

考虑尺寸效应的双材料轴对称界面端应力奇异性¹⁾

王效贵²⁾ 王 美

(浙江工业大学机械制造及自动化省部共建教育部重点实验室, 杭州 310032)

摘要 提出了一种分析双材料轴对称界面端的应力奇异行为的特征值法. 基于弹性力学空间轴对称问题的基本方程和一阶近似假设, 利用分离变量形式的位移函数和无网格算法, 导出了关于应力奇异性指数的离散形式的奇异性特征方程. 由奇异性特征方程的特征值和特征向量, 即可确定应力奇异性指数、位移角函数和应力角函数. 数值求解了纤维/基体轴对称界面端模型的奇异性特征方程, 结果表明: 尺寸效应参数 δ (奇异点与轴对称轴的距离和应力奇异性支配区域大小的比值) 影响着应力奇异性强弱与阶次, 准一阶近似解析解只是 $\delta \gg 1$ 时的一个特例.

关键词 轴对称界面端, 应力奇异性, 特征值法, 一阶近似, 无网格法

中图分类号: O343.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2010)03-0448-08

引 言

纤维增强复合材料具有重量轻、比强度高、比模量大等诸多优点, 被广泛应用于国民经济的各个支柱产业. 对于长纤维增强复合材料, 由于制造原因, 可能会在纤维与基体之间的结合面上产生圆柱形界面裂纹, 而载荷作用下导致的纤维在基体内的断裂则会形成轴对称界面端; 短纤维增强复合材料中, 被基体环绕包围的纤维端部形成轴对称界面角点, 并且界面角点附近的奇异应力还可能引起纤维与基体的剥离, 进而在纤维端部形成轴对称币形或圆柱形界面裂纹. 此外, 在测定纤维增强复合材料界面强度的纤维拔出、纤维压入、纤维压出和微粘结等实验中, 被测试材料中可能产生轴对称界面端、轴对称界面角点和轴对称币形或圆柱形界面裂纹^[1]. 纤维与基体的材料性能差异, 使得在上述轴对称奇异点附近产生应力奇异性, 这些部位通常是破坏的起点. 研究表明, 奇异点附近的实际应力场可能以多重奇异性叠加的形式出现, 在某些方向 (如与最强的奇异性指数对应的应力角函数为零的方向) 上, 甚至是较弱的应力奇异性占支配地位^[2]. 因此, 确定应力场的奇异性阶数、各阶应力奇异性指数及其相应的应力角函数和应力强度系数, 对于完整地描述奇异点附近的应力场, 进而正确地建立纤维增强复合

材料的强度和可靠性的评价方法, 具有重要的理论及工程意义.

研究纤维增强复合材料界面端的应力奇异行为, 通常采用由单根纤维及其周围基体构成的空间轴对称模型. 刘一华等基于弹性力学空间轴对称问题的通解, 研究了轴对称界面端^[3]和轴对称界面裂纹尖端^[4]的应力奇异性. 戴瑛等^[5]采用逐步渐近法, 对轴对称圆柱形界面裂纹的应力奇异性做了近似分析. Li 等^[6-7]利用特征函数展开法, 分析了各向同性结合材料界面端的平面应变和轴对称变形问题, 导出了奇异应力场和奇异性特征方程. Kadioglu^[8]采用 Fourier 变换、Hankel 变换与渐近分析相结合的方法, 导出了与界面相交的轴对称币形裂纹端部的奇异积分方程, 并给出了奇异性指数和应力强度系数的数值解. Pochiraju 等^[9]采用轴对称单纤维微观力学模型, 利用局部渐近分析法和全场数值计算结果, 准确提取了界面裂纹端部的奇异应力场. 为了克服纤维径向尺寸给奇异性理论分析带来的困难, 以上研究皆人为地消除了与纤维径向尺寸有关的各项, 得到的基于准一阶近似的奇异性特征方程与平面应变状态时的相同^[10-11]. 准一阶近似处理, 假设纤维径向尺寸远大于应力奇异性支配区域的大小, 因而忽略了纤维的尺寸效应对界面端应力奇异行为的影响.

2008-10-08 收到第 1 稿, 2010-03-05 收到修改稿.

1) 钱江人才计划资助项目 (QJD0702010).

2) E-mail: hpcwxg@zjut.edu.cn

本文基于弹性力学空间轴对称问题的基本方程和一阶近似假设，利用分离变量形式的位移函数和无网格算法，提出了一种考虑尺寸效应的分析轴对称界面端的应力奇异行为的特征值法。

1 轴对称界面端模型的基本方程

圆柱坐标系 (ρ, ψ, z) 下的双材料轴对称界面端的一般模型如图 1 所示，其中 ρ, ψ 和 z 分别表示径向、环向和轴向坐标。为了研究奇异点 O' 附近的位移场和奇异应力场，特作如下坐标变换

$$\rho = d + r \sin \theta = r(\delta + \sin \theta), \quad z = r \cos \theta, \quad \psi = \psi \quad (1)$$

式中， d 表示奇异点到轴对称轴 z 的距离， $\delta = d/r$ 为一个无量纲的尺寸效应参数，表示奇异点与轴对称轴的距离和应力奇异性支配区域大小的相对比值。

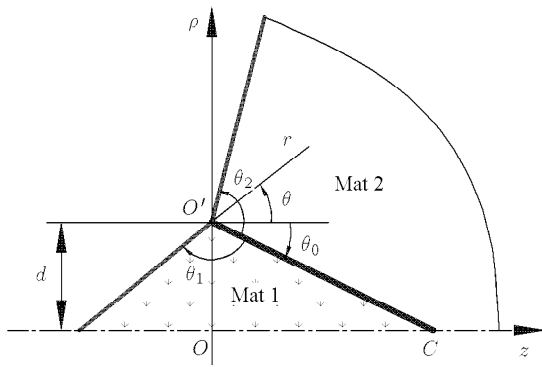


图 1 双材料轴对称界面端

Fig.1 Axisymmetric interface wedge of bonded dissimilar isotropic materials

在新坐标系 (r, ψ, θ) 下，材料 1(Mat1) 占据的区域可用环向坐标 θ 表示为 $(-\theta_1 - \theta_0) \leq \theta \leq -\theta_0$ ，材料 2(Mat2) 占据的区域为 $-\theta_0 \leq \theta \leq (\theta_2 - \theta_0)$ 。界面 $O'C$ 上的位移和表面力的连续条件为

$$\left. \begin{aligned} u_r^{(1)}(r, -\theta_0) &= u_r^{(2)}(r, -\theta_0) \\ u_\theta^{(1)}(r, -\theta_0) &= u_\theta^{(2)}(r, -\theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta^{(1)}(r, -\theta_0) &= \sigma_\theta^{(2)}(r, -\theta_0) \\ \sigma_{r\theta}^{(1)}(r, -\theta_0) &= \sigma_{r\theta}^{(2)}(r, -\theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

自由表面条件为

$$\sigma_\theta^{(k)}(r, \varphi_k) = \sigma_{r\theta}^{(k)}(r, \varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (4)$$

其中， $\varphi_1 = -\theta_1 - \theta_0, \varphi_2 = \theta_2 - \theta_0$ ，上标 (k) 对应于编号为 k 的材料区域。

新坐标系 (r, ψ, θ) 下的应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda e + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_\theta &= \lambda e + \frac{2\mu}{r} \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_\psi &= \lambda e + \frac{2\mu}{r} \frac{u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta}{\delta + \sin \theta} \\ \sigma_{r\theta} &= \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中， λ 和 μ 表示 Lamé 材料常数，体积应变 e 可表示为

$$e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{u_r \sin \theta + u_\theta \cos \theta}{\delta + \sin \theta} \quad (6)$$

径向 ρ 和轴向 z 方向的平衡方程为

$$a_{k1} + a_{k2} + b_{k1} + b_{k2} + c_{k1} + c_{k2} = 0 \quad (k = \rho, z) \quad (7)$$

式中

$$a_{\rho 1} = \frac{2(1-\nu) \sin \theta}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)$$

$$a_{\rho 2} = \cos \theta \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)$$

$$a_{z 1} = \frac{2(1-\nu) \cos \theta}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)$$

$$a_{z 2} = -\sin \theta \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)$$

$$b_{\rho 1} = \frac{1}{r} \frac{1}{1-2\nu} \left[\frac{2(1-\nu) \sin^2 \theta}{\delta + \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right]$$

$$b_{\rho 2} = \frac{1}{r} \frac{\sin \theta}{1-2\nu} \left[\frac{2(1-\nu) \cos \theta}{\delta + \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta} \right]$$

$$b_{z 1} = \frac{1}{r} \frac{1}{1-2\nu} \left[\frac{(1-\nu) \sin 2\theta}{\delta + \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \sin \theta \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial \theta} \right]$$

$$b_{z 2} = \frac{1}{r} \frac{1}{\delta + \sin \theta} \left(\frac{\cos^2 \theta}{1-2\nu} - \sin^2 \theta \right) \frac{\partial u_\theta}{\partial r} +$$

$$\frac{1}{r} \frac{\cos \theta}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r \partial \theta}$$

$$c_{\rho 1} = \frac{1}{r^2} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left[\frac{\cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{(\delta + \sin \theta)^2} - \right.$$

$$\left. \sin \theta \right] u_r + \frac{1}{r^2} \frac{1}{1-2\nu} \left[(3-4\nu) \cos \theta + \right.$$

$$\left. \frac{\sin 2\theta}{\delta + \sin \theta} \right] \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \sin \theta \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}$$

$$c_{\rho 2} = -\frac{1}{r^2} \cos \theta \left[1 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left(\frac{\sin \theta}{\delta + \sin \theta} + \right. \right.$$

$$\left. \frac{1}{(\delta + \sin \theta)^2} \right) \right] u_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{1}{1-2\nu} \cdot$$

$$\left[\frac{2(1-\nu) \cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} - (3-4\nu) \sin \theta \right] \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} +$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \cos \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}$$

$$c_{z1} = \frac{1}{r^2} \cos \theta \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(2 \cos \theta + \frac{\sin 2\theta}{\delta + \sin \theta} \right) u_r + \frac{1}{r^2} \left[\frac{\cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} - \frac{(3-4\nu) \sin \theta}{1-2\nu} - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\sin^2 \theta}{\delta + \sin \theta} \right] \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$c_{z2} = \frac{1}{r^2} \left(\sin \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\sin^2 \theta}{\delta + \sin \theta} \right) u_\theta - \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{1-2\nu} \left[3 - 4\nu + \frac{2(1-\nu) \sin \theta}{\delta + \sin \theta} \right] \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \sin \theta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}$$

基于一阶近似假设，奇异点附近的位移场可表示成如下变量分离的级数形式

$$u_r(r, \theta) = r^s A_r(\theta), \quad u_\theta(r, \theta) = r^s A_\theta(\theta) \quad (8)$$

式中， s 为奇异特征值， $A_r(\theta)$ 和 $A_\theta(\theta)$ 分别表示 r 向和 θ 向的位移角函数。将式 (8) 代入式 (5)，可得各应力分量的角函数

$$[\Sigma_r(\theta) \quad \Sigma_\theta(\theta) \quad \Sigma_\psi(\theta) \quad \Sigma_{r\theta}(\theta)]^T = (s\mathbf{P} + \mathbf{Q}\partial/\partial\theta + \mathbf{R})[A_r(\theta) \quad A_\theta(\theta)]^T \quad (9)$$

其中

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mu \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda[1 + \zeta_1(\theta)] & \lambda\zeta_2(\theta) \\ \lambda[1 + \zeta_1(\theta)] + 2\mu & \lambda\zeta_2(\theta) \\ \lambda + (\lambda + 2\mu)\zeta_1(\theta) & (\lambda + 2\mu)\zeta_2(\theta) \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

$$\zeta_1(\theta) = \frac{\sin \theta}{\delta + \sin \theta}, \quad \zeta_2(\theta) = \frac{\cos \theta}{\delta + \sin \theta}$$

联立式 (2)~(4) 和式 (8)，可得仅用角函数表示的界面连续条件

$$\left. \begin{aligned} A_r^{(1)}(-\theta_0) &= A_r^{(2)}(-\theta_0) \\ A_\theta^{(1)}(-\theta_0) &= A_\theta^{(2)}(-\theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_\theta^{(1)}(-\theta_0) &= \Sigma_\theta^{(2)}(-\theta_0) \\ \Sigma_{r\theta}^{(1)}(-\theta_0) &= \Sigma_{r\theta}^{(2)}(-\theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

和自由表面边界条件

$$\Sigma_\theta^{(k)}(\varphi_k) = \Sigma_{r\theta}^{(k)}(\varphi_k) = 0 \quad (k = 1, 2) \quad (12)$$

将式 (8) 代入平衡方程 (7)，可得其简化形式

$$(\tilde{a}_{k1} + \tilde{a}_{k2})s^2 + (\tilde{b}_{k1} + \tilde{b}_{k2})s + \tilde{c}_{k1} + \tilde{c}_{k2} = 0 \quad (13)$$

其中

$$\tilde{a}_{\rho 1} = \frac{2(1-\nu) \sin \theta}{1-2\nu} A_r(\theta)$$

$$\tilde{a}_{\rho 2} = \cos \theta A_\theta(\theta)$$

$$\tilde{a}_{z1} = \frac{2(1-\nu) \cos \theta}{1-2\nu} A_r(\theta)$$

$$\tilde{a}_{z2} = -\sin \theta A_\theta(\theta)$$

$$\tilde{b}_{\rho 1} = \frac{1}{1-2\nu} \left[\frac{2(1-\nu) \sin^2 \theta}{\delta + \sin \theta} A_r(\theta) + \cos \theta \frac{\partial A_r(\theta)}{\partial \theta} \right]$$

$$\tilde{b}_{\rho 2} = \frac{\sin \theta}{1-2\nu} \left[\frac{2(1-\nu) \cos \theta}{\delta + \sin \theta} A_\theta(\theta) + \frac{\partial A_\theta(\theta)}{\partial \theta} \right]$$

$$\tilde{b}_{z1} = \frac{\sin \theta}{1-2\nu} \left[\frac{2(1-\nu) \cos \theta}{\delta + \sin \theta} A_r(\theta) - \frac{\partial A_r(\theta)}{\partial \theta} \right]$$

$$\tilde{b}_{z2} = \frac{1}{\delta + \sin \theta} \left(\frac{\cos^2 \theta}{1-2\nu} - \sin^2 \theta \right) A_\theta(\theta) + \frac{\cos \theta}{1-2\nu} \frac{\partial^2 A_\theta(\theta)}{\partial \theta^2}$$

$$\tilde{c}_{\rho 1} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left[\frac{\cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{(\delta + \sin \theta)^2} - \sin \theta \right] \cdot A_r(\theta) + \frac{1}{1-2\nu} \left[(3-4\nu) \cos \theta + \frac{\sin 2\theta}{\delta + \sin \theta} \right] \cdot \frac{\partial A_r(\theta)}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 A_r(\theta)}{\partial \theta^2}$$

$$\tilde{c}_{\rho 2} = \frac{1}{1-2\nu} \left[\frac{2(1-\nu) \cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} - (3-4\nu) \sin \theta \right] \cdot \frac{\partial A_\theta(\theta)}{\partial \theta} - \cos \theta \left\{ 1 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left[\frac{\sin \theta}{\delta + \sin \theta} + \frac{1}{(\delta + \sin \theta)^2} \right] \right\} A_\theta(\theta) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \cos \theta \frac{\partial^2 A_\theta(\theta)}{\partial \theta^2}$$

$$\tilde{c}_{z1} = -\frac{1-\nu}{1-2\nu} \left(2 \cos \theta + \frac{\sin 2\theta}{\delta + \sin \theta} \right) A_r(\theta) + \frac{1}{\delta + \sin \theta} \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{1-2\nu} \right) \frac{\partial A_r(\theta)}{\partial \theta} - \frac{(3-4\nu) \sin \theta}{1-2\nu} \frac{\partial A_r(\theta)}{\partial \theta} + \cos \theta \frac{\partial^2 A_r(\theta)}{\partial \theta^2}$$

$$\tilde{c}_{z2} = \left(\sin \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\delta + \sin \theta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\sin^2 \theta}{\delta + \sin \theta} \right) A_\theta(\theta) - \frac{1}{1-2\nu} \left[(3-4\nu) \cos \theta + \frac{(1-\nu) \sin 2\theta}{\delta + \sin \theta} \right] \cdot \frac{\partial A_\theta(\theta)}{\partial \theta} - \frac{2(1-\nu) \sin \theta}{1-2\nu} \frac{\partial^2 A_\theta(\theta)}{\partial \theta^2}$$

2 奇异性特征方程

采用无网格法^[12], 求解由平衡方程 (13) 和边界条件 (10)~(12) 构成的一维边值问题. 无网格法离散双材料轴对称界面端模型时, 每种材料占据的领域具有各自独立的离散节点分布. 位于双材料界面上的坐标相同的节点对, 由于分属于不同的离散节点分布, 因而插值函数不同. 用 n_k 表示材料 k 所属区域内的离散节点个数, $N^{(k)}(\theta_j)$ 表示核函数的中心固定于 θ_j 的插值函数矢量. 位移角函数及其导数的无网格近似形式可表示为^[12-13]

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{\zeta}^{(k)}(\theta_j) &= N^{(k)}(\theta_j) \cdot [\mathbf{A}_{\zeta}^{(k)}]^T \\ \frac{\partial \Lambda_{\zeta}^{(k)}(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_j} &= \dot{N}^{(k)}(\theta_j) \cdot [\mathbf{A}_{\zeta}^{(k)}]^T \\ \frac{\partial^2 \Lambda_{\zeta}^{(k)}(\theta)}{\partial \theta^2} \Big|_{\theta=\theta_j} &= \ddot{N}^{(k)}(\theta_j) \cdot [\mathbf{A}_{\zeta}^{(k)}]^T \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中, $\mathbf{A}_{\zeta}^{(k)}$ ($\zeta = r, \theta$) 表示未知的节点位移角函数矢量, $\dot{N}^{(k)}(\theta_j)$ 和 $\ddot{N}^{(k)}(\theta_j)$ 分别表示插值函数矢量的一阶及二阶导数.

将无网格近似应用于式 (13), 可得

$$\begin{aligned} s^2 \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{(1)} & \mathbf{A}_2^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_3^{(1)} & \mathbf{A}_4^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^{(2)} & \mathbf{A}_2^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_3^{(2)} & \mathbf{A}_4^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \\ s \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1^{(1)} & \mathbf{B}_2^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_3^{(1)} & \mathbf{B}_4^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_1^{(2)} & \mathbf{B}_2^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_3^{(2)} & \mathbf{B}_4^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \\ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{(1)} & \mathbf{C}_2^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_3^{(1)} & \mathbf{C}_4^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1^{(2)} & \mathbf{C}_2^{(2)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_3^{(2)} & \mathbf{C}_4^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [\mathbf{A}_r^{(1)} \quad \mathbf{A}_{\theta}^{(1)} \quad \mathbf{A}_r^{(2)} \quad \mathbf{A}_{\theta}^{(2)}]^T \\ [A_1^{(k)}]_{ij} &= \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \sin \theta_i N_j^{(k)}(\theta_i) \\ [A_2^{(k)}]_{ij} &= \cos \theta_i N_j^{(k)}(\theta_i) \\ [A_3^{(k)}]_{ij} &= \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \cos \theta_i N_j^{(k)}(\theta_i) \\ [A_4^{(k)}]_{ij} &= -\sin \theta_i N_j^{(k)}(\theta_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [B_1^{(k)}]_{ij} &= \frac{1}{1-2\nu_k} \frac{2(1-\nu_k)}{\delta + \sin \theta_i} \sin^2 \theta_i N_j^{(k)}(\theta_i) + \\ &\quad \frac{1}{1-2\nu_k} \cos \theta_i \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) \\ [B_2^{(k)}]_{ij} &= \frac{1-\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} N_j^{(k)}(\theta_i) + \\ &\quad \frac{\sin \theta_i}{1-2\nu_k} \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) \\ [B_3^{(k)}]_{ij} &= \frac{1-\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} N_j^{(k)}(\theta_i) - \\ &\quad \frac{\sin \theta_i}{1-2\nu_k} \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) \\ [B_4^{(k)}]_{ij} &= \frac{1}{\delta + \sin \theta_i} \left(\frac{\cos^2 \theta_i}{1-2\nu_k} - \sin^2 \theta_i \right) N_j^{(k)}(\theta_i) + \\ &\quad \frac{\cos \theta_i}{1-2\nu_k} \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) \\ [C_1^{(k)}]_{ij} &= \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \left[\frac{\cos^2 \theta_i}{\delta + \sin \theta_i} - \frac{\sin \theta_i}{(\delta + \sin \theta_i)^2} \right] \cdot \\ &\quad N_j^{(k)}(\theta_i) + \frac{1}{1-2\nu_k} \cdot \\ &\quad \left[(3-4\nu_k) \cos \theta_i + \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} \right] \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) - \\ &\quad \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \sin \theta_i N_j^{(k)}(\theta_i) + \sin \theta_i \ddot{N}_j^{(k)}(\theta_i) \\ [C_2^{(k)}]_{ij} &= -\frac{1-\nu_k}{1-2\nu_k} \left[\frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} + \frac{2 \cos \theta_i}{(\delta + \sin \theta_i)^2} \right] \cdot \\ &\quad N_j^{(k)}(\theta_i) + \left[\frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \frac{\cos^2 \theta_i}{\delta + \sin \theta_i} - \right. \\ &\quad \left. \frac{3-4\nu_k}{1-2\nu_k} \sin \theta_i \right] \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) - \cos \theta_i N_j^{(k)}(\theta_i) + \\ &\quad \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \cos \theta_i \ddot{N}_j^{(k)}(\theta_i) \\ [C_3^{(k)}]_{ij} &= \frac{\nu_k-1}{1-2\nu_k} \left(2 \cos \theta_i + \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} \right) \cdot \\ &\quad N_j^{(k)}(\theta_i) - \frac{3-4\nu_k}{1-2\nu_k} \sin \theta_i \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) + \\ &\quad \cos \theta_i \ddot{N}_j^{(k)}(\theta_i) + \frac{\cos^2 \theta_i}{\delta + \sin \theta_i} \left(\cos^2 \theta_i - \frac{\sin^2 \theta_i}{1-2\nu_k} \right) \cdot \\ &\quad \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) \\ [C_4^{(k)}]_{ij} &= \frac{1}{\delta + \sin \theta_i} \left(\frac{\sin^2 \theta_i}{1-2\nu_k} - \cos^2 \theta_i \right) N_j^{(k)}(\theta_i) + \\ &\quad \sin \theta_i N_j^{(k)}(\theta_i) - \frac{3-4\nu_k}{1-2\nu_k} \cos \theta_i \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) - \\ &\quad \frac{1-\nu_k}{1-2\nu_k} \frac{\sin(2\theta_i)}{\delta + \sin \theta_i} \dot{N}_j^{(k)}(\theta_i) - \\ &\quad \frac{2(1-\nu_k)}{1-2\nu_k} \sin \theta_i \ddot{N}_j^{(k)}(\theta_i) \end{aligned}$$

以上各式中, 当 $k = 1$ 时, 下标 $i, j = 1, 2, \dots, n_1$, 当 $k = 2$ 时, 下标 $i, j = 1, 2, \dots, n_2$. 同样, 可得无网格近似的界面连续条件 ($\varphi_0 = -\theta_0$)

$$s \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_1^{(1)}(\varphi_0) & \mathbf{0} & -\mathbf{b}_1^{(2)}(\varphi_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^{(1)}(\varphi_0) & \mathbf{0} & -\mathbf{b}_2^{(2)}(\varphi_0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}^{(1)}(\varphi_0) & \mathbf{0} & -\mathbf{N}^{(2)}(\varphi_0) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^{(1)}(\varphi_0) & \mathbf{0} & -\mathbf{N}^{(2)}(\varphi_0) \\ \mathbf{c}_1^{(1)}(\varphi_0) & \mathbf{c}_2^{(1)}(\varphi_0) & -\mathbf{c}_1^{(2)}(\varphi_0) & -\mathbf{c}_2^{(2)}(\varphi_0) \\ \mathbf{c}_3^{(1)}(\varphi_0) & \mathbf{c}_4^{(1)}(\varphi_0) & -\mathbf{c}_3^{(2)}(\varphi_0) & -\mathbf{c}_4^{(2)}(\varphi_0) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (16)$$

和自由表面条件

$$s \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^{(1)}(\varphi_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^{(1)}(\varphi_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_1^{(2)}(\varphi_2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b}_2^{(2)}(\varphi_2) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^{(1)}(\varphi_1) & \mathbf{c}_2^{(1)}(\varphi_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_3^{(1)}(\varphi_1) & \mathbf{c}_4^{(1)}(\varphi_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_1^{(2)}(\varphi_2) & \mathbf{c}_2^{(2)}(\varphi_2) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c}_3^{(2)}(\varphi_2) & \mathbf{c}_4^{(2)}(\varphi_2) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (17)$$

式中 ($i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} [b_1^{(k)}(\varphi_i)]_j &= \mu_k N_j^{(k)}(\varphi_i) \\ [b_2^{(k)}(\varphi_i)]_j &= \lambda_k N_j^{(k)}(\varphi_i) \\ [c_1^{(k)}(\varphi_i)]_j &= \mu_k \dot{N}_j^{(k)}(\varphi_i) \\ [c_2^{(k)}(\varphi_i)]_j &= -\mu_k N_j^{(k)}(\varphi_i) \\ [c_3^{(k)}(\varphi_i)]_j &= [\lambda_k + 2\mu_k + \lambda_k \zeta_1(\varphi_i)] N_j^{(k)}(\varphi_i) \\ [c_4^{(k)}(\varphi_i)]_j &= \lambda_k \zeta_2(\varphi_i) N_j^{(k)}(\varphi_i) + (\lambda_k + 2\mu_k) \dot{N}_j^{(k)}(\varphi_i) \end{aligned}$$

位于双材料轴对称界面端模型的异材界面上的离散节点, 需要同时满足位移和表面力的连续条件 (16); 坐落于自由表面上的离散节点, 需满足自由边界条件 (17); 其余的所有离散节点, 则需满足平衡方程 (15). 用边界条件 (16) 和 (17) 替换式 (15) 中

的对应行, 可得关于奇异特征值 s 的非线性特征方程

$$(\hat{A}s^2 + \hat{B}s + \hat{C}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (18)$$

由于系数矩阵 \hat{A} 是奇异的, 上式仅能转化为如下关于 $\omega = s^{-1}$ 的标准特征方程

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\hat{C}^{-1}\hat{A} & -\hat{C}^{-1}\hat{B} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega \mathbf{x} \end{bmatrix} = \omega \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \omega \mathbf{x} \end{bmatrix} \quad (19)$$

数值求解奇异性特征方程 (19), 可以得到应力奇异性指数 $(1 - s)$ 以及相应的位移角函数, 进而可得到应力角函数.

3 计算结果与讨论

采用图 2 所示的纤维 / 基体轴对称界面端模型 ($\theta_0 = 0, \theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi/2$), 验证文中提出的基于一阶近似的特征值法的有效性, 并分析尺寸效应参数 δ (纤维半径与应力奇异性支配区域大小的比值) 对界面端应力奇异行为的影响. 玻璃纤维的泊松比 $\nu_1 = 0.208$, 弹性模量 $E_1 = 81.5 \text{ GPa}$; 环氧树脂基体的泊松比 $\nu_2 = 0.33$, 弹性模量 $E_2 = 4.93 \text{ GPa}$. 准一阶近似的理论分析表明: 轴对称界面端 O 附近的奇异应力场只有单个实数应力奇异性指数, 其大小为 $0.336^{[3]}$.

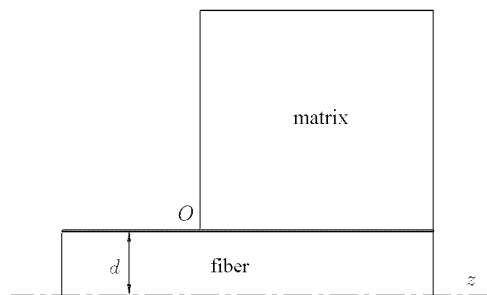


图 2 纤维 / 基体轴对称界面端

Fig.2 Fiber/matrix axisymmetric interface wedge

双材料轴对称界面端模型的无网格节点分布, 由两个隶属于不同材料区域的各自独立的节点分布组成: 实点表示基体内的节点分布, 空心圆表示纤维内的节点分布, 如图 3 所示. 两个节点分布内的插值函数是相互独立的. 位于界面上的两个节点, 尽管有相同的角坐标, 但是由于分属于不同的节点分布, 故而插值函数不同.

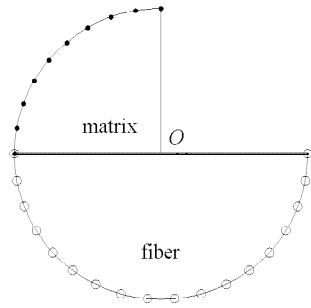


图 3 无网格节点分布

Fig.3 Distribution of the meshless scattered points

应力奇异性指数对于离散节点数的收敛曲线如图 4 所示，计算时所取的 δ 值远大于 1. 随着离散节点数的增加，应力奇异性指数快速趋近于点划线表示的理论解. 当总的离散节点个数为 92 时，数值结果与理论解的相对误差小于 0.3%. 由特征分析得到的位移和应力角函数分布如图 5 和图 6 所示，以符号表示的数值分析结果与用实线表示的理论解非常吻合. 可见：只需很少的离散节点，就可达到很高的计算精度.

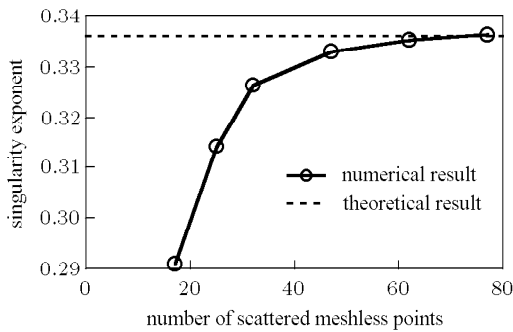


图 4 应力奇异性指数的收敛性

Fig.4 Convergence of the order of stress singularity

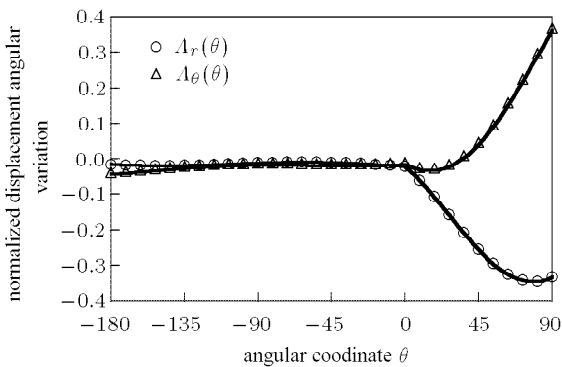


图 5 归一化的位移角函数分布

Fig.5 Normalized angular variations of displacements

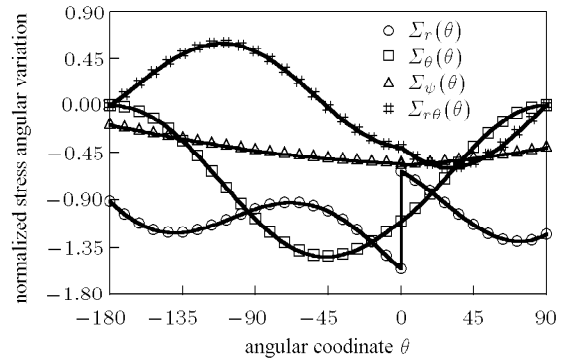


图 6 归一化的应力角函数分布

Fig.6 Normalized angular variations of stresses

纤维径向尺寸与奇异性支配区域大小的比值 δ 变化时，轴对称界面端的奇异应力场的应力奇异性强弱和阶次也随之变化. 对于图 2 所示的纤维 / 基体轴对称界面端模型，尺寸效应参数 δ 与奇异性指数 $(1-s)$ 的关系曲线如图 7 所示. 当 $1 < \delta \leq 4.76$ 时，奇异应力场有两重实数奇异性，较强的一个在 $\delta = 4.76$ 时有最大值 0.5. 当 $\delta > 4.76$ 时，只有一个实数应力奇异性，且随着 δ 的增大 $(1-s)$ 逐渐减小并最终趋近于常数. 当纤维半径比奇异性支配区域大小高两个以上数量级时，特征值法得到的一阶近似数值结果与准一阶近似解析解一致. 可见：准一阶近似的解析解无法准确描述轴对称界面端的应力奇异行为，仅在 $\delta \gg 1$ 时才能适用.

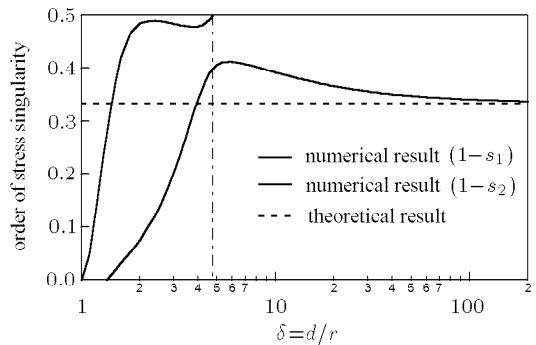


图 7 尺寸效应参数 δ 对应力奇异行为的影响

Fig.7 Influence of the dimension effect parameter δ to the stress singular behavior

4 结论

本文提出了一个考虑尺寸效应的分析双材料轴对称界面端应力奇异性特征值法，得出以下主要结论：

(1) 基于一阶近似的特征值法, 可以准确地给出轴对称界面端的全部应力奇异性指数以及相应的位移和应力角函数. 数值求解表明该方法具有很高的计算精度和计算效率.

(2) 当奇异点与轴对称轴的距离 d 比应力奇异性支配区域大小 r 高两个以上数量级时, 即尺寸效应参数 $\delta = d/r \gg 1$, 由特征值法得到的数值结果与准一阶近似情况下的理论解一致; 否则, 尺寸效应参数 δ 与界面端应力奇异性的强弱和阶数密切相关.

(3) 由准一阶近似得到的理论解, 只有在 $\delta \gg 1$ 时才能准确地描述轴对称界面端的应力奇异行为.

参 考 文 献

- 1 王清, 嵇醒, 李维学等. 纤维增强复合材料界面强度的细观测试方法. 实验力学, 1997, 12(4): 599-605 (Wang Qing, Ji Xing, Li Weixue, et al. Micro-test method for interface strength of fiber reinforced composites. *Journal of Experimental Mechanics*, 1997, 12(4): 599-605 (in Chinese))
- 2 Xu JQ, Liu YH, Wang XG. Numerical methods for the determination of multiple stress singularities and related stress intensity coefficients. *Engineering Fracture Mechanics*, 1999, 63: 755-790
- 3 刘一华, 许金泉, 丁皓江. 轴对称圆柱界面端的应力奇异性. 浙江大学学报(自然科学版), 1998, 32(3): 307-314 (Liu Yihua, Xu Jinquan, Ding Haojiang. Stress singularity in axisymmetric cylindrical interface wedge. *Journal of Zhejiang University (Natural Science)*, 1998, 32(3): 307-314 (in Chinese))
- 4 刘一华, 许金泉, 丁皓江. 纤维端部的界面裂纹分析. 力学学报, 1999, 31(3): 285-291 (Liu Yihua, Xu Jinquan, Ding Haojiang. Analysis of interface cracks at a fiber end. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 31(3): 285-291 (in Chinese))
- 5 戴瑛, 嵇醒, 石川晴雄. 轴对称圆柱界面裂纹的应力奇异性. 上海力学, 1994, 15(3): 29-39 (Dai Ying, Ji Xing, Haruo Isikawa. The stress singularity of axisymmetric cylindrical interface crack. *Shanghai Journal of Mechanics*, 1994, 15(3): 29-39 (in Chinese))
- 6 Li YL, Hu SY, Munz D, et al. Asymptotic description of the stress field around the bonded edge of cylindrical joint. *Archive of Applied Mechanics*, 1998, 68: 552-565
- 7 Li YL, Hu SY, Yang YY. Stresses around the bond edge of axisymmetric deformation joints. *Engineering Fracture Mechanics*, 2000, 66: 153-170
- 8 Kadioglu S. Axisymmetric crack terminating at the interface of transversely isotropic dissimilar media. *International Journal of Fracture*, 2002, 116: 51-79
- 9 Pochiraju KV, Tandon GP. Extraction of singular stress fields using the axisymmetric single-fiber micromechanics model. *International Journal of Fracture*, 2005, 132: 329-348
- 10 Williams ML. The stress around a fault or crack in dissimilar media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1959, 49(2): 199-204
- 11 Bogy DB. Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions. *Journal of Applied Mechanics*, 1971, 38(2): 377-386
- 12 Aluru NR, Li G. Finite cloud method: a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50: 2373-2410
- 13 Wang XG. A boundary value method for the singular behavior of bimaterial systems under inplane loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(20): 5513-5535

(责任编辑: 陶彩军)

STRESS SINGULARITY AT AXISYMMETRIC INTERFACE WEDGE OF BONDED DISSIMILAR MATERIALS CONSIDERING DIMENSION EFFECTS¹⁾

Wang Xiaogui²⁾ Wang Mei

(Key Laboratory of Mechanical Manufacture and Automation, Ministry of Education, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

Abstract An eigenvalue method was proposed to study the stress singularity behavior at the axisymmetric interface wedge of the bonded dissimilar isotropic materials. Based on the fundamental equations of the spacial axisymmetric problem and the assumption of first-order approximation, the discrete characteristic equation on the stress singularity was derived by making use of the displacement functions in the form of separated variables and the technique of meshless method. The physical eigenvalue is associated with the order of the stress singularity, and the corresponding eigenvector is related to the displacement and stress angular variations. A dimensionless parameter δ , which was defined as the ratio between the distance from the singular point to the axisymmetric axis and the dimension of the singularity-dominated region, was used to characterize the dimension effects on the stress singularity behavior. The characteristic equation of the fiber/matrix axisymmetric interface wedge model was solved numerically, and the order of stress singularity, the associated displacement and stress angular variations were obtained. It was found that the parameter δ influenced both the strength and the order of the stress singularity, and the analytical solutions derived by the quasi first-order approximation was just a special case while $\delta \gg 1$.

Key words axisymmetric interface wedge, stress singularity, eigenvalue method, first-order approximation, meshless method

Received 8 October 2008, revised 5 March 2010.

1) The project supported by the Program for Qianjiang Talents (QJD0702010).

2) E-mail: hpcwxg@zjut.edu.cn