

# 土剪胀性的应力路径相关规律及其模拟<sup>1)</sup>

罗 汀<sup>2)</sup> 高智伟 万 征 姚仰平

(北京航空航天大学土木工程系, 北京 100191)

**摘要** 建立能够反映土的变形和强度特性应力路径依存性的本构模型, 首先需要解决土剪胀规律的应力路径依存性问题. 对黏土和砂土剪胀性的应力路径依存性做了系统的分析和比较, 模型预测与试验结果的比较表明: 剑桥模型和统一硬化模型在描述土的这一特性方面都有一定缺陷; 采用部分塑性体应变与塑性剪应变耦合的思路建立的渐近状态模型能够较好地反映土剪胀性的应力路径依存性.

**关键词** 渐近状态, 应力路径, 砂土, 黏土, 剪胀性

**中图分类号:** TU431 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2010)01-0093-09

## 引 言

对于非摩擦性材料的应力应变关系来说, 不存在平均应力与剪应力对塑性应变的交叉影响, 即在应力引起的塑性应变中, 平均应力的变化只引起塑性体积应变增量, 剪应力的变化只引起塑性剪切应变增量. 然而, 对于具有摩擦特性的岩土材料, 平均应力的变化不仅引起塑性体积应变增量, 还会产生塑性剪切应变增量; 剪应力的变化也不仅引起塑性剪切应变增量, 还会产生塑性体积应变增量, 存在着平均应力与剪应力对塑性应变的交叉影响. 这种交叉特性, 也就是土的剪胀特性, 在岩土弹塑性本构理论研究中通常是通过剪胀方程来反应.

应力路径对土的剪胀性有不可忽视的影响, 这直接影响到土的应力应变特性; 因此, 建立能够反映土的变形和强度特性的应力路径依存性本构模型首先要考虑这一问题. 原始剑桥模型 (original Cam-Clay model)<sup>[1]</sup> 和修正剑桥模型 (modified Cam-Clay model)<sup>[2]</sup> 是两个简单实用的黏土本构模型, 但是由于它们均不能够合理描述黏土剪胀特性的应力路径依存性, 导致其不能够全面描述黏土在复杂应力路径下的变形和强度特性. 通过对应力路径进行分解, 文献 [3] 提出了土的应力路径本构模型, 但其仅适用于应力变化已知的路径. 在研究砂土在不同应力路径下剪胀规律的基础上, 采用部分塑性体应变与塑性剪应变耦合的思路, 文献 [4] 提出了考虑渐

近状态特性的本构模型, 简称为渐近状态模型 (AS model), 该模型形式简单, 参数与统一硬化模型 (UH model)<sup>[5,6]</sup> 相同, 能够合理描述砂土在各种复杂应力路径下的应力应变规律, 它同样适用于黏土.

应力路径是指土所受到的应力在主应力空间内的变化轨迹. 应力的作用在土体中会产生应变; 与之相对, 当土体受到变形约束时, 在土体内部也会产生相应的应力. 为便于对这两种状态进行描述, 可把在  $p$ - $q$  坐标系中的应力路径按应力增量比为常数的路径或应变增量比为常数的路径来描述

$$\frac{dq}{dp} = m \quad (1)$$

$$\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1} = n \quad (2)$$

其中,  $p$  为平均应力,  $q$  为广义剪应力,  $\varepsilon_v$  为体积应变,  $\varepsilon_1$  为大主应变,  $m$  和  $n$  为常数, 如  $m = 3$  对应常规三轴压缩试验,  $n = 1$  对应侧限压缩试验. 一个合理的土的本构模型应能描述各种复杂应力路径下土的应力应变规律.

## 1 剑桥模型的应力路径依存性

原始剑桥模型和修正剑桥模型是应用较广泛的适合于黏土的著名本构模型, 但它们不能很好地描述黏土在不同应力路径下的剪胀特性. 图 1 和图 2 分别为原始剑桥模型和修正剑桥模型对 Fujinomori

2008-08-07 收到第 1 稿, 2009-06-03 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10672010, 50879001, 10872016).

2) E-mail: tluo@buaa.edu.cn

黏土<sup>[7]</sup>剪胀性的预测结果与试验数据的比较. 图中给出了  $p = 196 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_3 = 196 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_1 = 196 \text{ kPa}$  和  $\sigma_1/\sigma_3 = 1, 2, 3$  四种应力路径的试验和预测结果. 土样参数为:  $\lambda/(1+e_0) = 0.0508$ ,  $\kappa/(1+e_0) = 0.0112$ ,  $M = 1.36$ ,  $\nu = 0.3$ . 可以看出这两个模型由于采用广义 Mises 强度准则, 对三轴伸长的试验结果预测均不理想. 由于对土的剪胀性描述不够合理, 导致了它们不能全面描述土在不同应力路径下的应力应变特性. 图 3 和图 4 为它们对 Fujinomori 黏土三轴不排水和等平均应力 ( $p = 196 \text{ kPa}$ ) 排水压缩试验结果<sup>[8]</sup>

预测的比较, 其中  $\varepsilon_d$  为剪应变. 从结果看出: 原始剑桥模型在描述黏土不排水特性方面较好, 而修正剑桥模型在描述土的排水特性方面较好, 图 3 和图 4 中  $p_0$  为初始固结压力  $196 \text{ kPa}$ . 其原因在于: 修正剑桥模型所采用的剪胀方程能较好地反映黏土在  $p =$  常数路径下的剪胀规律 (如图 2(a)); 而  $\sigma_1 = 196 \text{ kPa}$  路径接近于不排水试验有效应力路径, 原始剑桥模型所采用的剪胀方程能较好地反映该路径下的剪胀规律 (如图 1(a)). 因此建立一个合理的模型需要兼顾土在不同应力路径下的剪胀特性.

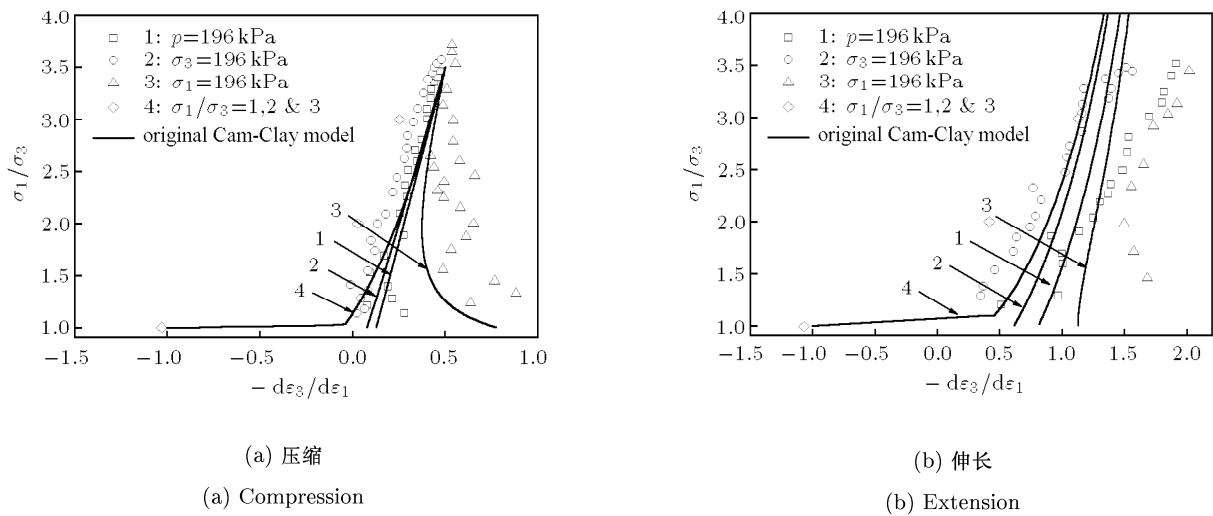


图 1 原始剑桥模型对黏土剪胀性的预测与试验结果的比较

Fig.1 Original Cam-Clay model predictions and tested dilatancy rule of clay

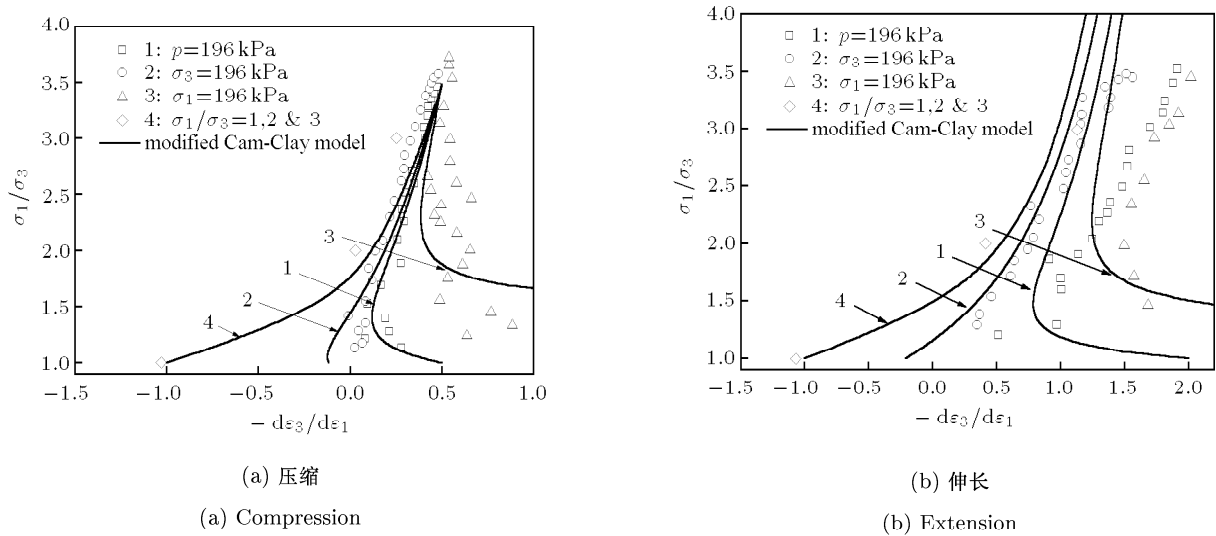


图 2 修正剑桥模型对黏土剪胀性的预测与试验结果的比较

Fig.2 Modified Cam-Clay model predictions and tested dilatancy rule of clay

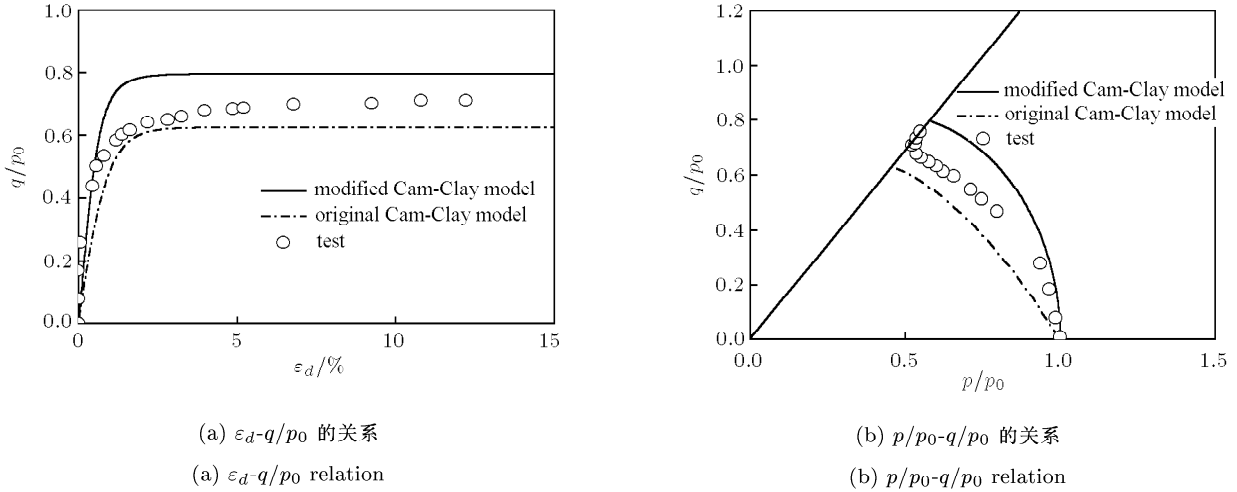


图 3 原始和修正剑桥模型预测黏土不排水试验结果的比较

Fig.3 Comparison between the original and modified Cam-Clay model predictions for clay under undrained stress path

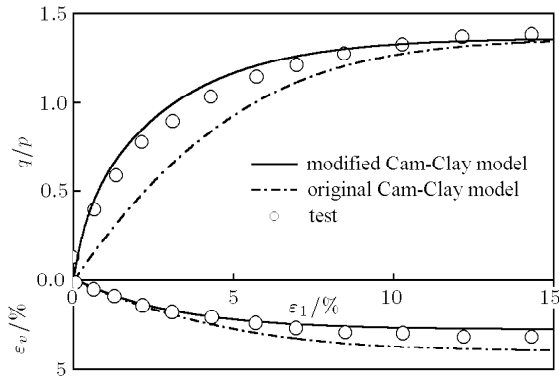


图 4 原始和修正剑桥模型预测黏土排水试验结果的比较

Fig.4 Comparison between the original and modified Cam-Clay model predictions for clay under drained stress path

## 2 渐近状态模型

同剑桥模型相似，由于采用了与应力路径无关的剪胀方程，统一硬化模型同样存在不能全面描述土在不同应力路径下的剪胀规律问题。

统一硬化模型的剪胀方程为 [5,6]

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (3)$$

其中  $d\varepsilon_v^p$  和  $d\varepsilon_d^p$  分别为塑性体积应变和塑性剪应变增量。图 5 为统一硬化模型对 Toyoura 砂 [9] 的剪胀规律的预测与试验结果的比较。图中给出了

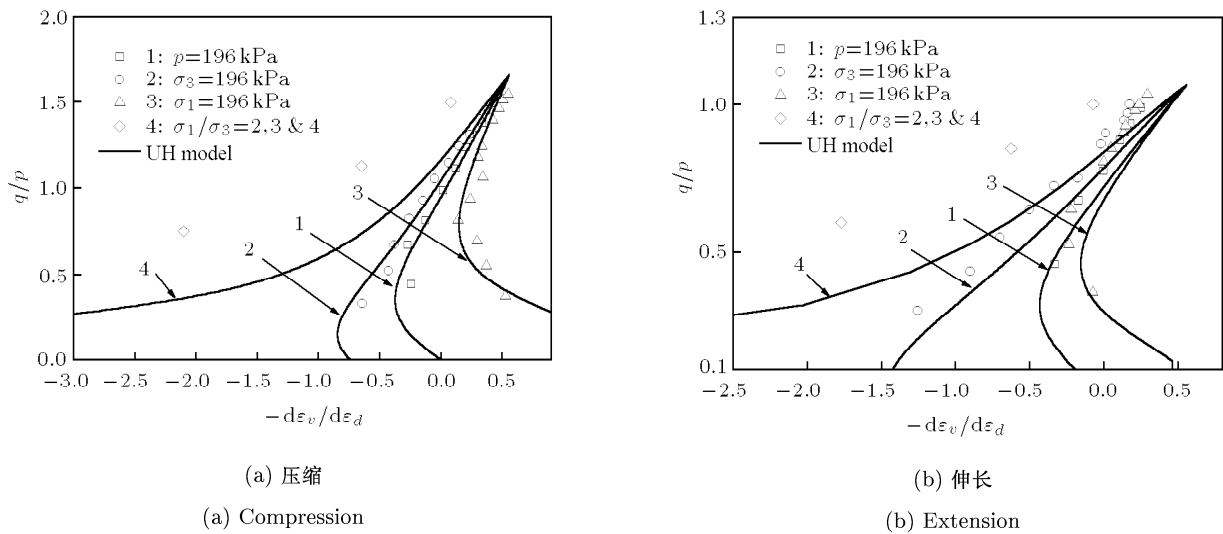


图 5 砂土剪胀规律的试验结果与 UH 模型预测的比较

Fig.5 Tested dilatancy rule of sand and the UH model predictions

$p = 196 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_3 = 196 \text{ kPa}$ ,  $\sigma_1 = 196 \text{ kPa}$  和  $\sigma_1/\sigma_3 = 2, 3, 4$  四种应力路径的试验和预测结果. 土样参数为  $^{[5,6]}\lambda/(1 + e_0) = 0.00403$ ,  $\kappa/(1 + e_0) = 0.00251$ ,  $M = 0.95$ ,  $M_f = 1.66$ ,  $\nu = 0.3$ . 分析比较结果可以看出, 统一硬化模型在描述砂土在等应力比加载路径下的剪胀规律方面有欠缺.

为了描述土剪胀性的应力路径依存性, 在研究砂土在复杂应力路径下剪胀规律的基础上, 文献 [4] 通过采用部分塑性体积应变与塑性剪应变耦合的思路, 提出了渐近状态模型.

渐近状态模型将影响塑性应变的硬化参量  $H$  分解为耦合硬化参量  $H^c$  和非耦合硬化参量  $H^{unc}$ <sup>[4]</sup>, 即

$$H = H^c + H^{unc} \quad (4)$$

耦合硬化参量  $H^c$  定义为

$$H^c = \int \frac{M^4}{M_f^4} \cdot \frac{M_f^4 - \eta^4}{M^4 - \eta^4} d\varepsilon_v^{pc} \quad (5)$$

非耦合硬化参量  $H^{unc}$  定义为

$$H^{unc} = \int d\varepsilon_v^{punc} = \varepsilon_v^{punc} = \mu c_p \ln \frac{p}{p_0} \quad (6)$$

$$c_p = (\lambda - \kappa)/(1 + e_0) \quad (7)$$

式中,  $e_0$  为与  $p_0$  相对应的初始孔隙比,  $\lambda$  和  $\kappa$  分别为土的等向压缩及回弹系数,  $M$  为特征状态应力比,  $M_f$  为峰值应力比,  $d\varepsilon_v^{pc}$  为耦合塑性体积应变增量.

渐近状态模型采用非相关联流动法则, 其塑性势函数为

$$g = \ln \frac{p}{p_x} + \ln \left( 1 + \frac{q^2}{M^2 p^2} \right) = 0 \quad (8)$$

式中  $p_x$  为塑性势面与  $p$  轴的交点.

屈服函数为

$$f = (1 - \mu)c_p \ln \frac{p}{p_0} + c_p \ln \left( 1 + \frac{\eta^2}{M^2} \right) - H^c = 0 \quad (9)$$

黏土和砂土的耦合参量  $\mu$  有不同的确定方法. 对于砂土

$$\mu = \frac{M_f^4(M_0^4 - M^4) + \kappa M^4(M_0^4 - M_f^4)/(\lambda - \kappa)}{M_0^4(M_f^4 - M^4)} \quad (10)$$

$$M_0 = (6M_f - M_f^2 + M^2)/6 \quad (11)$$

其中  $M_0$  为不排水应力路径的极限应力比. 对于黏土,  $M = M_0 = M_f$ , 对式 (10) 求极限可以得到

$$\mu = 1 - \frac{\lambda M}{3(\lambda - \kappa)} \quad (12)$$

这样总应变增量  $d\varepsilon_{ij}$  就可表示为弹性应变增量  $d\varepsilon_{ij}^e$ , 由耦合硬化引起的耦合塑性应变增量  $d\varepsilon_{ij}^{pc}$  和由非耦合硬化引起的非耦合塑性应变增量  $d\varepsilon_{ij}^{punc}$  3 部分之和, 即

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^{pc} + d\varepsilon_{ij}^{punc} \quad (13)$$

图 6 为渐近状态模型屈服面函数在取不同耦合参量时的形状示意图.

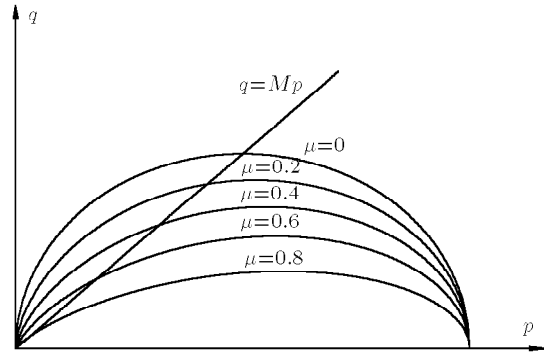


图 6 渐近状态模型的屈服面

Fig.6 Yield surface of the AS model

模型三维化时采用基于 SMP 准则的变换应力方法<sup>[8]</sup>.

三轴压缩条件下渐近状态模型耦合硬化的剪胀方程为<sup>[4]</sup>

$$\frac{d\varepsilon_v^{pc}}{d\varepsilon_d^{pc}} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} \quad (14)$$

其中,  $d\varepsilon_d^{pc}$  为耦合塑性剪应变增量,  $\eta = q/p$  为应力比. 考虑到塑性应变增量是耦合硬化和非耦合硬化引起的增量之和, 并且非耦合塑性剪应变增量为 0, 所以总剪胀方程为<sup>[4]</sup>

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p} = \frac{d\varepsilon_v^{pc} + d\varepsilon_v^{punc}}{d\varepsilon_d^{pc} + d\varepsilon_d^{punc}} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} + \frac{\mu c_p}{d\varepsilon_d^p} \frac{dp}{p} \quad (15)$$

其中,  $d\varepsilon_v^{punc}$  和  $d\varepsilon_d^{punc}$  分别为非耦合塑性体积应变增量和非耦合塑性剪应变增量,  $\mu$  为耦合参量. 尽管耦合硬化的剪胀方程与应力路径无关, 但根据式 (15) 可以看出, 塑性体积应变增量与塑性剪切应变增量之比与应力路径相关, 与应力路径的相关性主要表现在  $\frac{\mu c_p}{d\varepsilon_d^p} \frac{dp}{p}$  项的影响上.

图 7 为渐近状态模型对 Toyoura 砂的剪胀规律的预测与试验结果的比较, 耦合参量为  $\mu = 0.6$ . 与统一硬化模型相比, 渐近状态模型在描述砂土等应力比加载时的剪胀性方面有明显改善.

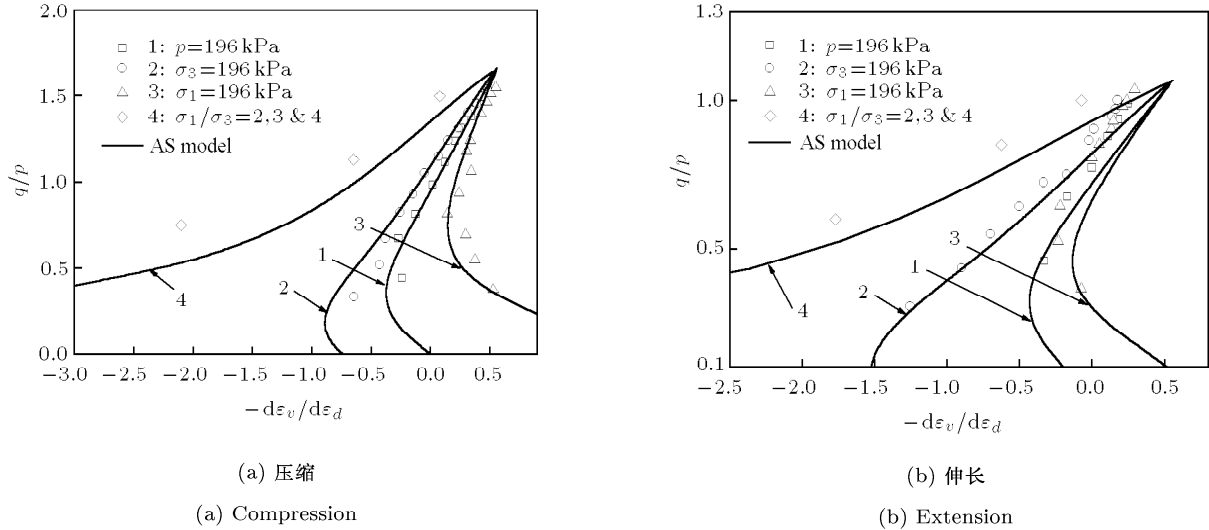


图 7 砂土剪胀规律的试验结果与 AS 模型预测的比较

Fig.7 Tested dilatancy rule for sand and the AS model predictions

图 8 为渐近状态模型对 Fujinomori 黏土剪胀性的预测与试验数据的比较，耦合参量  $\mu = 0.42$ 。与剑桥模型相比，由于采用了变换应力，渐近状态模型在预测黏土在三轴伸长路径下的强度和剪胀性方面

有较大改进；此外，在描述黏土在等应力比加载路径 ( $\sigma_1/\sigma_3 = 1, 2, 3$ ) 下的剪胀规律方面，渐近状态模型也明显好于剑桥模型。

由于渐近状态模型能更好地描述土在复杂应力

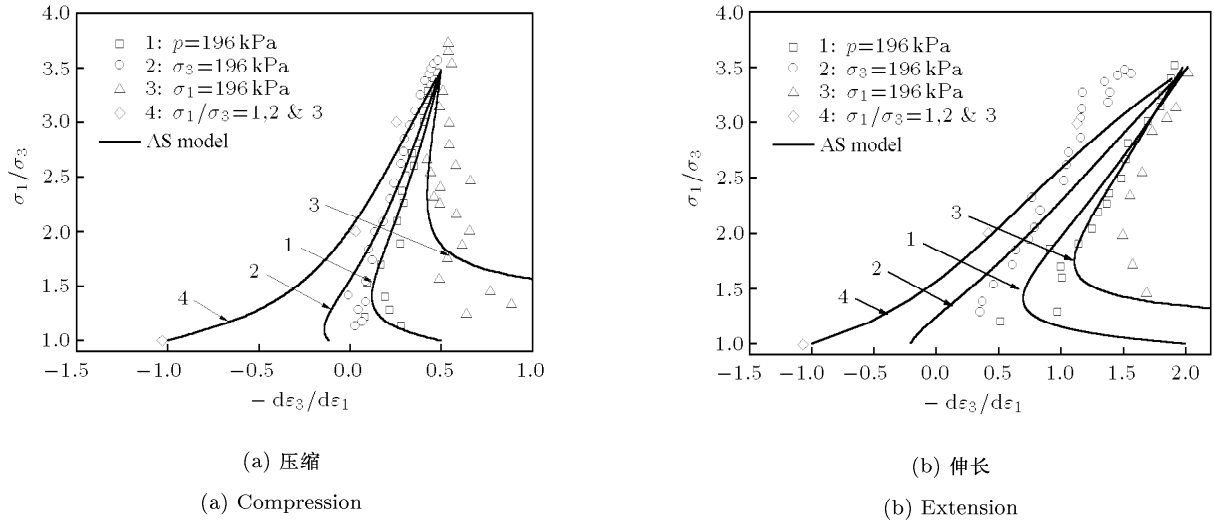


图 8 黏土剪胀规律的试验结果与 AS 模型预测的比较

Fig.8 Tested dilatancy rule of clay and the AS model predictions

路径下的剪胀规律，因此它也就能更好地描述土在复杂应力路径下的应力应变特性。图 9 为渐近状态模型和统一硬化模型预测 Sydney 砂土<sup>[10]</sup>在不同应力路径下应力应变关系的比较。土样模型参数为

$\lambda/(1+e_0) = 0.0029$ ,  $\kappa/(1+e_0) = 0.0017$ ,  $M = 1.00$ ,  $M_f = 1.57$ ,  $\nu = 0.3$ ; 耦合参量  $\mu = 0.54$ 。渐近状态模型的预测结果与试验结果的吻合程度明显好于统一硬化模型。

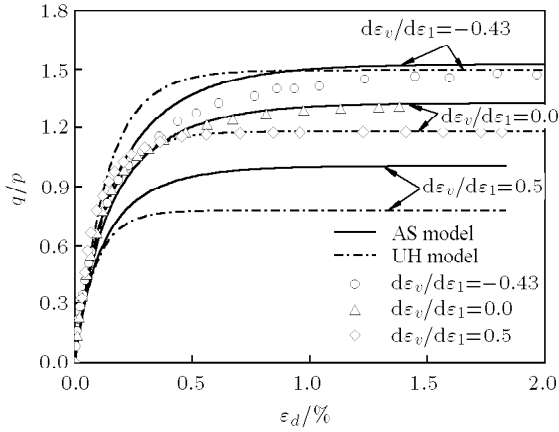
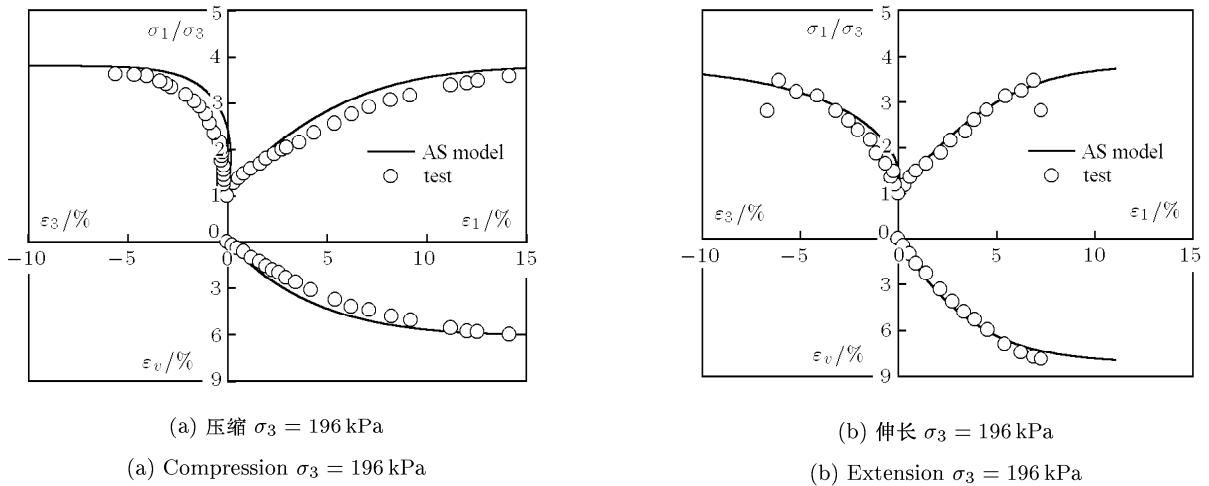


图 9 AS 模型与 UH 模型对砂土试验结果预测的比较  
Fig.9 Comparison between the AS model and UH model predictions for sand under different stress paths

### 3 渐近状态模型对土的变形特性应力路径依存性的描述

#### 3.1 黏土

渐近状态模型能较好地描述黏土和砂土在不同应力路径下的应力应变和强度特性. 图 10 为 Fujinomori 黏土在三轴试验条件下的试验结果<sup>[11]</sup>与渐近状态模型的预测比较. 图 11 为 Fujinomori 黏土在平面应变条件下的试验结果<sup>[12]</sup>与渐近状态模型预测的比较, 其中图 11(a)为试验路径. 试验结果与预测结果吻合很好, 表明渐近状态模型能较合理地描述黏土在三维应力条件下的强度和应力应变特性.

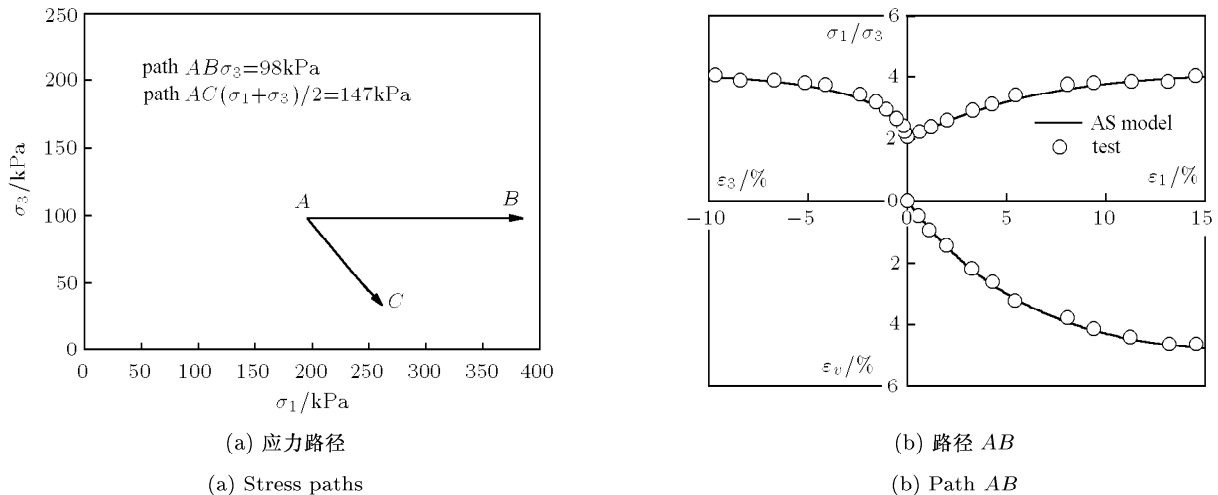


(a) 压缩  $\sigma_3 = 196 \text{ kPa}$   
(a) Compression  $\sigma_3 = 196 \text{ kPa}$

(b) 伸长  $\sigma_3 = 196 \text{ kPa}$   
(b) Extension  $\sigma_3 = 196 \text{ kPa}$

图 10 黏土不同应力路径下的试验结果与预测

Fig.10 Comparison between predicted stress-strain relations and test results under different stress paths



(a) 应力路径  
(a) Stress paths

(b) 路径 AB  
(b) Path AB

图 11 黏土在平面应变条件下的试验结果与预测比较

Fig.11 Comparison between predicted stress-strain relations and experimental results under plane strain condition

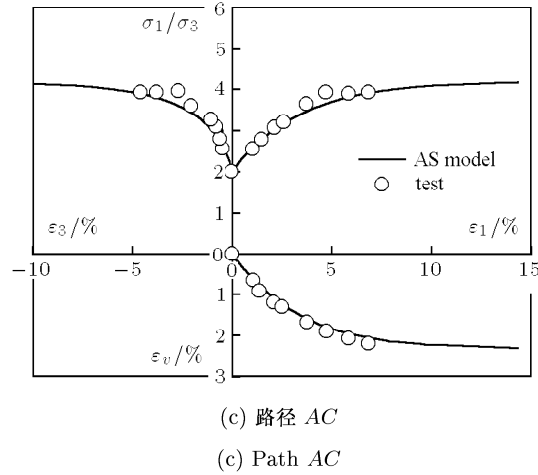


图 11 黏土在平面应变条件下的试验结果与预测比较 (续)

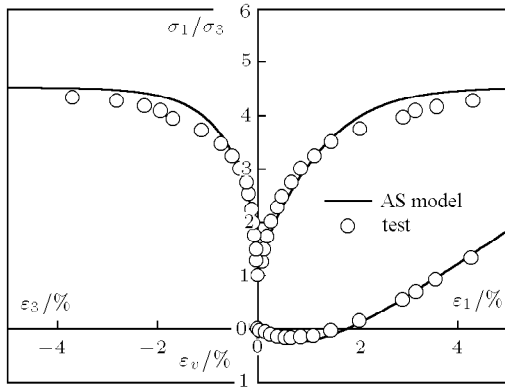
Fig.11 Comparison between predicted stress-strain relations and experimental results under plane strain condition (continued)

### 3.2 砂土

图 12 为 Toyoura 砂土在不同应力路径下的三轴排水试验结果与预测曲线的比较。比较结果可见，

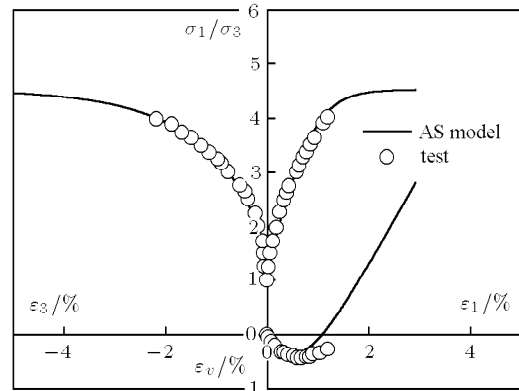
渐近状态模型能较合理地描述砂土不同应力路径下的变形和强度特性。

图 13 为 Fuji 河砂<sup>[13]</sup>在不排水三轴压缩和伸长



(a) 压缩  $\sigma_3 = 196$  kPa

(a) Compression  $\sigma_3 = 196$  kPa



(b) 伸长  $\sigma_3 = 196$  kPa

(b) Extension  $\sigma_3 = 196$  kPa

图 12 砂土三轴排水试验结果与预测

Fig.12 Comparison between drained triaxial test results and predicted stress-strain relation

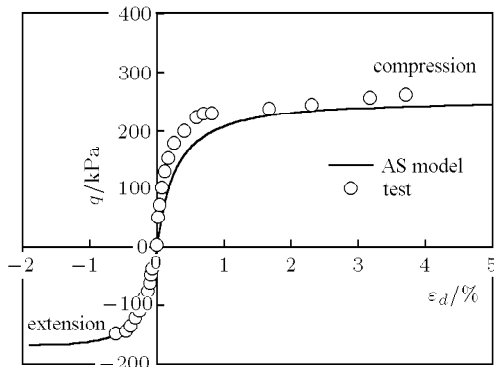


图 13 Fuji 河砂的不排水试验结果与预测

Fig.13 Comparison between the experimental results of Fuji river sand under undrained conditions and the predictions

试验条件下剪应变与广义剪应力关系的试验结果与预测，模型参数为： $\lambda/(1+e_0) = 0.0682$ ,  $\kappa/(1+e_0) = 0.00568$ ,  $M = 1.50$ ,  $M_f = 1.55$ ,  $\nu = 0.3$ ；耦合参量为  $\mu = 0.47$ 。试验结果与预测结果吻合得较好。

图 14 为 Sacramento 砂<sup>[13]</sup>不同围压下三轴不排水压缩试验的有效应力路径与预测，试验围压分别为 1265 kPa, 500 kPa, 300 kPa, 100 kPa。土样的模型参数为： $\lambda/(1+e_0) = 0.0406$ ,  $\kappa/(1+e_0) = 0.005348$ ,  $M = 1.40$ ,  $M_f = 1.45$ ,  $\nu = 0.2$ ；耦合参量  $\mu = 0.48$ 。除了围压 1265 kPa 条件下的试验与预测差别稍大之外，其他路径下的预测与试验路径吻合得较好。

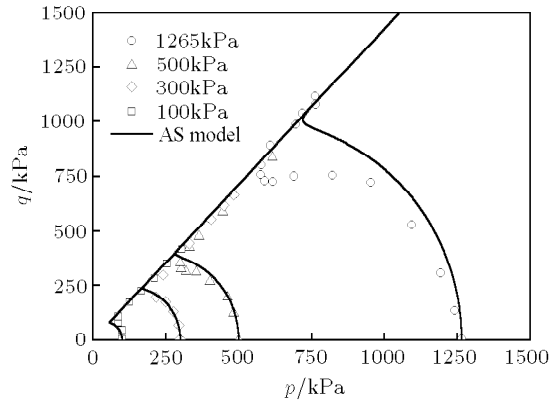


图 14 Sacramento 砂土不排水试验有效应力路径与预测

Fig.14 Comparison between the effective stress paths of Sacramento sand under undrained conditions and the predictions

## 4 结 论

应力路径对土的剪胀性有不可忽视的影响, 进而影响到土的应力应变和强度特性. 从试验结果和模型预测的比较看出, 剑桥模型和统一硬化模型的剪胀方程没有考虑应力路径的影响, 因此在描述土在不同应力路径下的剪胀规律时存在一定的欠缺. 作者等提出的渐近状态模型能较合理描述黏土和砂土在不同应力路径下的剪胀特性, 进而合理反映土在不同应力路径下的应力应变特性. 渐近状态模型参数与统一硬化模型完全相同, 在预测土在复杂应力路径条件下的应力应变关系方面较后者有较大改进.

## 参 考 文 献

- 1 Roscoe KH, Schofield AN, Thurairajah A. Yielding of clay in states wetter than critical. *Geotechnique*, 1963, 13(3): 211~240
- 2 Roscoe KII, Burland JB. On the generalized stress-strain behaviour of an ideal wet clay. In: Heyman J, Leckie FA,

- eds. *Engineering Plasticity*. Cambridge: Cambridge University Press, 1968. 535~609
- 3 罗汀, 路德春, 姚仰平. 考虑应力路径影响下砂土的三维本构模型. *岩土力学*, 2004, 25(5): 688~693 (Luo Ting, Lu Dechun, Yao Yangping. Three-dimensional constitutive model for sand considering stress path. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, 25(5): 688~693 (in Chinese))
- 4 罗汀, 姚仰平, 楚剑. 饱和砂土的渐近状态特性及其模拟. *中国科学 E 辑*, 2009, 39(1): 39~47 (Luo Ting, Yao Yangping, Chu Jian. The asymptote state characteristic of saturated sand and its modeling. *Science in China (Series E)*, 2009, 39(1): 39~47 (in Chinese))
- 5 Yao YP, Luo T, Sun DA, et al. A simple 3-D constitutive model for both clay and sand. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2002, 24(2): 240~246
- 6 Yao YP, Luo T, Sun DA, et al. A unified constitutive model for both clay and sand with hardening parameter independent on stress path. *Computers and Geotechnics*, 2008, 35(2): 210~222
- 7 Nakai T, Matsuoka H. A generalized elastoplastic constitutive model for clay in three-dimensional stresses. *Soils and Foundations*, 1986, 26(3): 81~98
- 8 Matsuoka H, Yao YP, Sun DA. The Cam-clay models revised by the SMP criterion. *Soils and Foundations*, 1999, 39(1): 79~99
- 9 Nakai T. An isotropic hardening elastoplastic model for sand considering the stress path dependency in three-dimensional stresses. *Soils and Foundations*, 1989, 29(1): 119~137
- 10 Chu J, Lo SCR. Asymptotic behaviour of a granular soil in strain path testing. *Geotechnique*, 1994 (44): 65~82
- 11 Nakai T, Matsuoka H, Okuno N, et al. True triaxial tests on normally consolidated clay and analyses of the observed shear behavior using elastoplastic models. *Soils and Foundations*, 1986, 26(4): 67~78
- 12 Nakai T, Tsuzuki K, Ishikawa K, et al. Analyses of plane strain tests on normally consolidated clay by an elastoplastic constitutive mode. In: *Proceedings of the 22nd Japan National Conference on SMFE*. 1987, 1. 419~420
- 13 Bardet JP. Bounding surface plasticity model for sands. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 112(11): 1198~1217

(责任编辑: 何漫丽)



## INFLUENCE OF THE STRESS PATH ON DILATANCY OF SOILS AND ITS MODELING<sup>1)</sup>

Luo Ting<sup>2)</sup> Gao Zhiwei Wan Zheng Yao Yangping

(*Department of Civil Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China*)

**Abstract** One of the most important characteristics of soil is its dilatancy in which plastic volumetric strain occurs during shearing. The influence of stress path on the dilatancy of soils is systematically analyzed in this paper with the asymptote state model proposed by authors et al (Luo et al, 2009), in which the part coupling effect between the plastic volumetric strain and plastic shear strain is assumed firstly. The comparisons are carried out between the test results of the dilatancy and the model predictions of the original Cam-Clay model, the modified Cam-Clay model, the unified hardening model (Yao et al, 2008) and our proposed model. The comparisons results demonstrate that the asymptote state model can describe the effect of the stress path on the dilatancy of soils in a better way in the stress-strain and strength behaviors of soils.

**Key words** asymptote state, stress path, sand, clay, dilatancy

---

Received 7 August 2008, revised 3 June 2009.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10672010, 50879001, 10872016).

2) E-mail: tluo@buaa.edu.cn