexible structures is so complex that it is difficult and unrealistic to get the accurate frequency and damping of the structures in engineering. The parameters will change because of the variations of the external environment and disturbance even if the parameters can be measured. Therefore, it is necessary to design a shaper that is robust to system parameters. In this paper, a new hybrid Extra-Insensitive(EI) input shaping method based on zero-placement technique (ZPT) is presented. Based on the deviation value points, the ZV shaper based on ZPT is changed into EI or ZVD shaper easily, but the quantity of impulses and delay time do not increase. From the principle of deviation value points, the higher hybrid EI shaper and Multi-EI shaper are designed and the increasing amplitude of the robustness is much larger than the increasing amplitude of delay time. At last, the vibration of multi-mode flexible structure is suppressed using the EI shaper through the periodicity of shaper. This method make the quantity of impulse reduce largely, while make the delay time change little. The simulations validate the present shaper.

**Key words** deviation value, mutli-EI, feedforward control, input shaping, multi-mode, vibration

---

Received 11 March 2009, revised 20 May 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (60375030, 60674091).

2) E-mail: liyc@email.jlu.edu.cn