中国科学技术史

第三卷　数学

[英] 李约瑟 著

科学出版社

中国科学技术史

第三卷 数 学

〔英〕李 约 瑟 著
《中国科学技术史》翻译小组译

本书是供内部参考用的，写
文章引用时务请核对原文，
并在注明出处时用原著版本

科 学 出 版 社
1978

Joseph Needham

SCIENCE & CIVILISATION IN CHINA

Volume III, pp. 1—168, Mathematics

Cambridge University Press, 1959

中国科学技术史

第三卷 数 学

〔英〕李 约 瑟 著

《中国科学技术史》翻译小组译

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1978年7月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1978年7月第一次印刷 印张：15 5/8

字数：206,000

统一书号：13031·717

本社书号：1031·13—1

定价： 1.35 元

内 部 发 行

出 版 说 明

本书作者李约瑟（Joseph Needham）是英国皇家学会会员、剑桥大学冈维尔和凯厄斯学院院长、英中了解协会会长，三十多年来，对我国科学技术发展的历史进行了广泛的研究。《中国科学技术史》是他多年研究的一项重要成果。

《中国科学技术史》原书计划分七卷，已出版前四卷及第五卷部分分册。全书内容包括我国有史以来的地理和历史情况（第一卷）、科学思想的发生和发展（第二卷）、数学、天文学、地学（第三卷）、物理学、工程技术（第四卷）、化学、化工（第五卷）、生物学、农业、医药（第六卷）、以及这些学科得到发展的社会背景（第七卷）。作者对我国古代各门学科在各个历史时期的发展和成就，引证了大量的文献，进行了详细的叙述，肯定了我国古代科学技术的光辉成就，证明了中国人民对世界文明所作的较大贡献。但是，作者在有关我国历史

的分期，某些历史地理的说明，历史人物的评价，对待少数民族的态度等问题上，有些看法是值得商榷的，希望读者用马克思主义的观点进行分析与认识。

原书各卷篇幅都比较大，我们将按学科重新分卷出版。为了保持原著的面貌，供读者参考，我们除了对个别文句作必要的删节外，一律照译。中译本还另加一些必要的注释，并标明“译者”，以示区别。原书参考书目数量很大，仍照原文排印，未予译出。

许多欧洲人把中国人看作是野蛮人的另一个原因，大概是在于中国人竟敢把他们的天文学家——这在我们有高度教养的西方人眼中是种最没有用的小人——放在部长和国务卿一级的职位上。这该是多么可怕的野蛮人啊！

——弗兰茨·屈纳特

（维也纳，1888年）

作 者 的 话

到了这一卷，我们已经把所有巷道和井口、所有介绍性的说明和解释都抛在后面，深入到全书的矿床了。这一卷[1]的宗旨，在于阐明传统的中国文化对于数学以及对于天学（天文学和气象学）和地学（地理学和地质学）的贡献。这里所搜集的史实，乍看起来，似乎有点令人眼花缭乱；但我们必须记得，这些史实关系到一个民族的文化，而这个民族的人口占人类的五分之一以上，他们三千年来定居在一片至少和欧洲大小相等的土地上，并且他们的才能肯定不逊于其他民族。那些非常熟悉本卷所简单介绍的历史的人，必将感到这里写的不是太多，而是太不够了。

但是，象以前一样，我们在这里所考虑的，是

1） 指本书英文版第三卷，即包括中译本第三卷（数学）、第四卷（天学）和第五卷（地学）。——译者

那些往往因受繁忙的实验室工作的限制而未能作深入研究的读者的需要。他们的好奇心应该有一些路标来加以指引。至少有四个原因会使一个现代科学工作者接触到中国科学史。第一、可能有人对各种发现和发明的节点，即对那些为人类知识大厦留下永久性标志的事迹感兴趣。因此，这里要谈谈计算中位值制的发展(第十九章第二节)、二项式系数三角形的建立(第十九章第九节)、星图的绘制(第二十章第六节)、赤道式装置和望远镜钟机传动装置的发明(第二十章第七节)、第一具地震仪的建造(第二十四章第二节)和生物地球化学勘探(第二十五章第七节)。第二、可能有人为一种更富人种学意味的好奇心所驱使，渴望了解科学如何能在同西欧相差如此悬殊的一种文化中成长起来。所以，这里就要谈谈各种奇异的代数记号(第十九章第九节)、与希腊和埃及的黄道座标天文学大不相同的、以二十八宿为标志的北极赤道座标系(第二十章第五节)和一种远远超过拉丁西方的东方地理学传统(第二十二章第四节)。第三、可能有人想探索文化接触和交流的情况，以便在旧大陆各种文化之间列出一

张互惠平衡表。在这方面，至少可以谈谈数学问题和方法的传播(第十九章第十节)、二十八宿的传播(第二十章第五节)、天文仪器的传播(第二十章第七节)和制图技术的传播(第二十二章第八节)。我们还列出了几张比较表(表37和40)，供考虑这些问题时参考。最后，还有不少人认识到，中国古代和中古代的天象记录和地面现象记录(延续许多世纪，除此以外，我们几乎没有这个期间的其他资料)，在当前的科学研究(如射电天文学或气象学)中仍然有巨大的价值。关于这些问题，可以参看有关的章节(第二十章第九节和第二十一章第二、四、八等节)。

有一个题目是所有读者都共同感兴趣的，这就是东西方文化中数学和科学的关系问题。研究李时珍时代的中国，会有助于弄清楚近代科学如何在伽利略（Galileo）时代的意大利产生的问题吗？这一问题将在第十九章第十一节加以讨论。我们要在那一章中断定，中国固有的科学技术成就的最高型式是达芬奇（Da Vinci）型，而不是伽利略型的，并且还要指出，中国在公元1600年以前和欧洲一样，曾经存在过掌握了伽利略的部分方

法的两派，即高明的匠师们和经院哲学家们。至于与科学发展有关的东西方社会发展情况，则将留在本书的最后一卷再作深入的探讨。

人文科学家们的兴趣也可能同上述几种相去不远。然而，他们有一个特殊的不利条件，即不熟悉科学及其应用中常用的术语。各种专门知识的门类是如此之多，我们无法满足每一个人的要求，在我们认为必须加以解释的和不喻自明的名词之间，我们只能相当任意地作出抉择。究竟哪一些东西真正属于"普通常识"的范畴，这是很难决定的。因此，我们对于"蛋白质"、"机轴"、"地层背斜"、"游标尺"这样的名词就不多费力，而对球面天文学中某些基本术语的定义，则花了一些篇幅加以说明，并且还解释了诸如"港口常规时差"、"戈尔德斯密特富集原理"之类的术语。当然，想研究这个课题的读者，手头需要有一本科学技术词典，其篇幅必须和他们的人文科学知识的纯度成正比。

尽管如此，我们还是深切希望，人文科学家和一切具有一般文化知识的人，都将对人类自然科学知识史中迄今尚未揭开的一页发生兴趣。这种

研究是真正透视现代科学活动的唯一手段，是使技术教育解脱民族偏见的最有用的方法之一，也是整部人类文明史必不可少的一部分。以下几卷所摆的事实只不过是想表明，象在其他事物中一样，在科学史中也不能把欧洲同旧大陆其他部分割裂开来考虑。在距离不断缩小的时代，对那些属于他人的文化的科技成就和生活方式给以同情的估价，是我们的阿塔那修斯信条（*Quicunque Vult*）[1]。

提到术语，就会出现一个颇为重要的问题。任何翻阅本书的人都会想到的第一个问题是：怎样才能从汉文中把主要术语辨认出来而且看懂呢？我们的博学的通信人之一，在一封谈到中国古代和中古代钢铁工艺的信中问我们，有什么凭证说明在古籍中确实能辨认出生铁、熟铁和钢等名称呢？是不是我们忽视了古义，而过多地用现代知识去解释古字呢？这里的答案是很关紧要的。必须明白，在公元前十四世纪的甲骨卜辞中发现的

1） 阿塔那修斯（Athanasius）是四世纪亚历山大里亚城的主教，他始终奉行他的信条，至死不渝。——译者

中国书写文字和今日所写、所说的语言之间，存在着一种从未间断过的传统。所以，用苏美尔语或古埃及语同汉语相比是说明不了问题的；就连希伯来语也未必比得上汉语。许多比较简单的技术术语最先就是以甲骨文的形式出现的。再者，在字体定型化和标准化之前所使用的古代象形文字，也时常透露出一种工艺上的特点。比方说，"舟"字的古代写法画出了中国使用已久的横材隔舱结构，而不带艏材、艉材或龙骨的形迹[①]。"弓"字的古代写法正好表现出那种用几种材料复合制成的弯弓[②]。这些话对于本卷所提到的各种纯科技名词都是适用的（最多只有枝节上的出入），例如，对于与幻日和日晕现象有关的那一系列名词（第二十一章第五节），就是如此。

在中国语文方面，还存在着一种连续不断的字书传统，这种传统至少可以上溯到公元前三世纪。无论是稷下学派[③][公元前318年建立，恰在

① 参看本书第二十九章。

② 参看本书第三十章第五节。

③ 参看本书第一卷第199页。《管子》一书似乎就是他们撰写的。

亚里士多德（Aristotle）逝世之后］的学者们，或者是《吕氏春秋》（公元前239年）的那批作者，还是齐国《考工记》[1]（公元前260年前后）的编纂者，都经常为他们所用的术语下定义，或把它们用在不致发生误解的上下文中。许慎的字书《说文解字》（121年）在今天仍然和当时一样有用。我们之所以能够知道复杂的汉代青铜弩机[2]所有零件的名称，部分原因即由于刘熙在他的《释名》（100年）中曾十分清楚地描述了它们，并指出了它们的名称。事实上，我们确实不时发现一套套可以互相说明的术语。例如，公元1090年苏颂及其同事在开封建造的水运仪象台的说明书（《新仪象法要》），就载有专门名词140个以上[3]，这些名词全部注在一张真正的宋代机械蓝图上。

自然，除此以外，还有另一些令人气馁的困难。一种发现或发明也可能是用种种不恰当的术语来描述的。更糟的是，有时尽管事物已经改变，而名词却继续使用下去。“铜”字在代表青铜之前

① 此书收入《礼记》中，参看本书第一卷第235页。

② 参看本书第三十章第五节。

③ 参看本书第二十七章第八节。

是代表纯铜的[1]。"柁"字最初一定是指导向用的桨状物，而它在中古代又确实是指装在转轴上的舵[2]——那末，舵到底是在什么时候发明的呢？以后面将要谈到的一种情况为例，"浑象"一名在汉代指的是中间附有大地模型的演示用浑天仪，而在五世纪中叶它肯定是指一种实心的天球[3]——这种改变是在什么时候发生的呢？象这样的问题，只有核对了大量书籍以后才能解决。用这种方法即使不能得出完全确定的结论，也可以得到一个大致可靠的结论。过去对中国古籍中的术语所作的错误解释，一般都是由于学者们既不想用这种方法把它们搞清楚，也没有时间和不具备必要的自然科学知识来这样做。不过，当代的汉学家们正在迅速对这一情况进行补救。

在炼丹术和药物学那样的领域中，中国著作和西方一样，所用的异名极多，这无疑是出于同一个原因，即为了故意迷惑门外汉。但是，儒家的实事求是的编纂精神从来不让道家的神秘主义得

① 我们将在本书第三十六章讨论这个问题。

② 参看本书第二十九章第八节。

③ 参看本书第二十章第七节第(7)小节。

逞，因此，我们才能找到一本(盎格鲁撒克逊人的英国拿不出来的)值得赞赏的矿物、药物异名词典《石药尔雅》，它是梅彪早在公元818年编成的，现在仍有使用价值[1]。日本的医药学也跟得很紧，深根辅仁的《本草和名》(918年)同样流传至今，可作为这方面的指南。在这方面，用许多古籍进行核对同样是唯一的辨认方法。就我们所知，“火药”一词从来就是指用硫磺、硝石、木炭按不同比例配成的混合物(没有例外的情形)，而在中古时代火药无疑就是这样配成的[2]。同样，“候风地动仪”所指的就是地震仪，它从来不代表任何别的仪器[3]。到了传统科学的时代结束之后，十八世纪和现代的化学家们曾对中国的药物和矿物进行过分析，并通过这种办法把名词的含义确定了下来，因此，我们现在还能够追溯它们过去的起源[4]。例如，“曾青”指的是孔雀石或碳酸铜，由于本草著作同字书编纂者的传统完全相似，所以，这个在汉

① 参看本书第二十五章第四节。

② 参看本书第三十章。

③ 参看本书第二十四章第二节。

④ 参看本书第三十三章。

代确定下来的名词便不易再接受其他较晚的解释了。如果"生铁"所指的不是铸铁，"熟铁"所指的不是锻铁，"钢"所指的不是钢(事实上今天中国仍然用这个名词)，那末，古书的内容就没有任何意义了；反之，一切便完全讲得通①。

"这样来解释古书，"那位给我们写信的朋友接着又说，"是把它讲通了，但古书上的话在当时是按现代的见解那样讲的吗？"我们的回答是：中国古代和中古代的非宗教性著述，如果没有被传抄者掺入太多错误的话，一般总是线索分明、合乎情理、容易读懂的。有一位著名的批评家埋怨说，我们的第二卷把中国古代哲学家的话讲得太通了。就哲学家而论，我们当然不敢保证绝对正确，但是，在谈到历算家、观象家、医师、矿工和铁匠这些实践家时，我们的解释则是无可置疑的。如果说有人搞不清墨家关于连弩②的说明，而秦汉时代的某些数学和天文学方法今天难以理解的话，那是因为年深日久，文字窜乱，几乎无法复原的缘故。

① 参看本书第三十章第四节。

② 参看第三十章第八节。

即使是这样，当人们明确了古作者的话题是什么以后，总的轮廓就会变得明显，而订正也就不费力了。例如《九章算术》的开方术①就是如此。如果在汉代以后还有什么障碍的话，那是因为时间的牙齿啃掉了那些竹简和纸卷子，以致象裴秀(224—271年)——中国地理学中的托勒密（Ptolemy)——那样的人，我们也只知道一鳞半爪②。中国学者已经以珍惜的心情校刊了许多这样的古书，并在确定正确版本方面完成了一项艰巨的工作。此外，汉代以后的许多书籍都保存完好，当我们读到贾思勰的《齐民要术》(著于450年前后)那样的农业著作时，我们不能不为他清晰的论述而感到惊讶③。

有人说，本书的所有译文1)都象煮过的草莓。虽然这里确实没能保留原有的鲜味，可是我们已

① 参看本卷第143页。

② 参看第二十二章第四节第(5)小节。

③ 此书最近由我的老友石声汉教授重新刊行。它在本书第四十、四十一两章中占有重要的地位。

1) 这里所指的是本书英文版中所引的中国古籍的英译文。——译者

经竭力运用了冷藏技术，以期在一段引文得到读者的喜爱时，能尽可能多地保存生气。在我们所译的文句中夹杂着许多括弧，那不是因为原文过分含糊，而是因为在印欧语言中必须补充词尾变化，增添简洁的汉语所不需要的冠词和其他词类，以便使译文通顺可读。英语和汉语在语法和句子构造上是不同的。这里，有时需要根据我们对许多同类有关文字的了解，作出重大的判断。然而，中国的许多记载绝不是含糊不清，而是透彻精炼的杰作[突出的例子见第十六章第四节第(3)小节和第二十章第九节第(3)小节]。尽管关于古代汉语的暧昧难解，我们谈了很多，但令人惊奇的是，我们几乎想不起有哪几段文字，其中所要表达的科学命题的性质，或所要讨论的工艺过程，确实是有无法消除的疑问的。对于类似的文句和叙述，我们总是把它们拿来进行比较。自然，中国古籍所提供的知识有时并不象人们所期望的那样充分，儒生们那种格言式的简短叙述，在讨论实际问题时是有缺点的。

虽说所有翻译家都可能不太忠实，可是对译文负责至少有一种好处，它会迫使你对原文的含

意做出判断，尽管这可能是暂时的。一个历史学家用本国文字写作的时候，他可以援引古书作为他的议论的一般例证，并且实际上不必另加说明或对其专门术语作任何解释。但当这样的一段文字需要译成另一种语言时，便不能这样办了。当张衡的话被译成英文时(或亚里士多德的话被译成汉文时)，对于它的词义和含意便不能置之不理了；事实上，所有语言上的翻译都必然是内容的阐述。确实可以这样说，许多极有意义的古代科技著作，都是经过一番改装以后才为世人所知的。中国学者们最近也感到了这一点，现在正在把他们自己的某些古代和中古代著作很好地译成现代汉语。

还有一件小事情不妨提一下。每一个想把中国古书译成其他语言的人，无不为其大量官衔的译法大伤脑筋。到目前为止，还没有哪个朝代的官名有公认的译法，尽管近来汉学家们的工作正在这方面取得进展。我们认为，历代官僚政治中的官名是有深刻的意义的，它们和任何这类人事制度一样，是有道理的。因此，我们宁愿把它们译成现代的官名(即使有些错误)，以期把中国古代

和中古代的生活传达给西方读者，而不致有很多异国的、古老的和离奇的情调。现在举一个适当的例子[①]。我们把“太史令”译作 Astronomer-Royal（皇家天文学家），因为从很早的时候起，星象观察官员就在中国官僚组织中占有很高的地位，并且自古以来便做出了许多有益的、科学的天文工作。这无疑是因为在雨量不定的情况下，一个巨大的农业国对于历法的需要至少和帝王要求宫廷占星家作政治性占卜同样重要。关于术语和翻译问题，我们就谈到这里为止。

虽然我们力图把本卷所涉及的各个方面的最新研究成果考虑在内，可是很遗憾，1956 年 12 月以后出现的著作一般都未能提到。

目前这个（尽可能）偿还欠债的机会绝不可失。我们对周围的专家们深为感激，在各种问题上，我们经常依靠他们的指导——在阿拉伯文方面是邓洛普（D. M. Dunlop）先生，在日文方面是本多美信（译音）教授，在梵文方面是沙克尔顿·贝利（Shackleton Bailey）博士，在希伯来文方面

① 参看本书第四卷第 49 页。

是罗伊 (R. L. Loewe) 先生，在波斯文方面是鲁本·利维 (Reuben Levy) 教授。对于他们无限的支援和从不衰退的热情，无论怎样估计都不会过高。此外，读过本卷各章手稿的人也都格外帮忙，为此，我们要特别向皇家学会会员马勒 (K. Mahler) 教授致谢，因为他不仅对数学一章提出许多疑问，并且对有疑义需要剖析的地方都做了专门的研究。对于天文学那一章，剑桥天文台的比尔 (Arthur Beer) 博士，即《天文学展望》(*Vistas in Astronomy*) 的杰出的编者，也同样热情地帮助过我们。每当他亲自送来新的资料或困难问题的解答的时候，我们一听见他那熟悉的脚步声，就既感到帮助，又感到精神上的鼓舞。此外，普赖斯 (Derek Price) 博士在天文仪器史的许多问题上和我们密切合作，这是特别可贵的。

这里还需要提一提其他受惠之处。这一卷付印时，布赖恩 (Derek Bryan) 先生为我们负起了印刷工作的重担。科列特中国书店的柯温 (C. Curwen) 先生过去在山丹的偕利学校工作过，他在搜集中国科学史最新书刊并保证送到我们手中这件事上，给我们提供了可贵的帮助。对于莫伊

耳(Muriel Moyle)小姐,我们和以前一样,深深感谢她为我们编制细致的索引。福斯特(K. Foster)神父亲切地帮助我们从欧洲经院哲学家的著作中寻找引文。还有举不胜举的很多其他人,或者作为评论者,或者作为通信人,都以最大的善意促使我们注意到前两卷中有某些地方应该校正。较细致的修改须待第二版,现在我们暂在卷末附一勘误表。

我们应当向查尔斯·辛格(Charles Singer)博士和夫人以及拉伊希曼(Ludwik Rajchman)博士和夫人表示另一种感激之情。本书编写过程中的无数想法,是在康瓦尔郡靠近圣奥斯特耳的启耳玛斯地方一间俯瞰大海的长形书斋中,并在经常是那么好客的居停主人的鼓舞和关怀下成型的。对于一个来自太平洋之滨的江苏省沿海的中国人[1)]来说,这无异是在西王母的宫殿——远在天涯海角的知识之宫——受到接待。修改校样是令人厌倦的,但是,既然是在如此可爱的环境——就象住在涉女附近萨特河博勒加洞那样——和伴

1) 这里指的大概是作者的合作者王铃。——译者

侣当中进行修改，情况就大大不同了。

还有一位曾把本卷以及以前各卷每一字（甚至每一插图的题跋）都读过的人——皇家学会会员多萝西·尼达姆（Dorothy Needham）博士[1]，真的，没有她那亲切的鼓励和精神上的支持，我就根本不可能写出这一卷。对于剑桥大学出版社的委员和工作人员为胜利完成我们的计划而作出的一切贡献，我们应当再一次表示最恳切的谢意。他们是习惯于遵守绝不透露姓名的严格戒律的，但是我们长期得到彼得·伯比奇（Peter Burbidge）先生如此慷慨的友好帮助和合作，就没有什么清规戒律能阻止我们向他表示最热切的谢忱了。我再一次高兴地向我们本学院和本学系以皇家学会会员扬（F. G. Young）教授为代表的各位成员表示谢意，因为如果没有他们始终如一的同情和谅解，本书就完全不可能写成。

最后，但不是最不重要的，是财务方面的问题。除了在别处已经向博林根基金会（Bollingen foundation）表示谢意外，在提供资助经费方面，

1）即李约瑟夫人。——译者

我们衷心感谢各大学中国委员会、冈维尔和凯厄斯学院以及保管霍耳特（Holt）家族遗赠资金的大洋轮船公司各位经理。维耳卡姆信托公司的慷慨资助扩大了这些资金，使生物学、医药学一卷范围内的研究工作得以顺利进行。

志　　谢

承蒙审阅本卷各章节手稿的人士姓名录

说明：下表(只适合于本卷)是本书第一卷第30—36页那个表的补充，希望它能反映出最新的情况。

巴沙姆（A. L. Basham）教授（伦敦）	数学（记号）
巴参（L. Bazin）教授（巴黎）	天文学（历法）
比尔（A. Beer）博士（剑桥）	数学、天文学和地震学
贝尔纳（J. D. Bernal）教授（伦敦）	全部章节
瑪格丽特·布雷思韦特（Margaret Braithwaite）女士（剑桥）	数学
罗伯特·布里顿（Robert Brittain）先生（紐约）	地理学

恰特莱 (Herbert Chatley) 博士（已故，巴思）	天文学
克里斯蒂 (A. Christie) 博士（伦敦）	数学（记号）
科恩 (R. Cohen) 教授（康涅狄格州米德尔城）	数学（结语）
戴伊 (A. Day) 海军少将（海军部水文测里家，伦敦）	地震学
杜赫斯特 (D. W. Dewhirst) 博士（剑桥）	天文学
爱德华兹 (W. N. Edwards) 博士（已故，伦敦）	地质学和古生物学
叶理夫 (V. Elisseeff) 教授（巴黎）	全部章节
费希尔 (Ronald Fisher) 爵士（剑桥）	数学
福克司[1] (W. Fuchs) 教授（慕尼黑）	地理学和制图学
霍尔 (A. R. Hall) 博士（剑	

1) 福克司在第一卷译作富克斯。——译者

桥)	天文学
霍尔 (D. G. E. Hall) 教授 (伦敦)	数学（记号）
布赖恩·哈兰(Brian Harland) 先生（剑桥）	地质学和矿物学
哈里森(K. P. Harrison)博士（剑桥）	天文学（赤道式装置）
哈特纳 (W. Hartner) 教授（美因河畔法兰克福）	天文学
徐立志博士（剑桥）	数学
伊尔 (P.A. Jehl) 先生（巴黎）	天文学（耶稣会传教士在华时期）
凯利 (David H. Kelley) 先生（新罕布什尔州）	天文学
科斯洛 (Arnold P. Koslow) 博士（紐约）	数学
莱斯利 (D. Leslie) 先生（海法）	数学
鲁桂珍博士（剑桥）	全部章节
麦肯齐 (Scott McKenzie) 先	

生（华盛顿）	矿物学
马勒（K Mahler）教授（曼彻斯特）	数学
戈登·曼利（Gordon Manley）教授（伦敦）	气象学、地理学和制图学
斯蒂芬·梅森（Stephen Mason）博士（伦敦）	天文学
雷蒙德·默西埃（Raymond Mercier）先生（剑桥）	数学和天文学
亨利·米歇尔（Henri Michel）先生（布鲁塞尔）	天文学和气象学
米尔斯（J. V. Mills）先生（里士满）	地理学和制图学
中山茂（Nakayama Shigeru）先生（东京）	天文学
多萝西·尼达姆（Dorothy M. Needham）博士（剑桥）	全部章节
奥克利（K. P. Oakley）博士（伦敦）	地质学、古生物学和地震学
帕克-罗兹（F. Parker-Rhodes）博士（剑桥）	数学

派丁顿（J. R. Partington）教授（剑桥）	矿物学
佩泰（Luciano Petech）教授（罗马）	全部章节
德里克·普赖斯(Derek Price)博士（华盛顿）	天文学
兰金（R. A. Rankin）教授（格拉斯哥）	数学
杰罗姆·拉维兹（Jerome Ravetz）博士（利兹）	数学
基思·伦科恩(Keith Runcorn)教授（纽卡斯尔）	数学
斯洛莱（R. W. Sloley）博士（阿墨尔夏姆）	天文学（漏壶）
泰勒（E. G. R. Taylor）教授（伦敦）	地理学和制图学
特威切特（D. Twitchett）博士（剑桥）	地理学、地质学和矿物学
怀特（F. P. White）博士（剑桥）	数学
伍斯特（W. A. Wooster）博	

士	矿物学
吴世昌博士（牛津）	数学（记号）
尤什凯维奇(A. P. Yushkevitch) 教授（莫斯科）	数学

目　　录

第十九章 数 学

一、引 言

从这一章起，我们开始进入本书的后半部。由于数学和各种科学假说的数学化已经成为近代科学的脊梁骨，我们在评价中国人在各门科学技术中的贡献时，首先从数学入手应该是适当的。我们当前的任务就是对中国人在数学方面的成就做一番评价。迄今为止，科学史家们对这个问题的看法往往摇摆于两个极端之间。例如，塞迪约(Sédillot)[1] 在 1868 年反对十八世纪传统的亲华主义，认为比约 (J. B. Biot) 把中国数学与天文学著作的问世年代定得太早，无法相信，他竟说（虽然没有任何原始文献能为他提供这样说的根

① 参看 Sédillot (2), vol. 2, p. xiii; (4)。

据）：中国人从来不曾在数学中得到任何有价值的成就，他们所掌握的数学知识是从希腊传进去的[①]。以后，如赫师慎（van Hée）等作者，他们的汉学才能敌不过传教士的偏见，竟再次坚持说，中国的主要数学著作都是在外来影响的启发下完成的。但是，这种观点一直是有人反对的。任何人读完这一章，都会清楚地看到这些观点离开事实有多远。

关于东亚数学史有着大量的文献，但是不幸（对于大多数西方人而言），这些文献绝大部分是用中文和日文写的。那些读不懂这些原始资料的人，就不得不依靠一些著名的西文数学史，例如 Cantor (1)，Loria (1)，Cajori (2)，D. E. Smith (1)，Karpinski (2)。康托的名著 [Cantor (1)] 现在已经太陈旧了（1880 年）；他当时不得不依靠比约的更早的译文，他的另一个主要来源则是俾纳次基（Biernatzki）的文章（1856 年），这篇文章仅仅是伟烈亚力 1852 年的著作 [Wylie (4)] 的翻译，后

① 像劳斯·鲍尔 [Rouse Ball(2)] 这样一些著名的数学史家，对塞迪约的著作只是逐字照抄，对我们毫无用处。

者是至今仍然值得一读的好资料①。从历史的角度以最简洁的现代方式叙述中国数学的是卡约黎的著作 [Cajori (2)]；但最全面的是史密斯的著作 [Smith (1)]，后者分两卷，第一卷是按照年代编写的，第二卷是根据科目编写的②。

所有这些学者的著作都有缺点，因为他们没有一个人具备足以直接阅读原文的汉文知识③。不过，这个评语与史密斯关系不大④，他亲身在中

① 如果这个译本译得准确无误，那末，康托至少可以避免一个严重的错误（见后面第 272 页）。伟烈亚力 [Wylie (13)] 也编了一份中国数学辞汇。

② 除这些书之外，还可以提一提阿奇巴尔德 [Achibald (1)] 和沃尔登 [van der Waerden (3)] 最近写的简明数学史，虽然他们不提中国人的贡献，但这两本书还是有用的。如果手头没有别的资料，史密斯 [D. E. Smith (2, 3)] 和瓦卡 [Vacca (3)] 的短文也值得一读。洛利亚的二篇短文 [Loria (2, 3)]，则不过是赫师慎论文的摘要。

③ 实际上，他们在汉学上是不足轻重的。他们会兴致勃勃地把《周髀算经》推前 1000 年，同时却怀疑最可靠的宋代著作。洛利亚的著作 [Loria (1)] 真是错得几乎一无是处。他患了一种不可救药的疑心病，认为所有中国古代数学技巧必然都是抄袭西方的。他的书中论中国的一章《中国之谜》的标题，显然颇合他的心意，但对我们却无用处。关于他，可参阅三上义夫 (4)。

④ 但是，就连史密斯也相信最古的中国数学著作的问世年代早得不可思议。

国与日本住过一段时间，在那里搜集数学书籍，并得到与亚洲数学家（特别是三上义夫）亲密合作的良机。这种合作的好处在俄国尤什凯维奇（A. P. Yushkevitch）最近的卓越贡献中也是显而易见的。

日本学者有一本特别重要的著作——《中国和日本数学的发展》（*The Development of Mathematics in China and Japan*, 1913年），这本书是研究这个问题所必不可少的。三上义夫是唯一具备下述条件的数学史家，即既饱读汉文和日文古籍，又能运用一种西方语言比较平易通顺地表达出自己的意思①。因此，尽管人们对三上义夫的论断有各种各样的批评，事实上他在数学史领域中仍然占据着十分独特的优越地位，唯一能与之媲美的只有老一辈的伟烈亚力②。最足以与三上义

① 遗憾的是，三上义夫和前面提到过的其他数学史家一样，像演芭蕾舞剧似的，把中文名称的拉丁拼音搞得光怪陆离，认不出本来的面目了。我还必须指出，虽然数学照理就应该意味着精确，可是我还从来没有在别的书中遇到过这么多的误印和错误。无论是对他的中文著作还是西文著作，都可以这么说。

② 提到伟烈亚力的贡献时，不应该忘掉他在《中国文献笔录》（*Notes on chinese Literature*, pp. 90 ff.）中所列的大量书目资料。

夫的著作相提并论的是林鹤一的专论，这是一篇用英文写的论文，发表在荷兰的期刊上，但这篇论文只限于讨论日本数学，知道它的人比较少。

谈到三上义夫的其他著作，我们就要涉足中文与日文的数学史书的领域了。三上义夫最初用日文写的《中国算学的特色》是很有价值的[1]。日本有一部巨大的集成著作——《东方思想的动向》[2]，其中的数学部分（科学；数学）就是他的贡献。关于这部著作，最近薮内清(3)提供了一篇有价值的评论。

在中国的数学史家中，李俨和钱宝琮是特别突出的。钱宝琮的著作虽然比李俨少，但质量旗鼓相当。李俨和史密斯一样，认为在不同的著作中分别采取按年代和科目分类两种体裁较为方

① 参看三上义夫(12)；藤原松三郎(1)。

② 三上义夫在1950年逝世。小仓金之助和大矢真一(1)以及矢岛祐利［Yajima (1)］都撰写过他的传记和著述书目。三上义夫(3)是自传性的作品。矢岛祐利［Yajima (1)］告诉我们，三上义夫有一部关于中国数学史的遗稿，共计一千多页，至今仍然保存着。确保这部学术著作尽快问世的重大责任，落在日本国立科学院的身上。

便。他的《中国数学大纲》①采用编年体。更为完备的叙述见于《中国算学史》,这部书有节略本,即《中国算学小史》。他的四卷著作《中算史论丛》则采用按科目讨论的分类体裁;新的五卷本也继续采用这种写法。

钱宝琮的主要著作是《中国算学史》,此外还有一部简短的《古算考源》。《中国算学史》基本上是编年史,写到明代中叶;《古算考源》讨论一些专门题目,一直谈到宋代的代数学家,特别是朱世杰为止。许莼舫(1—4)的著作也是有意义的,此外,严敦杰的论文,我们也要经常引用。

关于中国数学史资料的丰富程度,我们可从最近出版的书目②中得到一个概念。有一份中国数学史论文目录③,开出了1918—1928年十年间的33种重要的专题研究。从李俨与严敦杰所编的目录可得知,1928—1938年这十年间的数目

① 只出版了上册,上册写到元代(十四世纪)。

② 关于中国数学史工作者,可参阅李俨(14);关于近三十年的中国数学史研究记录,可参阅李俨(15)。严敦杰(4)曾介绍了上海地区的数学文献。

③ 王铃编于1945年6月。

也大致如此，但在1938—1944年间却增加到60篇，据李俨最近发表的论文目录，从1938—1949年有104篇。很遗憾，这些论文大多发表在西欧从未见到的期刊上，即使在中国，要不是像李俨那样费了大量的时间和精力进行搜集的话，也是不易获得的①。

虽然日本的数学史有点超出我们讨论的范围，而且不管怎样，它直到十六世纪末才算正式开始，但是必须提起，这方而有一部史密斯和三上义夫（用英文）合写的有用的著作②。用日文写的有较早的远藤利贞的著作和细井淙较新的提要③。哈策（Harzer）的讲义（德文）也是值得参考的。

前面已经提到④，阮元在1799年曾编写了一部数学家传记集——《畴人传》。但赫师慎［van

① 在十八世纪中国数学书目中，最大的一份大概是梅文鼎的《历算书目》（见后面第106页）。亦可参看丁福保和周云青（2）。

② 这两位作者似乎认为，在这方面不会有人进一步去进行研究，因为他们没有引用过原来的文字（只在附图中偶尔出现）。至于三上义夫本人的研究工作的摘要，可参看三上义夫（21）。

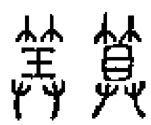
③ 参看藤原松三郎（2）。唐纳德·莱斯利（Donald Leslie）先生已编出一份日文和西文的图书论文目录。

④ 参看第一卷第107页（第三章第三节）。

Hée (10)] 对《畴人传》的分析不是全部没有价值的，不过，三上义夫对此分析中的错误的评注也值得加以研究[1]。“畴”(K 1090 *l*) 字本义是测量人员[2]，后来引申为所有的计算人员(畴人)，尤其是指天体测量人员(即天文学家)。所以，这些传记的内容涉及历法方面的多于纯粹数学方面的。

在本书第二卷中曾讨论过“算”字的象形字源[3]。在甲骨文或金文中从未发现过这个“算”字[4]。因此，它出现的年代不可能早于李斯的时代(公元前三世纪)。

有人猜想，“算”字的古体(汉以前)是珠算盘[5]的象形(见右图)，这种想法肯定是不可信的。但这个字很可能是表示划有横线的筹算板[6]的。算字有两种不常见


K 173

① 关于赫师慎，可参阅李俨(12)。

② 即像古埃及的 *harpedonaptae* (拉绳者)一样[参看 Gandz (3)]。关于新王朝壁画，可参看 Klebs (3), p. 7, fig. 5。在中国数学的专门术语中留有关于土地测量的迹象，可参看 Wang Ling (2), vol. 1, pp. 132 ff.。亦可参阅后面第 213 页。

③ 参看本书第二卷表 11。其他有关的字也在那里说明过。

④ 至少到目前还没有被人们辨认出来。

⑤ 参看后面第 175 页。

⑥ 参看后面第 138 页那一节。或者是表示田地。

的异体字(筭，祘)，前者是从较古的写法变来的，字的中央部分，许慎①曾认为是表示玉，但更可能是表示一束（或几枝）算筹②。许慎把这个字与“摆弄某物”的“弄”字联系起来，并说算字的意义已由竹字头(Rad. 118)表明，因为竹字头就代表长六寸，所以计历数③的算筹。第二种写法（祘，K 175）显然比较晚，它仅仅是“示”字(Rad. 113, K 553)的重复。“示”字的意思是“指出，表示，透露，揭露等，像神的显示一样”。这种用法肯定是出自计算和算命的联系。

这种联系由来已久，证据是在古代和中古代的文献中，算和数这两个字经常带有预卜未来的意味。例如，《西京杂记》④在谈到东汉的学者皇甫嵩、真玄菟、曹元理是“算术”行家时，从上下文看，显然是说他们能够预卜他们自已以及他人寿

① 许慎是中国辞典的始祖，他在完成《说文解字》后，于公元 121 年去世。

② 参看后面第 153 页。

③ 这种解说出自《前汉书》卷二十一上第二页正面，因此，它大概可回溯到刘歆的时代。

④ 参看《西京杂记》(约六世纪)卷四第一页反面那一节。

命的长短。因此，他们不属于数学史。然而，这并不意味着，对古代占卜方法作进一步的研究，不会为数学史的研究带来好处。十一世纪的沈括所说的“内算”，是一个至今尚未探讨过的领域。我们亲眼见过算命瞎子用他们的指节迅速地推算顾客的生年。有些算命先生也用算盘。这些人的方法也许在过去曾包含某种关于排列和组合的经验知识，尤其是在推算中国历法[①]中的六十甲子方面。唐代僧一行(七世纪末)在组合计算和预测命运这两方面都有巨大声誉，看来并不是偶然的。这是有待进行历史研究的另一门准科学。

二、记数法、位值制和零

我们所需要的基本知识[②]概括在表22中。第一栏虽然注明是“近代体”，但实际上也是古代的和中古代的；这些书写数字从秦、汉(公元前三世

① 参看本书第四卷第537页。

② 格拉特［Glathe (1)］有一篇关于数字记法的专题论文，但并不很吸引人。

纪)[1]以来就定型了。在这些数字旁边附有拉丁拼音，这些拼音完全适用于第三栏所列出的所谓“会计体”(大写数目字)。这些在汉代(公元前一世纪)和汉代以后渐见流行的比较复杂的“会计体”[2]，被认为是比较优美的，而且也较难窜改，但这种会计体字体在数学著作中当然是见不到的。第二栏和第四栏所列的数字是指各该“标准体”和“会计体”在高本汉语源辞典［Karlgren (1)］中的号码[3]。第一栏中较小的几个数的字体无疑是象形文字，但从四以后的数字，似乎是植物与动物的原始名称的同音假借字[4]。其次，第五、六、七栏所

① 重要的是这里不包括零。关于零的问题，我们将在后面(第 20 页)简短地加以讨论。

② 正如十四世纪的学者白珽(他对这个问题很感兴趣)所指出，这些数字有一部分确实起源很早(参看《湛渊静语》卷一第二页反面)，例如，大写的壹字在毛亨(公元前三世纪)所著的《诗序》中就已经出现，而大写的贰字可在《孟子》(公元前四世纪)中找到。

③ 在语源学方面，亦可适当地参考 Hopkins (14, 35)。

④ 数字四可能出自犀牛，六可能出自蘑菇，百可能出自松果，万无疑是出自蝎子，以象征昆虫之多(参看第一卷第 64 页)。后代把千字写作一个人，再在一条腿上划一横，这就把最古的甲骨文体永远保留下来了(见表 23)。

表 22　古代与中古

	一	二		三	四	五	六
	标准近代体			会计体		商代甲骨文体	青铜器与货币体
						（公元前十四一前十一世纪）	（公元前十一前三世纪）
1	一	i	395	弌或壹	395	一	一
2	二	erh	564	弍或贰	564	二	二
3	三	san	647	叁	647	三	三
4	四	ssu	518	肆	509h	亖	亖
5	五	wu	58	伍	58	X	X
6	六	liu	1032	陆	1032f	∧　介	介
7	七	chhi	409	柒	—	+	+
8	八	pa	281	捌	281	)(	)(
9	九	chiu	992	玖	—	[illegible]	九
10	十	shih	686	拾	—	|	ǂ
100	百	pai	781	佰	781	见	见
1,000	千	chhien	365	仟	365	表 23	表 23
1,0000	万	wan	267	万	267		
0	零	ling	—	零	—		

列的是在甲骨文（公元前十四世纪到前十一世纪）和周代（公元前十世纪到前三世纪）的青铜器及货币上的铭文中见到的数字①。我们所见到的这些

代的中国记数符号

七	八		九		十
周代货币上发现的别体	算筹体		后期算筹体		商业体
（公元前六—前三世纪）	（公元前二—公元四世纪）		（公元十三世纪以后）		（公元十六世纪以后）
	个位	十位	个位	十位	
一　丨	一	丨	丨	一	丨
二　‖	二	‖	‖	二	二
三　|||	三	|||	|||	三	|||
亖　双　||||	亖	||||	亖 X	亖 X	X
[illegible]　[illegible]					
☰ X [illegible] ⊠	☰	|||||	||||| 〇 ☰ 〇		〥
[illegible] [illegible] ⊥ T	⊥	T	T	⊥	⊥
[illegible] [illegible] 〒 ⊥ TT	⊥	TT	TT	⊥	⊥
X　⊥	⊥	TTT	TTT	⊥	⊥
[illegible] X　⊥	⊥	TTTT	TTTT X ⊥ X		攵　⊥　久
＋　ф	用位置表示		用位置表示		＋
[illegible]					㇋　θ
£					千
万					万
空位置用到八世纪			0		0

① 在根据郭沫若（3）、孙海波（1）及其他专家的研究来核对这些表的数字时，我们得到吴世昌的巨大帮助。 关于甲骨文字，可进一步参考朱芳圃(1)的汇编。李俨[（2），第 2 页]所列的表中，两个九字都是错误的。

数字，有一些是同第八、九栏的“算筹”数字密切相关的，而算筹数字据信（并且确实如此）是起源于真的算筹在平板上的排列形状①。在十一到十四之间的几个甲骨文数字中，这种算筹排列的倾向已十分明显，而对于比十小的数字，这种倾向可以在战国时期的货币上看到②。最后一栏（第十栏）所有数字的表示法全部遵循算筹系统③。

据说④，最早出现算筹数字的数学著作是公元五世纪（或四世纪）的《五曹算经》⑤。我们见过

① 这里对算筹数字作如下规定：从六至九，各数的记法是在原来的一划上添加与之垂直的一划或数划。关于这些算筹数字，现存最早的铭文证据的年代是公元前四世纪［参看 Wang Ling (2), vol. 1, pp 83 ff.］。

② 参看 de Lacouperie (2); (4), pp. 19, 122, 302, 311, 321, 368; Wang Yü-chhüan (1); schjöth(1)。

③ 第十栏所列的字体，今天访问中国的人还可以在餐馆的账单中见到。这种字体就是人们所说的“码子”或“暗码字”，在1593年的《算法统宗》以前的出版物中，这种字体未曾以印刷形式出现过（参看后面第113页）。这种数字与从前的大商业城市江苏苏州有关。万字的奇特的形式据说是始自唐代，然而在周朝的刀币上就已经可以见到它了（参看《古泉汇》亨集卷二第八页反面）。

④ 例如史密斯［Smith (1), vol. 2, p. 40］。他和往常一样，把这部书的年代定得过早。

⑤ 参看后面第 74 页。

这部著作的几种版本，实际上都没有算筹数字，其中的计算只不过是用通用的文字写出来的。但这个问题无关紧要，因为既然数学著作的印刷始于十一世纪，而且从金文及货币的证据得知，算筹数字早在一千多年以前已经使用，那末，印不印算筹数字必定是由各个编印者自已决定的了[①]。此外，汉代的数学著作常用“置”(放上去)和“列”(排开来)等术语，这也意味着当时已在使用算筹了。

《左传》(鲁襄公三十年，即公元前542年)中有一个著名的猜字画谜，常常被人[②]引用来表明算筹数字的历史可推至周代中期。这段文字[③]牵

① 中国古书的直写法不适宜于算筹数字的印刷，它们长期被看成是印出来不够“文雅”的东西。在《孙子算经》的敦煌手抄本[巴黎国立图书馆第3349号，参看李俨(20)，第28页]中，可以看到这种数字。我们认为这份手抄本是唐代的。

②例如参看 Wylie (4), p. 169; 参阅《履斋示儿编》卷二十三第一页反面。

③ 《左传》鲁襄公三十年，译文见 Couvreur (1), vol. 2, p. 544。参阅《前汉书》卷二十一下第二十八页正面；《唐阙史》卷二第二十五页反面。《碧溪诗话》卷九第四页反面；《小学绀珠》卷一第三十七页正面。

涉到一个老人年岁的确定，地支“亥”字被分解为一个 2 与三个 6，表示这个老人的年岁是 2666 个旬日。这个解释表明了前人对位值记数的理解。但考虑到《左传》经后人改编，用《左传》作为证据把算筹数字的历史推到战国以前的某个时期就不够妥当了，至于战国时期，那无论如何是有货币可以作证的。当然，如果筭字是一个古代排列算筹的图样，那末，这种数码（和工具一样）的产生可以推至公元前一千年。甲骨文的某些数字，特别是 5，6，7 和 10，显然与算筹的排列相似（见表 22 第五栏）。

秦汉时期，$\top$ 和 $\perp$ 这两种数字的功用已被固定下来，前者用于个位，百位，等等，后者用于十位，千位，等等。最晚在三世纪，这两种数字已分别称为纵数码和横数码①。这个时期的《孙子算经》②说：

> 在进行计算时，首先必须懂得数字的位（和结构）。个位以纵划表示，十位以横划表

① 这是纵横这两个词的另一种专门用法，它们在战国时期曾经是外交联盟上的术语。

② 参看后面第 71 页。

示，百位是纵的，而千位则是横的；所以，千位和十位看起来是相同的，万位和百位也是这样。……到了6这个数字，数字就不再单靠纵划的堆砌来组成了，而数字5则不是由单划组成的。①1)

〈凡算之法，先识其位。一纵十横，百立千僵，千十相望，万百相当。……六不积五不只。〉

这个记数法被固定成下列形式②：

① 《孙子算经》卷上第二页反面，由作者译成英文。

② 在这种定型的工作中，王莽可能起了某种作用。正如李俨[(1)，第58页；(3)，第19页]所指出，王莽在公元一世纪初，为了表明他那短命的新朝和汉朝不同，曾把货币上的数字6写成竖划上面加横划的丅，以代替原来在下面加横划的丄。这对拟订后来孙子所描述的那个成规可能有所帮助。王莽的做法的一个例子，可参看 de Lacouperie (4)，p. 302，no. 106；比王莽时期更早的例子，见 p. 160，no. 632；p. 162，no. 642；p. 283，no. 1376。然而，纵六这个数码似乎早先在战国末期就已经偶尔使用过，参看 de Lacouperie (4)，p. 190，no. 779。

1) 作者在引用我国古籍时，或者按照他自己的理解把古文译成英文，或者采用他人的英译文，并据此作出结论。为了使读者便于看出作者对所引古籍的理解的准确程度，本卷在碰到引用成段古文时，先把原书的英译文译成白话文，然后再在其后的尖括号内引出原来的古文。读者将会发现，除了译文中常由作者增添一些说明的词句外，译文本身有时与原文也有一些出人。由于有原文可资对照，以后对这些问题就不一一指出了。——译者

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
个位，百位，万位	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
十位，千位	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

这样，数字 4716 可表示成𝍬𝍦𝍩𝍥。由于相邻各位的数码用纵横不同的字体互相区别，计算者就可以使用不分行的筹算盘了①。在宋代，数字记法倾向于把各位数码聚集成一个合体字②，例如，把 4716 写成 𝍬𝍦𝍩𝍥。据说③，有时候象𝍦这样的数码，如果出现在百位的时候，就要写成〒，不过，这应该是很少见的④。

上面用的“位”字，主要是指算筹在筹算盘各行中的位置，换句话说，指的是位值。“位”又叫做

---

① 有一桩十分惊人的事实是：甚至在远至公元前十三世纪的甲骨文数字中，1 与 10 的符号都是一条直线，前者横，后者竖(表 22 第五栏)。可以看出，这正好和孙子所记录的成规相反，但两者的原则是相同的。

② 无疑，这是为了便于印在书籍直排的字行里。

③ 参看 Smith (1), vol. 2, p. 42。

④ 我们自己从未在任何著作中见过这种写法，它似乎是一种货币体(表 22 第七栏)。这种形式应当是从一种很古的写法合乎逻辑地演化出来的(参看后面表 23)。

"等"①。在八世纪以前，在数字等于零的位置上常常留下空位，就像李俨从《孙子算经》中找出的实例一样②。这在敦煌石窟的一些唐代手抄本上表现得很清楚。有一个卷子名叫《立成算经》，载有九九表③，其中答数同时用文字和算筹数码表示。在这里，我们看到405表示为|||| |||||。从汉代的筹算盘到宋代代数学家的"矩阵"记号④，位一直是基本的东西⑤。

---

① 《张邱建算经》卷上第六页反面。

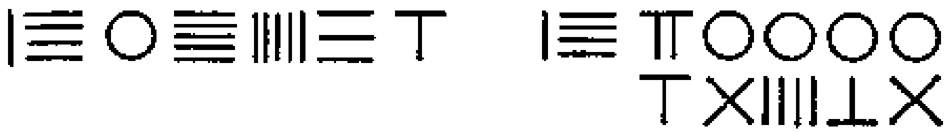
② 参看李俨(1)，第59页。这个论点的证据隐藏在一切早期的计算说明中，因为这些说明都教人如何把算筹从某一位搬到另一位。这在开方程序中说得特别清楚[参阅 Wang & Needham (1)]。

③ 参看后面第 79，239 页；同时可参阅 Biot (7)。

④ 参看后面第 290 页。

⑤ 显然，按照位值把数码排列在不同的直行中这样的筹算盘制度，早在周末以前必定已发展得很完备了，这在当时(如公元前四世纪，是很先进的办法。但这种领先的发展有时要以日后的停滞为代价。也许，由于宋代代数学家在思想上受到棋盘表示法的支配，因而阻碍了符号的自由运用。关于这个道理，还可以找到更多的例子。汉代数学家在寻找解数字方程的一般方法方面的成就本身，也许正足以解释后代缺乏方程论的原因(参看后面第 286，252 页)。位值虽然在算术上有巨大的价值，但却妨碍了代数的符号体系。在另一个领域中，我们也可以见到类似的情况：古代中国天文学的先进的赤道特色，使岁差的发现推迟了(参看本书第四卷第 71，225 页)。

零的圆圈符号，印刷体最早见于秦九韶的《数书九章》[1]（1247年），但有许多人相信[2]，它最晚在上一个世纪就已经使用了。一般人认为这个符号是直接来自印度的；而在印度，它最早于870年出现在瓜略尔的波闍提婆（Bhojadeva）碑文上[3]。但是，这种外来说缺乏确切的证据。这种形式很可能是从十二世纪理学家们所心爱的哲学图形中假借而来的[4]。无论如何，宋代数学家手中已有了一种运用自如、发展完善的记号法，例如，伟烈亚力在一个世纪前曾从秦九韶的著作中选出这样一个例子，即把减法1470000－64464＝1405536表示为



① 大英博物馆S/930。这个手抄本是向达博士最先注意到的，后来由李俨加以出版（有些错误），见李俨（7）。原件是抄在一部道教书籍部分书页的反面上的。

② 参看 Mikami (1), p. 73; (5); van Hée (15); 严敦杰(6)。

③ 参看 Smith & Karpinski (1), p. 52; Datta & Singh (1), vol. 1, pp. 42, 118; Renou & Filliozat (1), vol. 2, p. 703。但有人认为是876年。

④ 即《太极图》，见本书第二卷第十六章第四节第(2)小节。这个想法是王铃提出的[参看 Wang Ling (2), vol. 1, pp. 97 ff.]。

从已经搜集到的古代印度数码表①可以看出，自从阿育王（Asōka）的时代（公元前三世纪）起，类似于今天"印度、阿拉伯数码"的字体就开始稳定地发展了。值得注意的是，在所有各种数码体系中，最初三个整数的写法都与中国的一样；某些古代的体系② 也用×表示4（参见表22第九、十两栏）③。但几乎在所有体系中④，10与10的倍数20，30，40，100等等都用独立的符号表示（不包含位值制的成份）⑤，而只要这样的符号占优势，位值制的算术就不能存在。

---

① 查华达那（Jaivardhana）王二世的拉古利碑铭中的一个数字，把这个表回推到八世纪［参看 Datta & Singh（1），vol. 1，pp. 40，82］。

② 参看 Smith & Karpinski（1），p. 25；Smith（1），vol. 2，p. 67；Datta & Singh（1），vol. 1，pp. 105 ff.；Renou & Filliozat（1），vol. 2，pp. 705 ff.。

③ 例如，公元前一世纪佉卢语（印度亚拉姆语）的塞迦（Šaka）碑文。

④ 一些早期学者，如克莱因瓦赫特［Kleinwachter（1）］，企图从中国数码中推出印度阿拉伯数码来，这种企图现在早已放弃了。

⑤ 例如，著名的高止山碑文中的纳加里数字（公元前150年）或从沙特罗巴货币（公元200年）上发现的一系列完整的数字都是这样。这些数字都是波罗密书写体。

刚才已提到，在印度，零在碑文中出现最早是在九世纪后期[①]，但在印度支那与东南亚其他国家发现的却比它早二百年。这个事实可能具有很大的意义。关于印度位值制的古老程度，经籍的证据与碑文是相矛盾的。前者把位值制和零的概念[②]出现的年代定在公元500年之前，但这个说

① 参看后面第26页。

② 参看 W. E. Clark (1); Datta & Singh (1), vol. 1, pp. 75 ff.。位值制与零的概念是两回事，尽管它们的关系非常密切。没有零的符号，位值制仍然可以存在，而且也确实存在过，例如在中国从周末以后便是这样。但是没有位制值，零号作为数码之一则从来没有存在过，而且也不可能产生。似乎可以说，在五世纪初，《泡利萨历数全书》(*Paulisa Siddhānta*) 的作者已经知道位值制，并能运用它了。到了圣使 (Aryabhata) 和彘日 (Varāha-Mihira) 的时代(公元500年)，则肯定是在运用了。并且这是早先中国的十进位制，而不是早先巴比伦的六十进位制。在比较古的印度文献中，干脆采用"空虚"(*Śūnya*) 一词，正好同中国筹算盘中的空位一致，这一点可能是十分有意义的。最早用于计算的零号是出现在巴克萨里手抄本中的圆点，但这种手抄本的年代不可能早于十世纪 [参看 Renou & Filliozat (1), vol. 2, pp. 175, 679; Cajori (2), pp. 85, 89; (3), p. 77]。关于圆点的应用，更好的证据出自六世纪的诗人苏班多 (Subandhu) 的诗《婆萨伐达塔》(*Vasavadattā*) [参看 Renou & Filliozat (1), p. 703]，这至今仍是最早的参考文献。这种圆点在克什米尔的萨拉达 (Śāradā) 文书中一直还在使用。

法由于印度史纪年含糊不清和文献年代难以考定，从来没有使人完全信服。凯伊［Kaye (1)］对有年代可查的碑文做了严格的考证，终于未能把位值制的最早年代推到八世纪以前。但柯提斯［Coedès (2)］曾指出，印度支那的碑文应用位值制要早得多，柬埔寨是在公元 604 年，占婆在 609 年，爪哇在 732 年。他们使用了一套“符号字”，这就是说，用事物的名字来表示大家公认与该事物有关联的数码①。例如，在柬埔寨巴彦山的 604 年的碑文中，塞迦纪元 526 年表示为“年 (5) 箭，(2) 阿斯维因斯 (Aśvins) 与 (6) 丝带”②。此后不久，便出现了第一批载有零的碑文（公元 683 年同时

---

① 即根据本书第二卷第十三章第四节第 (2)，(4) 小节所讨论的“符号相互关系”的规则。鉴于在中国人的思想中符号相互关系也占主导地位，我们不能不认为，他们未曾采用过这样的记数法，是相当令人惊奇的。不过，用来表示 5 的符号字未免过多了。史密斯和卡平斯基［Smith & Karpinski (1), p. 38］曾讨论过这些字，并注意到比鲁尼 (al-Bīrūnī) 在他的论印度的著作中所列的表。参阅 Datta & Singh (1), vol. 1, p. 54; Renou & Filliozat (1), vol. 2, pp. 182, 708。

② 在原文中，这些数字的次序是倒过来的，即同通常用文字代替数码的时候一样。

在柬埔寨和苏门答腊出现，公元686年在班卡岛出现)。塞迦605年表示为៦·៥，用的是一个圆点，608年表示为៦○៨，用的是近代的零号[①]。印度数字一无零号，二受代表十的倍数的各个独立的记号所累，因此与希腊和希伯来的字母记数法相比，是毫无进步的。但是乍看起来，这样一个具有根本的解放意义的革命性发现似乎不太可能发源于印度之那。

柯提斯不相信东南亚的碑文能够表明符号字系统起源于东亚(凯伊曾暗示过这是可能的)，而相信当东南亚的印度移民第一次来到这里的时候，已经有了符号字和古老的数字，无论如何，至少在不久以后跟着来的移民就有这个系统了[②]。尽管

① 这些年份的准确性取决于至今仍未确定的塞迦纪年开始的真实时间；参看 Tarn (1), p. 352; van Lohuizen de Leeuw (1); Thomas (1)。如果像上面对其他年代所作的假定那样，采用公元78年这个最普遍的估计作为塞迦纪元，那末，第一个零号出现的年代为公元686年；如果塞迦纪年始于128年，则零号产生于736年。后者比《开元占经》晚一些。当然，两者也可能同出一源。

② 这无疑是与笈多型或伐拉彼型(从公元四世纪到七世纪)有连系的数码。笈多型或伐拉彼型数字都包含代表10的各个倍数的记号。关于印度与东南亚的大交流，可参看 Grousset (1), Wales (1)。

如此，我们仍然可以自由地来考虑这样一种可能性(哪怕只是或然性):书写的零号及它所带来的比较可靠的计算法起源于印度文化区的东部，这里与中国文化区的南部接壤①。那末，它在这个交界地区会受到中国会意文字的怎样的刺激呢？它会不会是把中国筹算盘上给零留着的空位换成一个空圆圈呢？关键在于，中国远在《孙子算经》(三世纪末）出现以前就已有了一个基本上是十进制的位值体系②。因此，道家神秘主义③的“元”，对于发

① 拉廷 [Lattin (2)] 在总结了巴布诺夫 (Bubnov) 的研究之后，断定希腊的计算者也用空位表示零，这是很有意思的，但是，我们认为他的证据缺乏说服力。

② 写出位值名称的作法在中国历史上是始终一贯的。我们见到的略去数位名称的最早例子出在十四世纪的《丁巨算法》(第十九页正面)。如果这不是偶然的事，那就可能是受到阿拉伯的影响。当然，《开元占经》(718 年) 曾叙述过类似的印度表示数字的方法，但它的影响很小，甚至完全没有影响。另一方面，在货币上略去数位名称却是一种很古的作法。例如，周代的刀币就是如此(《古泉汇》元集，卷七第二页反面起；亨集，卷八第六页反面起)。

③ 后面(第104页)我将提到，后来有迹象表明，道家的“元”在中国人的心目中的确与抽象的数学运算有关。还有，像“一”应不应视为一个数字[参阅 Smith (1), vol. 2, p. 26] 这种哲学意味大于数学意味的问题，在中国也同样出现，就象在西方一样。所罗门 [Solomon (1)] 曾考虑过这个问题的各种各样的答案。参考莱布尼茨 (Leibniz) 关于世界由一与零(根据二进位算术)构成的概念[参看本书第二卷第十三章第七节第 (2) 小节]。

明 *Sunya*[1]（即零[2]）的记号所作的贡献，可能并不下于印度哲学的"空"。事实上，最早出现零号的场合是在中印文化区交界处记有年代的碑文中发现的这一点，似乎很难说是一种偶合。

过去人们[3]并未充分认识到零号以多快的速度传到中国。《开元占经》中曾提到零号，这部书是瞿昙悉达在718—729年间编纂的一部天文学和占星学概论。书中[4]谈到九执历[5]（718年）的部分有一节介绍印度的计算方法。作者在讲完从一到九的全部数码可以用草书一笔写成以后，接着说：

> 当九个数当中的这个数或那个数用来表示10的一个倍数时，它就进入个位之前的那

① 即阿拉伯语 al-sifr，拜占廷语 tziphra，法语 chiffre，英语 cipher。cypher 一词的意义是一个号码，它来自阿拉伯语 sifr（原意是一本书）。

② 这里可以提一提，爱尔兰人在解释怎样铸造铁锅时，是这样说的："弄一个洞，再把铁汁从它周围倒入"。

③ 这是指西方。参看钱宝琮（1），第95页；李俨（1），第96页；Mikami（1），p. 59；薮内清（1）；yabuuchi（1）。

④ 《开元占经》卷一〇四第一页反面。

⑤ 这是饶日（505年左右著称）的九曜（九个行星）历的改编；参看钱宝琮（1），第94页；薮内清（1）；yabuuchi（1）。

一行。不管哪一行有空位，都要在那里放一个点。[①]

〈九数至十，进入前位。每空位处恒安一点。〉

这就是我们在比它早不到半个世纪的柬埔寨碑文中所见到的那种点。

随之产生的问题是：中国人究竟何时在书写数字方面采用十进位制？在他们的书写语言中对十的倍数（百和千等）有过不含位值成分的符号吗？显然没有。在商代，就我们追溯所及，我们发现象“547 日”[②] 这样的数字，在卜骨上写成五百四旬七日，亦即五百(加上)四个十日(加上)七日[③]。这是公元前十三世纪的事[④]。这个时期所使用的真实符号已收在表 23 中[⑤]。从表中所写的直接取自甲骨文的例子 162 和 656，立即可以看到位值成

① 由作者译成英文。

② 这个数字的意义见本书第四卷第 278 页。

③ 参看董作宾(1)，下编卷四第四页反面，第五页正面，年代见上编卷一第二页起。

④ 更早的时候，“加上”是用“有”这个字明文表示出的。

⑤ 我们再次感谢吴世昌，他从郭沫若和其他人关于商代文字的著作中为我们提供了这个表。表 23 中同时列出青铜器铭文中的书写体。

分的意义。前面提到的那个数字也表示为百三七十日，其中的位值由代表百的符号百和分别代表十日的符号七及代表单日的符号日表示出来①。从表23可以看到，在这样早的年代里，已经没有一个（大于49的）数字的符号不是明确地显示出它们的十进位制的。例如，和罗马的L或希腊的ν'不同，中国古代表示50的符号，是在数字五的上面顶着一个表示十的位值成分。这个成分是非常短的一竖，百位的成分是一个“松果”，而千位的成分是一个人。同时也要注意到，50和15是如何通过图形内的位置关系清楚地互相区别的。这样，任何数字都可以立即在棋盘式的筹算盘中找到它的位置，留下的空格就表示零。罗马人采用的累积法，即用CCC表示300；而商代的中国人（比罗马人早一千年）则已写出了与3C等价的形式，即一种适于位值制计算的写法。这种写法的确比较好，因为“C”本身并不是一个数字。在10的倍数

① 这是历法上的一种专门写法。有趣的是，当个和十用附加的符号表示的时候，位值成分就可以从数字本身中略去。这里举出的例子尤为动人，因为40是直接由数字4表示，而不是堆砌成另一个符号。

的记号当中，只有倍数较低的几个（20，30，40）遵循累积制，写成若干竖并用横线连在一起。这些符号的变体(廿，卅，卌)一直沿用至今，但在数学著作中是完全不用的，在一般文献中也不常用(诗歌与页码除外)①。奇怪的是，在那些用字母来记数的地方(如印度、以色列、希腊和罗马)，总是强烈地倾向于把字母用完，而不仅仅用到 9，可是，在用会意符号的地方，情况就不同了②。

因此，总的说来，商代的数字系统是比古巴比伦和古埃及同一时代的字体更为先进、更为科学的。这三个记数体系都是每升高一位数，就开始

① 劳榦（1）曾举出这些字应用在汉简军事记录中的例子。可以看到，这些字始终是像单音节词那样发音的。对它们的分析表明，它们不是几个十字的累积，而是由一个数字与一个十字合并而成的 [Karlgren（16）]。例如，(古代的发音) ńźi（2）加上 źįep（10）就成了 ńźįep（20），后一个音 ńźiep 目前在广东话中仍然保存着。因此，这些字的形成从图形来看虽然是累积的，但显然应看成一个数字和一个公共倍数的组合，如果不把后者看作位值成分的话。此外，自古以来数字 1 的发音是 įět，上面各字的最末一个子音 P 也许与数位 10 有联系。这样，20（ńźįep）应该是由 ńźi 加上 P 组成的，而 30（sáp）则是由 sâm 加上 P 组成的。无论怎样，总是有一个数字合并在里面。

② 这一点是普赖斯博士首先向我们提出的。

使用一个新的记号。但是，这里有一个例外，这就是前面已经说过的，中国人总是重复用最初的9个数字加上位值成分来构成更高的位，而这些位值成分本身并不是数码①。在古巴比伦的记数法

表 23 的说明

1. 鉴于20，30，40的符号脱离位值原则，所以发现这些铸在钱币上的不同字体是值得注意的。表23所列货币体数字采自前面已提到的周钱(《古泉汇》，元集卷八第十七页反面；亨集卷八第六页正面；卷九第九页反面，第十页正面)。关于这一点，顾炎武在论及一件青铜器的铭文时曾附带提到过(《日知录》卷二十一第七十五页)。这种脱离位值原则的堆砌字体之所以兴起，是因为把一横加在一竖的上面以表示十位的位值成分的办法，可能会和商代的数字七相混淆。因此，这个位值成分便和罗马的X号一样，成为一个数字了。

2. 当在六的顶上用一短竖作为十位的位值成分来构成60的符号时，古人觉得为了明确起见，有必要再加一短横。

---

① 例如，在1000的情形下，如果没有一横，单独用一个人的象形符号(见表23)，是不算数字的。这一点在任何其他古代文明国家中似乎是找不到的。例如，希腊的𐅄是50的符号，它由两个各有独立数值的符号相乘构成。另一方面，5000的符号 ϵ 中的短横与中国的办法是一致的，因为单独一个短横并不表示1000，然而，应用这个短横的只是由于希腊人已用完了他们的字母，并且这个原则并不是始终一致地用在10的所有乘方上的，因此它不是十分有用的。的确，商代以后，在中国文字记录中，当在百和

表 23　商代甲骨文与周代青铜器铭文中大于 10 的数字记法

	甲骨文体	货币体	青铜器体
11	厂　11月	历或　ㄱ	
12	𠂆	ㄱ	
13	𠂆	ㄱ	
14	大概相似，但找不到例子		
15	㐅		
20	U	丰	廿 U 廿
30	卅	丰	卅卅
40	卌	丰	卌卌
50	㐅		𠄡
56	㐅 ㄓ 介　（即五十又六；五十加六）		
60	𠆥		𠆥
88	)( )(		)(
90			𠃋
100	百		百
162	百 𠆥 二		
200	百		
209	百 ㄓ 九　（即二百又九，二百和九）		
300	百		
500	百		百
600			百
656	百 㐅 介　（即六百五十六；六百，五十，六） 这是以后三千年始终不变的形式		
1000	千		
3000	千		
4000	千		
5000	千		

当中，200以下主要是相加或累积法[①]，即和后来罗马的一样；并且两者都使用减法，例如19写成20－1，40写成50－10。但有时也用乘法，例如用10×100表示1000。只有在天文学家的六十进位制中[②]，由于使用了位值原则，才有较强的统一性，不过，像3600这样的数字仍然用专门的符号表示，并且减法的因素也没有排除掉。此外，小于60的数字仍然用"堆砌"的符号表示。古埃及也遵循累积制，同时也有一些用乘法的习惯[③]。因此，商代的中国人似乎是最先能够用9个数字来表示不管多大的数的。 他们造数时从来不用减法[④]。

由此可见，在西方后来所习见的"印度数字"的背后，位值制早已在中国存在了两千年。

千的前面是数字1的时候，经常就把它省略掉，特别是如果一百与一千是在更小的数字前面时，百和千可以独立地代表100和1000，这种表示法通常都为人们所理解。但在数学著作中，从来是不省略的。

① 参看 Cajori (3), vol. 1, pp. 2 ff.; van der Waerden (1)。

② 参看 Neugebauer (9), p. 15。

③ 参看 Cajori (3); Menninger (1); van der Waerden (1)。

④ 他们记数也不用乘法，百的符号"松果"并不是一个数字。

关于印度、阿拉伯数码从印度经过伊斯兰国家传到欧洲的过程，当然有大量文献可查，但这方面的讨论不在我们当前的计划之内。关于这方面的知识，较早阶段的可参考塞波克特（Severus Sebokht）在七世纪时所作的评论[1]。在史密斯和卡平斯基［Smith & Karpinski (1)］及卡约黎［Cajori (2)］的著作中可以了解到这种交流情况[2]。至于印度、阿拉伯数码的广泛意义，最新的研究大概是克罗伯（Kroeber）[3]的著作，克罗伯还联系到巴比伦与马雅独立发明零的事实。但是，这两者是极为不同的。前者从公元前300年左右开始[4]出现在塞琉西特的巴比伦楔形文字泥板上，它有很多种形式，如$\overset{\circ\!-\!\circ}{\circ}$号就是一种，后来还在希腊化国家和拜占廷的数学著作中继续使用[5]，有时

① 参看本书第一卷第495页。

② 关于这个问题，拉廷和布瓦耶［Lattin (2) & Boyer (2)］曾有过争论，但不能令人信服。

③ 参看 Kroeber (1), p. 469。

④ 甚至有可能是从公元前六世纪或七世纪开始的。参看 Neugebauer (9), pp. 13, 16, 20, 26 ff.; Cajori (3), p. 7。

⑤ 如果达塔和辛格［Datta & Singh (1), vol. 1. p. 76］关于平伽拉（Pingala）的《昌达苏多罗》（*Chandahsūtra*）——一部据说是公元前二百年左右的韵文著作——的讨论是正确的，那就有可能还包括印度著作在内。参阅 Renou & Filliozat (1), vol. 2, p. 104。

它甚至用我们熟悉的空圆圈来表示①。但是，这个零号仅仅表示表格中的空位，从不在计算中应用②。另一方面，马雅的零号则代表真正的零，是带有位值的③。但马雅的位值是不固定的，既不是十进制，也不是六十进制④。

留下的唯一问题是中国的"零"字的起源和历史。零字的古义是暴风雨末了的小雨滴或者是暴风雨过后留在物体上的雨滴。这就是零在《诗经》中的意义。后来这个字被引申作为"零头"⑤解(尤

---

① 参看 Neugebauer (9), pp. 11, 14; Cajori (3), p. 28。有些人 [如 van der Waerden (3), p. 56] 曾企图从这里找出印度零号的起源，但前面所提到的印度支那的证据无助于说明这样一个传播过程。

② 德拉库佩里 [de Lacouperie (4), p. xi] 注意到周代货币上偶而有"空圆圈"。例如，在《古泉汇》亨集卷五第七页反面和卷七第八页正面的刀币图案中，似乎已写出50这个数字。但这可能是"松果"的简化，如果是这样，它所代表的数字就是 500。如果这些符号是真正的零，那末，当时与巴比伦的关系就变为一个极有趣的问题了。

③ 参看 Cajori (3), p. 43。在马雅数字与中国数字之间，也有相互类似之处。

④ 这种位值制，从 1 到 19 以后是二十进位制，继续到 360 为止，但也可能到第四位 7200 为止。

⑤ 零字的这种用法直到十四世纪仍然保留着（参阅《丁巨算法》第十八页反面和第十九页正面；《明译天文书》卷中第三十三页反面和第四十二页反面。

其是当它与别的字连用时候，例如奇零），这或者指非整数部分，或者指如“一百又五”中的五。由此再变成利用这个字来表示105中的零，就是不难理解的事了。但是这种用法似乎很迟才出现①。要精确地断定它出现的时间，还需作专门的研究。虽然宋代代数学家已广泛地采用0号，但是我们可以说，在明代以前的任何数学著作中，我们从来没有见到用零字来代表零的用法，并且很容易找到一些用文字表达的、本来用得着零的数字。明显地拿零字这样用的最早著作是十六世纪末的《算法统宗》②（正好在耶稣会传教士来华以前），以后这种用法就可以广泛地找到了，例如，罗士琳的《算学比例汇通》（1818年）之类的著作以及一切同时代的著作都是这样。由于用文字表达数字的时候可以不用零字，所以，要解释为什么到了明代

① 以前曾用过其他文字表示零，这至少可追溯到唐代；参阅严敦杰（14），第10页。

② 关于这部著作的介绍，见后面第113页。这部著作中有表示1001的“一千零零一”这样的字样，所以，零字代表零是十分清楚的。但这种用法没有系统地坚持下去，后来，当有若干个零连续出现的时候，就往往不重复写出几个零字了。

会用起零字来，是有一些困难的。也许，零号从它在宋代最初通用时起，就已读作“零”字的音，而所以起用“零”这个旧字，不仅因为它早就具有“零头”(即零以后的几位数字)的意义，并且也因为0号形如一颗球状的雨滴①。

读到古代中国文献中的数字的时候，常常需要按照算筹记数法去了解才能清楚。例如，在《西游记》[十六世纪著名的小说，它的英译名是*Monkey*(《猴子》)]中，唐代的一个皇帝魂游地狱，那里的判官们在查阅他们所掌管的生死簿时，善意地在这个皇帝原先注定的在位年限上加了两划，便使他的寿命增加了20年②。这是一个由13到33的窜改，即把一一Ⅲ改为〓Ⅲ。由此可见，这里的数字必定是算筹数码，因为要窜改文字记数，通常要加三画③。又如，在天文学家束晳(公元280年前后)所写的一篇针对小官吏的十分生动的讽刺文章

① 这个见解是鲁桂珍博士提出的。

② 《西游记》第十一回。

③ 除非是用三十的缩写卅。魏莱[Waley (17), p. 106]可能没有注意到这一点，所以就在他的译文中把它窜改成三划，但是这个故事已由戴闻达[Duyvendak (20), p. 12]加以改正。

中，我们可以见到十进位制的妙用。在他的《劝农赋》中，我们找到这样一段话[①]：

一个地区所设置的官吏有许多种，他们的职责各不相同。但是，如果我们把这些低级行政管理职位研究一下，我们就会发现，再没有比劝农官这个职位更肥的缺了。对于整个乡村和乡村里的每一个人来说，劝农官的权力是至高无上的。当青幡[②]在空中飘扬的时候，偷懒和玩乐的现象就被禁绝了。土地税是按亩数来征收的，而税额的高低完全由他一个人决定，土地的肥瘠也由他一句话说了算。要得到他的青眼，就需要供奉佳肴，要得到他的支持，就必须送上美酒。一旦农作物收获结束，要开始征税的时候，他就召集乡村的社长，把各村落的族长叫来，开出花名册准备催征。于是，鸡和猪就源源地进入他的家中，美酒也一罈罈地抬进他的酒窖。这样，“一”就能够改变成“十”，“五”也可以缩减为“二”[③]。

① 《全上古三代秦汉三国六朝文》卷八十七《全晋文》。

② 这是劝农用的一种神秘的标帜。

③ 原文这句话的字面解释是：确定一（的位值）以使它变成十，并且钩掉（几画）而使五变为二。

我认为，这是因为热菜热肴搅乱了他的肚肠，
酒神堵塞了他的胃口的缘故。①

〈惟百里之置吏，各区别而异曹，攷治民之贱职，美莫当乎劝农。专一里之权，擅百家之势。及至青幡禁乎游惰，田赋度乎顷数，与夺在己，良薄决口。受饶在于肥脯，得力在于美酒。若场功毕，租输至，录社长，召闾师，條牒所领，注列名讳，则鸡豚争下，壶榼横至。遂乃定一以为十，拘五以为二。盖由热啖纡其腹，而杜康咥其胃。〉

不管束皙为什么在算术上说得不够严密，但有一点是十分清楚的：第一种情形是简单地把丨变为一，第二种情形可能是把区的╳拿掉而留下〓②，更可能是把𝍧中间的三划涂掉。

三、中国数学文献的几个主要里程碑

首先，我们想按照其他作者认为方便的办法，

① 译文采自 Yang Lien-Shêng (5), p. 134。

② 从按照《孙子算经》最后确定下来的记数制度来看，〓当然是指20，而不是指2，但束皙正好与孙子的大致活动年代同时。如果他所遵循的是一种正好相反的旧记数法，那末，前面说过的一和十的表示方法就要颠倒过来。但是，这里所说的一般原则并不受到影响。

考察一下多少世纪以来中国人在数学方面的最重要的著作。但是，如果说在叙述中提到的重要著作不到20种的话，读者也不应该认为，中国的数学文献就限于此。一代又一代的中国学者都为他们的所谓“算经”作过注释，并且每个世纪，都有新书增添到书目中去。1898年编的《古今算学丛书》仅在第三集中重印的著作就有73种①。李俨所发表的他个人的藏书目录[李俨(6)]，其中所列出的大约就有450种。1936年邓衍林与李俨出版了一份北京各图书馆中国数学著作联合目录②，其中包括一千多个书名。这些书有一部分是十七世纪的耶稣会传教士和后来的外国学者[如伟烈亚力、艾约瑟(Edkins)和狄考文(Mateer)等]译成汉文的欧洲书籍③。但是，这些资料的主要部分要不是成书于受到欧洲影响之前，就是由中国数学家在清代大体上独立地写成的。即使我们假定这大批文献对文艺复兴以后的近代数学没有作出任何

① 刘铎编。他所编的一部重要的中国数学书目[刘铎(2)]在同一年问世。

② 即《北平各图书馆所藏中国算学书联合目录》。

③ 其中不包括近代(即1900年以后)翻译的教科书。

贡献，我们也不能不郑重地认为，迄今所写出的数学史都几乎没有涉及如此大量的材料。还必须记住，宋代(十三世纪)以前的早期数学著作大部分已无可挽回地散佚了——我们只是从正史艺文志所载书目和其他著作的参考文献中得知这些著作。后面我们将有机会谈到一些这种散佚了的著作。还必须指出，甚至在我们现有的古书当中，也有一些是已经散佚了若干世纪，后来才从一些孤本或皇室收藏的善本中重印出来的。

数学经典著作的最早的版本大概是《算经十书》。这是官吏们在656年编定的教科书，第一次印刷于1084年，大部分内容在十五世纪被收入《永乐大典》中，但以后便成为稀有的书籍。这部书的总集后来被戴震重新发现，并在1794年以前编入《武英殿聚珍本丛书》中[①]。

(1) 从远古到三国(三世纪)

尽管人们通常认为《周髀算经》是最古的数学

① 参看本书第二卷第十七章第四节；Hummel(2), pp. 160, 699。它是用活字印刷的。

经典著作，但我们所能给与《周髀》的最早的确切年代却比《九章算术》晚二百年左右，关于后者，我们接着就要介绍。但是，正如后面(第四卷第196页)所示，我们有理由采用这种流传下来的次序优先介绍前者。《周髀算经》的书名虽然有几种译法，但我们采用的是 *The Arithmetical Classic of the Gnomon and the Circular Paths of Heaven*(关于表与天的圆道的算术经典)。这部书书名的第一个字往往被认为指的是周代，这是书中对话的假定发生时代，但是由于这个字也可以解释作“圆周”，又由于书中关于太阳在一年中各个不同时间的赤纬谈了很多，并且附有说明太阳位置移动的七衡图[1]（七个同心的赤纬圈），我们可以接受宋代李籍的观点，他在《周髀算经音义》中认为，“周”字是指“诸天运行的圆道”[2]。“髀”[3] 字的原始意义是股骨，因此有人认为它指的是骨制的算筹，但原文本身明确地说，髀的意义是一个“表”。虽然

---

① 参看本书第四卷第196页。

② 他的原话是“算日月周天行度”。“道”与“路”有一个特殊的意义，在后面(第四卷第195页)我们将另加讨论。

③ 根据李籍，“髀”的正确的发音应该是 pi。

这部书主要谈的是原始的天文计算，但它开头所讨论的是直角三角形的性质，以便按高度和距离的比例来进行地上的和天上的测量[1]。

《周髀算经》的年代是一个困难的问题。首先，虽然它名为周代的作品，但在《前汉书·艺文志》中只字也没有提到它；这只有三种解释：或者是在公元100年前后，它被认为是很不重要的著作，不值得一提（这是不太可信的），或者是它当时并不存在，或者是它当时不用现在这个书名。最后的一种解释似乎较近情理，实际上，《艺文志》所提到的十八种历法和二十二种天文著作全部早就散佚了，例如，《夏殷周鲁历》和《日月宿历》都是这样，这些著作可能包含现今《周髀算经》的一些资料。

由于《周髀算经》中征引了吕不韦的话（虽然这段引文与《吕氏春秋》原文有所不同。参看本书第四卷第59页），有人就认为，《周髀》的年代一定晚于公元前三世纪。但是这段引文很可能是汉初

① 即是“勾股测望”——用直角和直线或表和影子进行观测与丈量。

的编者加入的。另一方面，这部书不可能晚于第一个为它注释的赵君卿，赵的生活年代虽然并不清楚，但一般认为是在东汉末年前后(约公元三世纪)①。由于他引用了刘洪在178—183年间制订的《乾象历》，他在《周髀》上加注不可能早于公元180年。还有，蔡邕在他的佚著之一《表志》(133—192年)中引用过《周髀》②。毫无疑问，《周髀》也参与了汉代所特有的盖天说与浑天说③的论争中，因为赵君卿在他的序言中说过，张衡的《灵宪》④是浑天说的主要著作，而《周髀》是盖天说的主要著作。值得注意的是，王充在《论衡·说日》⑤中的一些论述与《周髀》非常相似。此外，它们与同一时期(公元85年)的《四分历》亦有密切相似之处⑥。钱宝琮(1)曾指出，刘歆的《三统历》

① 参看 Wang Ling, (2), vol. 2, p. 161。三上义夫［Mikami (1)］在提到赵君卿时，一贯把赵写作张。

② 《全上古三代秦汉三国六朝文》卷七十《全后汉文》。参看本书第四卷第91页。

③ 参看本书第四卷第91页。

④ 这部著作残存下来的只有几页，可在马国翰的《辑佚书》中找到。参看《玉函山房辑佚书》卷七十六第六十一页正面。

⑤ 即《论衡》卷三十二。

⑥ 参看 Nōda (1)。

(制于公元前 26 年)与《周髀》之间,《太初历》(公元前 104 年)与《周髀》之间,均有相似之处。因此,总的倾向是把《周髀》基本上看作汉代的著作。

关于这部著作最后写成的年代,可以毫无保留地接受上述这样的结论,但是书中的许多内容是很古的,尤其是比《九章算术》还要古得多,所以,很难不认为它可以追溯到战国时期(公元前四世纪末)甚或更早的年代①。李俨所接受的就是这个观点,能田忠亮[Nōda (1)]和刘朝阳(3)也是这样。但是,现在已没有人支持像宋代鲍澣之或明代王子朱载堉所宣扬的那种传统的估计(这种估计曾被毕瓯这样的欧洲汉学家所传播,并被

① 后面(第四卷第 195 页)所提出的天文学方面的证据相当有力地说明,《周髀》中最古老的部分可以上溯到孔丘的时代(公元前六世纪末)或他的前一代。这部著作中关于天文学的内容含有许多与古巴比伦天文学十分相似的特征,正如我们从艾亚、阿努、恩利尔组泥板(公元前十四世纪到公元前十世纪)和穆尔、阿宾组泥板(公元前九世纪到公元前八世纪)所了解到的那样。我们还将看到,《周髀》被认为是代表各宇宙论学派中最古老的一派的。

载入数学史册[①],一直流传到今天),即认为《周髀》留给我们的是"公元前1100年的一部完美的数学记录"。

后来《周髀》的著名注释者有甄鸾和信都芳(约565年)、李淳风(七世纪)和宋代和李藉等。毕瓯[E. Biot (4)]翻译了它的全部[②],而瓦卡[Vacca (4)]则翻译了它的一部分。

这部古代著作可简短介绍如下。第一部分(我们可把它称作Ia)是周公[③]同一个名叫商高的人物关于直角三角形性质的对话,在对话中提出了毕达哥拉斯定理,但没有用欧几里得的方法加以证明[④]。对话的另一部分(Ib)谈的是表、圆和方

---

① 例如史密斯的著作[Smith (1)];我不能不遗憾地指出,三上义夫的著作[Mikami (1)]也是这样。在这一点上,1953年出版的最新的数学史也没有改进。参看Becker & Hofmann (1), p. 132; Struik (2), p. 34。

② 毕瓯的译文并不总是很可靠的,那是在一个世纪以前译出的。

③ 周公一向被认为是商代以后的圣人。

④ 我们现在不能像毕瓯那样肯定地说它"比毕达哥拉斯(公元前530年著称)早五、六个世纪",但也没有很多理由把它推迟,而且它也很可能是还要更早的。

的使用，以及高与远的测量。第二部分 IIa 是两个新的人物——陈子和荣方——的对话，他们继续谈论日影，时而估计在不同的纬度上日影的长度差，时而叙述用窥管测量太阳直径的方法[①]。另一部分 IIb 从不同底边的直角三角形图（日高图）开始。往后似乎有衍文，正如毕既所说的那样，陈子与荣方逐渐地消失，以"法曰"或"术曰"开始的段落越来越多。接下去那一部分 IIc 又是从图形开始，特别是前面已提到过的那个七衡图（七个赤纬圈的图[②]，北极星居于中心）。正是这部分援引了吕不韦的话。几页以后就到传统的上下卷的分界点了，虽然我们仍可把后面分成 IIIa IIIb[③] 和 IIIc 等部分，但它在风格上和 IIc 并无不同。下卷载列与太阳的周年运动有关的计算，提到利用水平仪来取得测量日影所需要的水平面，并列出一年中各个节气的日影长度表。下卷还讨论了从日出日落的观察来确定子午线的办法、恒星的中天、二

① 参看 Maspero (4), p. 273。

② 说明见本书第四卷第 20, 195 页。

③ 就在这里提到一种有趣的窥管仪器——璿玑。（参看第四卷第 388 页）。这段话在 IIIb 的开首（卷下第二页正面）。

十八宿[①]、十九年闰周以及其他天文学问题[②]。

关于《周髀算经》的数学内容（这是我们最感兴趣的方面）有什么可谈的呢？除了下面即将提到的直角三角形以外，首先是分数的一些应用，分数的乘法和除法以及公分母的求法。虽然开方的方法没有讲，但肯定是用到了的，例如，有一段说，“勾股各自乘，并而开方除之”，即是把标竿的高（“股”）与影子的长（“勾”）各乘上自己的数值，并将这两个平方相加（“并”）起来，然后取平方根（“开方除之”）[③]。这就是：

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

在别的地方，象5的平方根这样的算式，它的数值

① 参看本书第四卷第147页。

② 毕瓯［E. Biot (4), pp. 198, 623］根据原文中的数据，把极星定为小熊座α，从而算出原文所给出的北极距应该是公元247年的数值。从别的证据看来，这个年代是有道理的。然而，在他后来订正时所加的注里，他又为原文中与上述有关段落相邻的一段文字，推算出一个约在公元前1100年的年代；这个计算是以最靠近北极的恒星的位置为根据的，他假定这颗恒星是小熊座β，其位置则用窥管观测（见第四卷第203页）。但是，这些计算所用的数据可能是不够可靠的。

③ 《周髀算经》卷上，参看 Biot (4), p. 606。

是用最接近的整数加上“有奇”的字样来表示的。书中还有算术级数的概念，因为据说两个赤纬圈之间的距离是19833里，而二十四节气(参看第四卷第556页)的每一气，日中影长的增减都是9寸$9\frac{1}{6}$分。

直角三角形的讨论出现在书的开头，这是全书最古老的部分。由于它的浑朴古趣[①]，值得把它全文引用(见图50)。

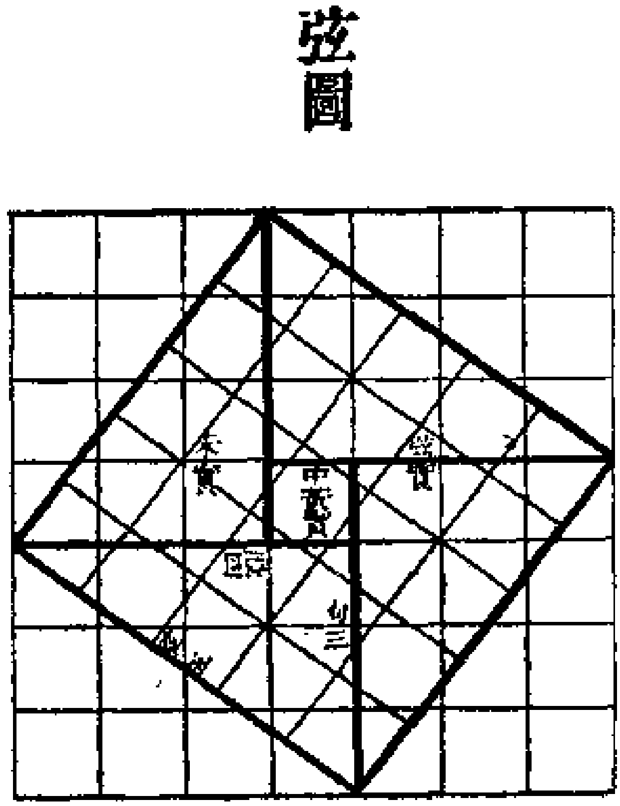


图50 《周髀算经》中对毕达哥拉斯定理的证明

① 分段的号码是伟烈亚力[Wylie(4)]编的。参看Mikami(16)。

（1）从前，周公问商高说："我听说，大夫(指商高)很精通数的艺术。是不是可请您谈谈，古代伏羲是怎样确定天球的度数的？天是没有一种梯子能登攀得上的，地也无法用尺子来测量。因此我很想问问您，这些数字是从哪里来的？"

〈昔者，周公问于商高曰："窃闻乎大夫善数也，请问古者包牺立周天历度。夫天不可阶而升，地不可得尺寸而度，请问数安从出？"〉

（2）商高回答说："数的艺术是从圆形和方形开始的。圆形出自方形①，而方形则出自矩形（字面上即指丁字尺或木工用的曲尺）。

〈商高曰："数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩。〉

（3）"矩形出自 9×9=81 这个事实（即乘法表或数的诸如此类的性质）②。

① 这部书的作者大概是想到圆的直径等于内接于圆的正方形的对角线；也可能是想到求 π 的穷竭法。

② 按照赵君卿的解释，在研究几何图形以前，必须先了解数的性质。应该注意，这与欧几里得的方法是根本不同的。在欧几里得的方法中，只要接受了基本公理与公设，实际的数值是可以不过问的。而在这里则非给出一个算术的正方形不可。

〈"矩出于九九八十一。〉

(4)"设把一个矩形沿对角线切开，让宽等于3单位，长等于4单位。这样，两个对角之间的对角线的长度就等于5单位。现在用这条对角线作为边长画一个正方形，再用几个同外面那个半矩形相似的半矩形把这个正方形围起来，形成一个方形盘。这样，外面那四个宽为3、长为4、对角线为5的半矩形，合在一起便构成两个矩形，总面积等于24；然后从方形盘的总面积49减去这24，便得到余数25。这种方法称为'积矩'①。

〈"故折矩以为勾广三，股修四，径隅五。既方其外，半之一矩，环而共盘。得成三四五，两矩共长二十有五，是谓积矩。〉

(5)"大禹所用的治天下的方法，就是从这些数字发展出来的。"

---

① 注意同一个"积"字，在别的古代著作中是当作积聚或凝结来解释的(第二卷第十章第二节等)。关于毕达哥拉斯定理的这个重要段落的译文，我们采用了阿诺德·科斯洛(Arnold Koslow)先生的解释。我们相信，《周髀》中写明的数字仅仅是作为三边长度的典型例子，这三边的每一边都有特定的专用名称。

〈故禹之所以治天下者，此数之所生也。”〉

应该记住，传说中的大禹是水利工程师和一切与堤防、灌溉、河工有关的人员的守护神。东汉（当时《周髀》已具有现存的形式）的碑铭证据告诉我们，在武梁祠壁的浮雕（公元140年）上，传说中的文化英雄伏羲和女娲是拿着规和矩的（参看本书第一卷第351页图28）。这里提到大禹，无疑是想指出，古代就已经需要测量术和应用数学了。

(6) 周公感叹说：“数这门艺术真是了不起啊！我想再请教应用直角三角形（字面上指丁字尺）的道理。”①

〈周公曰：“大哉言数。请问用矩之道？”〉

(7) 商高回答说：“使直角三角形平卧在地上，可以用绳子设计出平直的和方形的工程。把直角三角形竖立起来，可以测量高度。倒立的直角三角形可用来测量深浅，而平放的直角三角形则可用来测出距离。

〈商高曰：“平矩以正绳，偃矩以望高。覆矩以测深，卧矩以知远。〉

(8) “让直角三角形旋转（规），可以画出

---

① 毕瓯［Biot (4)］信从注释，把“矩”字译作“表”，这是强调与天文学的联系。根据原文的意思，这个字必须有多种译法。

圆形，把几个直角三角形合在一起，可以得到正方形和长方形。

〈“环矩以为圆，合矩以为方。〉

(9) “方形属于地，而圆形则属于天，所以天是圆的，而地则是方的①。方形的数是标准，从方形的数可以推出圆形的大小来②。

〈“方属地，圆属天，天圆地方。方数为典，以方为圆。〉

(10) “天像一个笠子。天的颜色是蓝的和黑的，地的颜色是黄的和红的。可以用一个按照天的数制成的圆盘来表示天，朝上的一面像外表面一样，是蓝色和黑色的；朝下的一面像内表面一样，是红色和黄色的。这就把天和地的形象再现出来了③。

〈“笠以写天。天青黑，地黄赤。天数之为笠也，青黑为表，丹黄为里，以象天地之位。〉

---

① 这句话的背后有许多臆想，如 3 是天的数，又是 π 的最近似的整数，它是阳数，而地的数 4 是阴数。

② 参看上面第(2)点。

③ 虽然这里说的是笠(不论它是什么)，但我不禁要怀疑它与地理先生的盘(式)有某种纠葛，这种式就有一块圆的和一块方的板。参看本书第二十六章第九节。

(11)“对地有所了解的人是聪明人，而对天有所了解的人则是圣人。知识出自直线[1]，而直线则出自直角[2]。因此，直角和数结合起来，就是指导和统治万物的东西”。

〈“是故知地者智，知天者圣。智出于勾，勾出于矩。夫矩之于数，其裁制万物，唯所为耳。”〉

(12)周公感慨地说：“这确实是太妙了！”[3]

〈周公曰：“善哉！”〉

没有必要对这些文字作进一步的解释了，但要强调一下一个似乎具有深刻意义的论点，这就是第(3)段所说的几何学产生于计量的论点。正如前面已经指出的，这似乎表明了自从远古以来中国人在数学工作中一贯具有算术、代数头脑，他们明显地不过问那种与具体数字无关的、单从某些基本假设出发得以证明的定理和命题组成的抽象几何学。对于他们来说，数可以是未知的，也

---

① 即影子。

② 或表。

③ 《周髀算经》卷上，由作者译成英文。参看 Wylie (4), Biot (4), Mikami (1)。

可以不是任何特定的数，但必须有数。在中国人的办法里，几何图形所起的是一种转换的媒介的作用，借以把数的关系推广为代数形式。

这里我们不想先提到后面代数学一节所要谈的内容，但想指出令人惊异的一点，即第一个注释者赵君卿一下子就开始进行毕达哥拉斯定理的代数研究。并牵涉到二次方程[①]。当然，这里用的不是与近代符号表示法相似的东西，他是用词句来表达的。其中那些最有意义的术语，我们将在后面(第215页)加以说明。

正如清代陈杰在《算法大成》中指出的，《周髀》的伟大在于它著于占星术与卜筮占支配地位的时期，而讨论天地现象却丝毫不带迷信的成分。

现在，我们来谈谈《九章算经》(一般称为《九章算术》)[②]。令人纳罕的是，虽然《九章算术》的

① 参看李俨(1)，第24页起；钱宝琮(1)，第28页起；Wang Ling (2), vol. 2, pp. 133j ff.。

② 尤什凯维奇教授告诉我们，有一种由贝雷兹金娜 (E. I. Berezkina) 译的完善的《九章算术》俄译本。我的一个合作者(王铃)正在从事这部书的英译工作。

内容比《周髀算经》远为完善与进步，但是，对前者所能推定的最早的明确年代却比后者为早。刘徽为《九章算术》作序是在公元260年以前，他提到一个当时可能是世代相传的说法，认为这部书最早是由西汉的张苍(公元前165年著称，卒于公元前142年)和耿寿昌[①](公元前75—49年著称)编辑和注释的。遗憾的是，在这两位学者的传记中都没有提到这部书。此外，《九章》与《周髀》一样，在公元100年前后完成的《前汉书·艺文志》中没有提到。但是，前面所说的理由在这里也同样适用：《九章算术》的内容可能包含在当时具有不同书名的某一著作中，致使我们现在辨认不出来。因此，正如张荫麟(3)所指出，在刘歆(公元前50年至公元20年)的《七略》[②]中没有提到《九章》，这个事实是不足为据的。这部书的全称最早出现

① 三上义夫对耿寿昌所用的拉丁拼音译法几乎无法和中文对上，但后来所有数学史家都袭用他的译名——Ching Ch'ou-Ch'ang。

② 这无疑是《汉书·艺文志》的基础。搜集后世书籍中的引文而成的《七略》辑本，见于马国翰的《玉函山房辑佚书》(卷六十四第二十九页正面)和洪颐煊的《经典集林》。

在 179 年的两个标准青铜量器[①]的铭文中。

《周礼》的注释是比较可靠的。保氏是负责王子们的教育的官员，在《保氏》一节中说[②]，在王子们必须学习的课业中有所谓《九数》。有些人[③]认为，九数可能是指乘法表，但第一个注《周礼》的郑众（公元 89 年著称，卒于 114 年），依据他的伟大继承者郑玄（127—200 年）的引证，曾列举了"九数"的名目，它们与我们现有的《九章》篇名几乎完全相同[④]。看来，在公元一世纪后半期，必定存在某种与《九章》今本非常相似的东西。它与张苍等汉初学者所熟悉的书有什么联系，那就说不清了。至于郑玄本人，他的传记告诉我们，他精通《九章算术》[⑤]，还说公元 180 年前后刘洪曾为《九章》作

---

① 参看容庚（2）卷三（拓本）第十二页正面和第十三页正面，（印本）第一页反面。这份参考资料是何四维（A. F. P Hulsewé）教授指出的。

② 《周礼》卷十三《地官保氏》。参看 Biot（1），vol. 1，pp. 298，299。

③ 例如刘操南（1）。

④ 张荫麟（3）曾分析了其中的细微差别，在这里不必再详述了。孙文青（1）对章名作过专门的研究。

⑤ 《后汉书》卷六十五第十二页正面。

了注释。祖冲之(五世纪末)[1] 也作了注，但刘徽的注释现在还有传本。

有一点是肯定的，就是比起《周髀》来，《九章算术》反映了进步得多的数学知识水平。如果把《周髀》的年代放在战国时期，则《九章算术》放在西汉是合乎情理的；如果认为《周髀》是在西汉，那末，《九章》一定是在公元一世纪。当然，这两部著作都不可能是突然出现的。也许最为妥善的办法是把《周髀》看作具有周代的骨架加上汉代的皮肉，而把《九章》看作秦和西汉的著作加上东汉的一些增补[2]。

《九章算术》可能是所有中国数学著作中影响最大的一部，它包含九章，共有 246 个问题。内容可以略述如下：

(1) 方田(土地测量)。这里有下列各种平面图形的正确的面积公式：直角三角形，梯形，三角

---

① 参看李俨(20)，第 66 页。

② 钱宝琮(1)和张荫麟(3)曾注意到，书中在叙述某些问题时所提到的官名是属于秦与汉初(公元前三世纪和公元前二世纪初)的，偶而还援引到公元前 203 年的税收制度。对各章著作年代的较充分的分析，可参看 Wang Ling (2), vol. 1, pp. 46 ff.。

形，圆 $\left(\frac{3}{4}d^2 \text{ 和 } \frac{1}{12}c^2\right.$，即把 π 当作 $\left.3\right)$[①]，弧形与环形；有分数加法、减法、乘法和除法的法则及分数的简化。其中弓形的面积取作 $\frac{1}{2}(c+s)s$[②]。

（2）粟米（小米和大米），百分法[③]和比例。这一章最后的九个问题宜于用不定方程处理，但书中没有这样做，而是根据比例关系推理求得答案的[④]。

（3）衰分（比例分配）。这讨论协作问题和三率法，其中包括比率问题，后者似乎应该是前一章

① 这里 d 是直径，c 是周长。

② 这里 c 是弓形的弦，s 是矢。这个公式后来在印度大雄（Mahāvīra）的《伽尼达萨罗沙格拉哈》（*Ganitasārasamgraha*, 850 年）中出现。关于这一点，可参看 Renou & Filliozat (1), vol. 2, p. 174。在赫伦（Heron，公元一世纪）的《全集》（*Opera*, vol. 3, pp. 73 ff., vol. 4, p. 357, vol. 5, p. 187）和二世纪希伯来人的著作《密西那哈米多特》（*Mishnāh ha Middot*）中也出现一个类似的、较为精密但较为复杂的公式[参看 Gandz (5)]。

③ 在《政事论》[*Arthásāstra*, 参看 Datta (1)] 中也有这些数学问题，这部著作现在被认为完成于三世纪[参看 Kalyanov (1)]。

④ 参见三上义夫 (1)，第 24 页；Wang Ling (2), vol. 1, pp. 187 ff.；关于这些方程，见后面第 268 页。

的内容；与此相反，前一章的后九个问题则应属于这一章。衰分章包括质量不一的货物的税收问题，还有算术级数和几何级数方面的其他问题。所有这些都是用比例法解决的①。

(4) 少广(减少宽度)。这处理当图形面积及一边长度已知时求其他边长的问题。在这一章中有许多求平方根和立方根的问题。前一种过程自然地导致第(9)章的二次方程。

(5) 商功(工程审议)。这里讨论立体图形(棱柱、圆柱、棱锥、圆锥、圆台、四面体、楔形等)② 体积的测量和计算，所考虑的有墙、城墙、堤防、水道和河流。三上义夫(1)认为，最初，体积可能是靠制作模型、经过试验确定的。

(6) 均输(字面上指公平的征税)。这里处理行程③ 和合理解决征税的问题，尤其是与人民从

① 参看 Wang Ling (2)。

② 库利奇 (Coolidge) 特别欣赏其中对斜截面三角柱体的处理，其公式相当于 $\frac{(b_1+b_2+b_3)dl}{6}$，这里 b_1, b_2, b_3 是楔形体的三个宽度，d 是深，l 是长。这个公式通常被认为是勒让德 (Legendre, Prop. 20, Bk. 6) 导出的，不见于欧几里得的著作。

③ 这些问题在西方出现要晚得多[参看 Smith (1), vol. 2, p. 546]。公元 780 年前后，约克郡的阿尔克温 (Alcuin of York) 在他的难题集中举出了一些。

本城运送谷物到京城交税所需的时间有关的问题。这里还有一些与按人口征税有关的问题。

(7) 盈不足或盈朒(过剩与不足)。这两个词是用于满月与新月的，表示“太多或太少”的状态。这一章专门说明中国人在代数学上的一个发明——假设法(参看后面第264页)，主要用于解 $ax = b$ 型的方程。

(8) 方程(列表计算的方法)。后来，方程变成一切等式的称呼了。这大概是因汉代和汉代以后等式的写法是把各个量排成一个矩形的纵列表。这一章研究联立线性方程，用到正数和负数。这是在人类文明中最早出现负量的概念[①]。这一章最后牵涉到四个方程和五个未知数的问题，这是不定方程的前身。

(9) 勾股(直角三角形)。这里用代数方法深入细致地论述了在《周髀算经》中已提出过的直角三角形的性质。这一章有24个问题，其中第二十

① 负数开始应用到二次方程大概是在祖冲之的时代(五世纪)，在刘益时代(十一世纪)肯定已普遍应用。参看后面第101，41页。

题有一个方程是

$$x^2 + (20 + 14)x - 2 \times 20 \times 1775 = 0,$$

虽然我们不能承认《九章》有史密斯和三上义夫所认为的那样古老，但是这个例题仍不能不算是很古老的。这一章有这样的一个问题："今有池，方一丈，葭生其中央，出水一尺，引葭赴岸，适与岸齐，问水深几何？"还有一支折断的竹子形成一个直角三角形的问题(图 51)。这些问题出现于后来的印度数学著作中[①]，并且传到了中世纪的欧洲。在这里已经谈到了相似直角三角形在高度和距离的测量上的重要性。

《九章算术》早期注释本的全部插图已散佚了好几个世纪，近代版本[②]的插图是清代学者重加的(见图 52)[③]。每一个问题通常以"今有"两字开始，解答之前用"答曰"两字，进一步的解释在"术曰"之下写明。所有这些都是算经的本文。接着

---

① 例如九世纪大雄的著作。参看 Smith & Mikami (1), p. 14。

② 例如李潢(1790 年著称)的《九章算术细草图说》。

③ 戴震所补的图是在殿本《九章算术》每一章的末尾，名为《九章算术订讹补图》。

是刘徽的小字注释(还有唐代李淳风的注,那是在小注中标明的)。 近代编者(例如李潢)所写的问题的解法,则用“草曰”两字开头,如果有插图需要


詳解九章算法

折抵地爲弦以句及股弦并求股故先令句自乘見矩
冪令如高而一凡爲高一丈爲股弦并之以除此冪得
差所得以減竹高而半其餘卽折者之高也此率與係
索之類更相返覆也亦可如上術令高自乘爲股弦并
冪去本自乘爲矩冪減之餘爲實倍高爲法則得折之
高數也

股弦和與勾求股法曰勾自乘爲實幷股弦較乘股弦
和如股弦和而一正除得股弦較以減股弦和餘二段

图 51　折竹问题(采自杨辉的《详解九章算法》,1261 年)

说明，他便加上"说曰"两字。

在以后整个中国历史中，人们代代相传地研究《九章》，各种各样的学者都参与其间。例如，如果我们读一下北魏数学家殷绍（430—460年著称）的传记①，我们就会发现他的老师包括隐士成公兴、和尚昙影和一个起了佛教法名的道士法穆。和尚在中国数学传统中的出现，很可能反映了中国与印度在学术上的接触。

除上述的著作外，肯定还有许多其他数学著作流行于汉代。不幸，这些著作后来都失传了。但我们知道其中某些著作的名称，例如《律历算法》，不过作者的姓名已无从考查。此外还有两部由西汉（公元前一世纪）两个数学家杜忠与许商所写的《算术》。研究这两部著作与现今在《九章算术》中出现的资料的关系，是很有意义的。这些古老的著作在《前汉书·艺文志》和《七略》的残篇中，至今仍有线索可查。

汉代徐岳的《数术记遗》是一部相当重要的著

① 《北史》卷八十九第五页反面。

作[1]，它的风格与前面所提到的著作完全不同。徐岳的姓名见于《晋书》[2]，他同刘洪[3]、高堂隆[4]、翰翊[5]讨论过历法，因此可以肯定，他在公元190年前后享有盛名。甄鸾（570年著称）曾给这部书作过注。《数术记遗》是本章所提到的著作中较接近于道教与占卜术的著作，面在甄鸾的注释中又有佛经的引文，这些事实使许多学者[6]把全部原文看成是后来的伪作，并认为大概是注释者本人所写的。然而，在徐岳的原文中根本没有提到佛教，除非认为在印度的"劫"的概念传入以前，中国人不会对大数发生兴趣。事实上，在徐岳的著作中，有一部分就讨论了这些大数，并把这些大数的名称按不同的涵义排成三个不同的数列（参看后面第191页）。另一部分是关于一个幻方的清楚的说明，

---

① 从数学史的观点看来，它并无多大意义，但是从其他理由出发，它仍是一部重要著作。

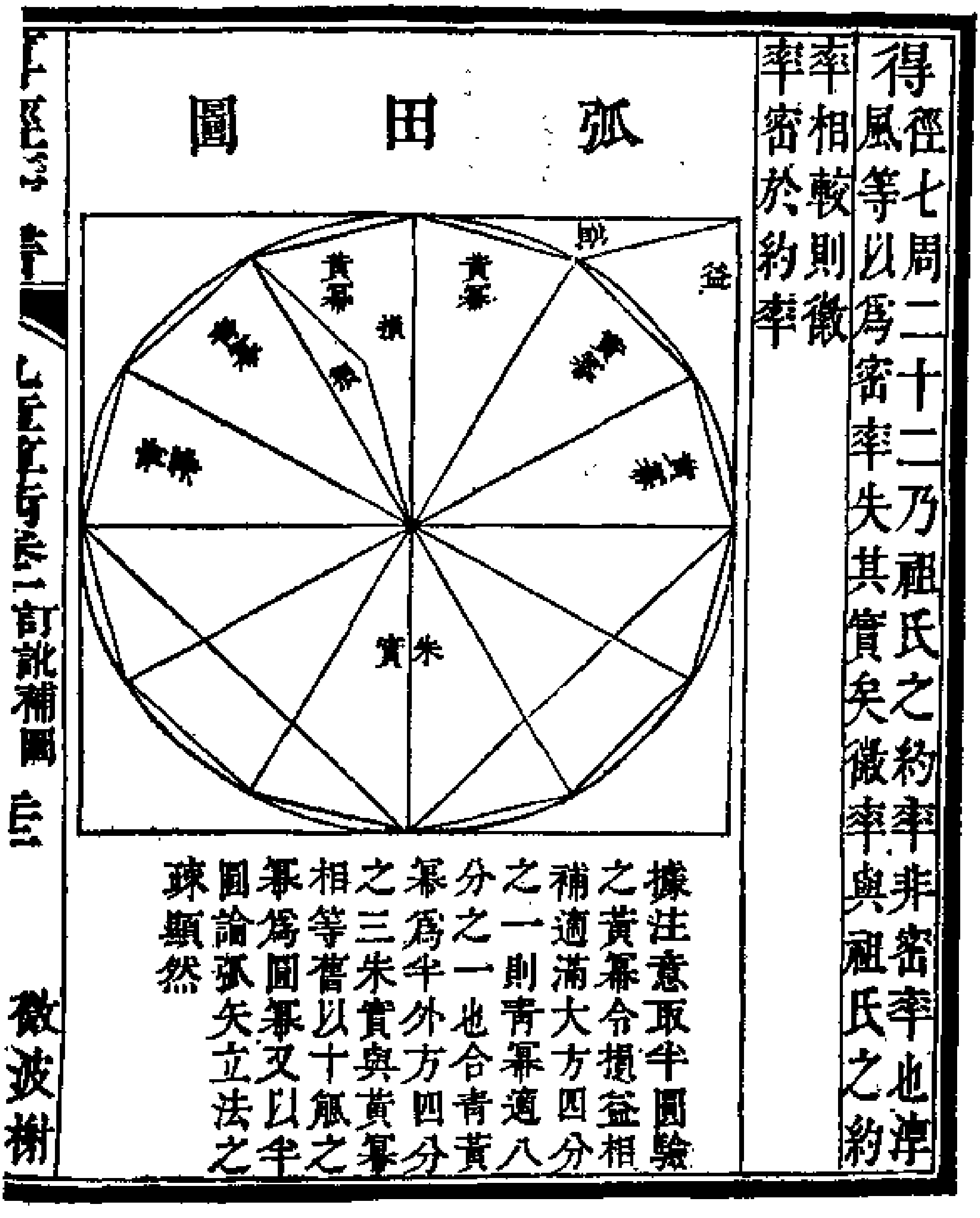
② 《晋书》卷十七《律历志》。

③ 刘洪，178—235年著称，他显然是徐岳的老师。

④ 高唐隆，213—235年著称，我们将在第二十七章第三节再次提到他。

⑤ 翰翊，223年著称。

⑥ 伟烈亚力［Wylie (1), p. 92］也同意这种意见。


得徑七周二十二乃祖氏之約率非密率也淳
風等以爲密率失其實矣徽率與祖氏之約
率相較則徽
率密於約率

弧田圖

黃冪
朱實

據注意取半圓驗
之黃冪令損益相
補適滿大方四分
之一則青冪適八
分之一也合青黃
冪爲半外方四分
之三朱實與黃冪
相等舊以十觚之
冪爲圓冪又以半
圓論弧矢立法之
疎顯然

微波榭

图 52 《九章算术》的戴震图解之一，它解释了
刘徽求 π 的近似值的穷竭法（264 年）

它成为数论中这一发现的最古的文字记载[①]之一。书中至少提到了四种算盘[②]，因此，它是谈到算盘的最古老的书籍。在徐岳的简要而隐晦的词句中提到的许多计算方法，似乎传自一个道士天目先生（可能是张陵），此外，书中涉及一些与五行、八卦有关的占卜方法，现在都不易理解。我们将在讨论磁罗盘的历史[③]时再提到这部书，不管它的问世年代能不能追溯到公元二世纪末，它对磁罗盘的问题都是有重要意义的。最后，书中还提到几项筹算制度。

刘徽的《九章》注释本，刚才已经提及，他的名字还同另一部重要著作《海岛算经》联系在一起，后者是公元263年三国时代在魏国出现的，篇幅不超过《九章算术》的一章，常附印在《九章》末尾，似乎作者确曾企图把它作为《九章算术》最后一章的扩充。这一章的另一个名称是"重差"，可以译为"二重差分法"，即相似直角三角形的性质。因此，

① 参看后面第128页。

② 参看后面第167页。

③ 参看本书第二十六章第九节。

它与《海岛算经》的内容有着十分清楚的关系①。全书的内容都是高度和距离的各种测量法，必要时，可用竖的测竿和与它垂直的横木当工具。这部书考虑了下列几种情况：(1) 从海上测量岛屿高度；(2) 测量山上树高；(3) 测量远处一个有城墙的城市的大小；(4) 测量涧谷深度（需要用矩尺）；(5) 从山上测量平地上塔的高度（图 53）；(6) 在地面测量远处河口的宽度；(7) 测量透明水池的深度②；(8) 从山上测量河的宽度；(9) 从山上测量城市的大小。不管在军事上或非军事上，这些测量的意义都是显而易见的。这部书的体裁和《九章算术》十分相似。它已有赫师慎的法文译本 [van Hèe (7, 8)]。

伟烈亚力 [Wylie (1)] 曾把这部书描述成“实用三角学中的九个问题”，但这是一种误解③。

---

① 唐代以前，《海岛算经》是以《九章重差图》的名称为世所知的。

② 这时要假定水底有一块白石清澈可见，并假定没有折射。

③ 许多历史学家附和了伟烈亚力的这种误解，例如，1953 年，斯特罗伊克 [Struik (2), p. 35] 就是这样，他还添上了一句话：“不能说没有西方的影响。”

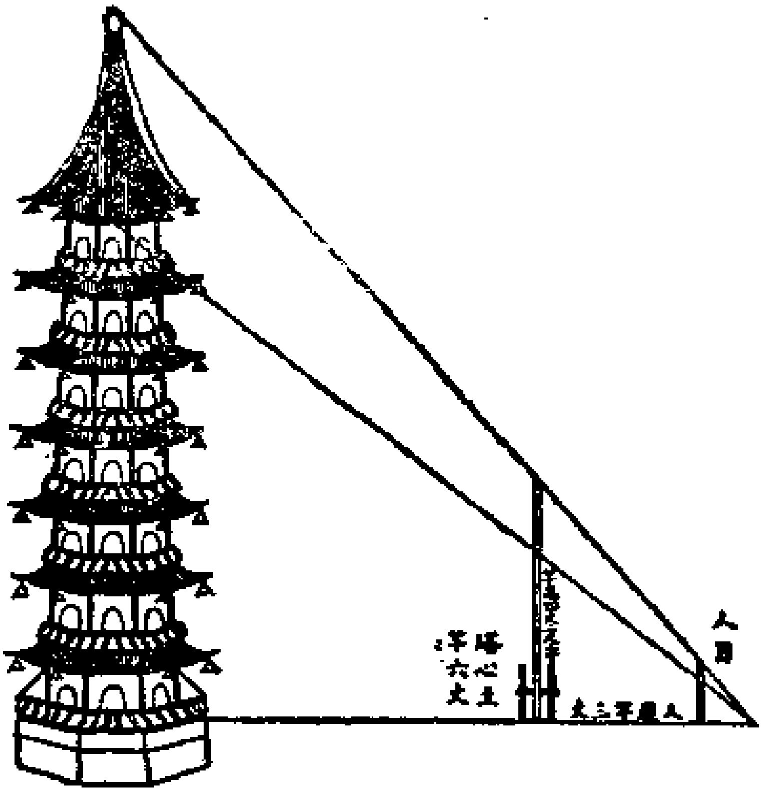


图 53　实用几何学;宝塔高度的测量,根据三世纪的刘徽在《海岛算经》中所作的解释(图采自秦九韶的《数书九章》)

虽然这部书与相似三角形有关，但它并不考虑角的性质(如正弦、余弦等)。

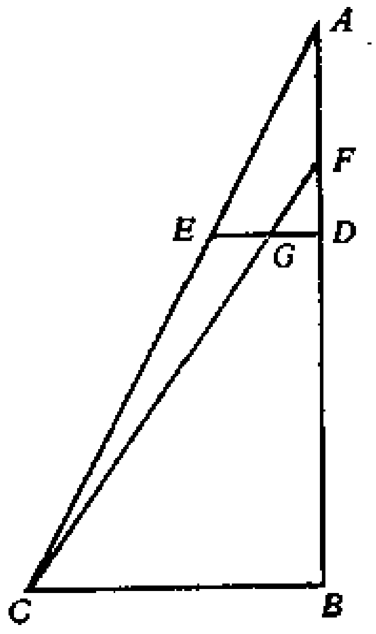
这部书自从唐代经李淳风加注以后，到宋末或元代，已变成罕见的书籍了，没有任何宋、元的版本流传下来。幸而有《永乐大典》(1403—1407年)的抄本，在十八世纪由戴震重新复原。包含《海岛算经》引文在内的那一卷《永乐大典》，目前保存在剑桥大学图书馆里，在这里我们重印出它

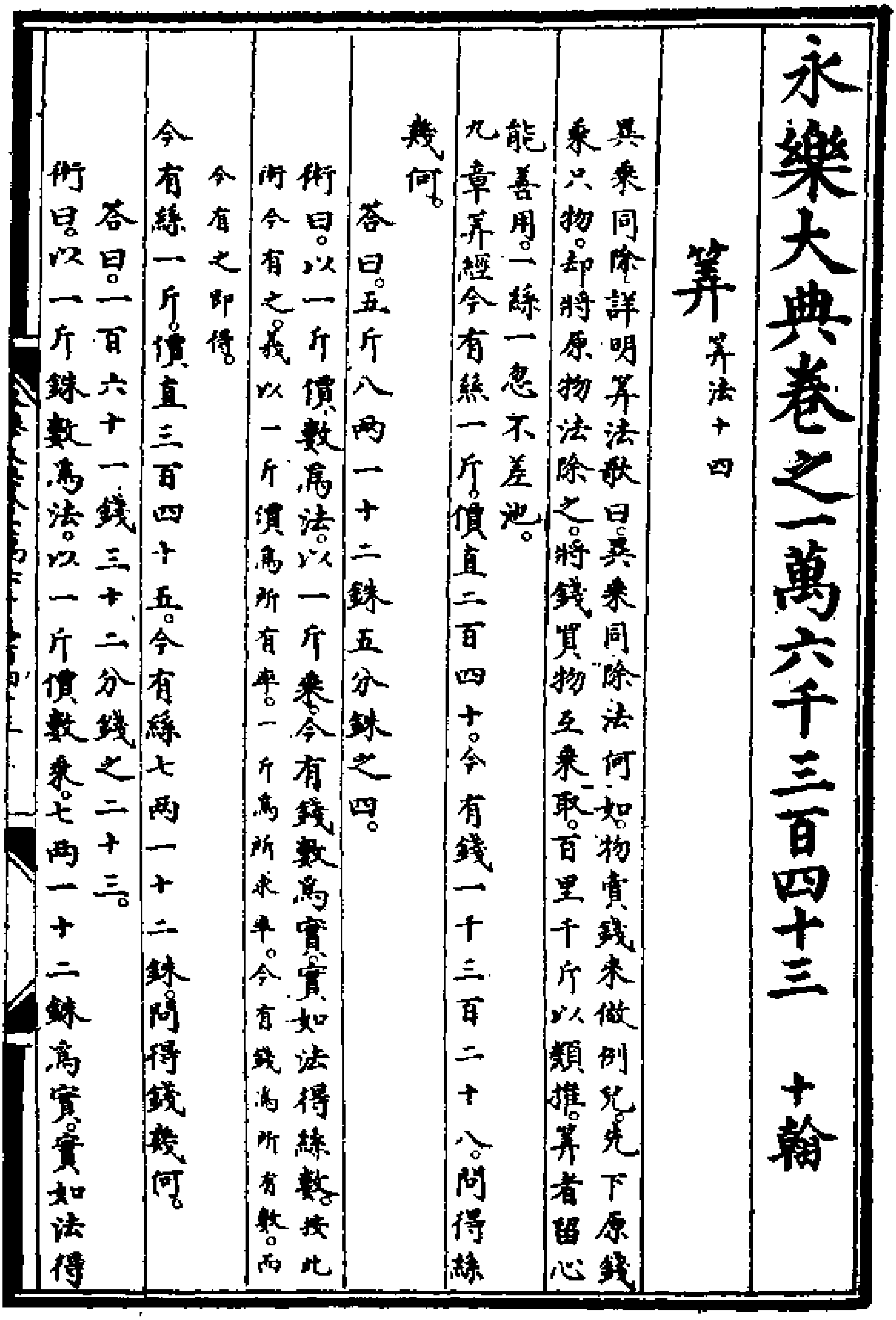
的第一页(见图54)。

三上义夫[Mikami (1)]察觉到，原著中所述的从相似直角三角形出发求未知数的计算方法，实质上是一种代数方法。例如，从山上测量城池大小的问题(见图)是用文字叙述解决的，答案相当于：

$$x=\frac{(d-b)c}{\frac{cd}{a}-b},\qquad y=\frac{\left(d-\frac{cd}{a}\right)b}{\frac{cd}{a}-b};$$

在这里，附图中的 $CB=x$，而 $BD=y$，$DE=a$，$DF=b$，$DG=c$，$DA=d$，A 和 F 是观察者的位置，E 和 D 是两根测杆，它们在人眼的高度上用一条绳子相连，C 和 B 是城墙的两端。当然，古代中国的计算者们从来没有想到要作这种代数学的概括，因为他们只是处理一些专门的应用问题而已。




永樂大典卷之一萬六千三百四十三　十翰

筭　筭法十四

異乘同除詳明筭法歌曰。異乘同除法何如。物賣錢來做例兒。先下原錢乘只物。卻將原物法除之。將錢買物互乘取。百里千斤以類推。筭者留心能善用。一絲一忽不差池。

九章筭經今有絲一斤。價直二百四十。今有錢一千三百二十八。問得絲幾何。

荅曰。五斤八兩一十二銖五分銖之四。

術曰。以一斤價數為法。以一斤乘今有錢數為實。實如法得絲數。按此術今有之義。以一斤價為所有率。一斤為所求率。今有錢為所有數。而今有之即得。

今有絲一斤。價直三百四十五。今有絲七兩一十二銖。問得錢幾何。

荅曰。一百六十一錢三十二分錢之二十三。

術曰。以一斤銖數為法。以一斤價數乘七兩一十二銖為實。實如法得

图 54　《永乐大典》(1407 年)抄本一卷(卷一六三四三)的首页。这一卷包含十四世纪的《详明算法》(可能是贾亨所作)的摘录、《九章算经》和《海岛算经》等书的摘录,保存在剑桥大学图书馆

(2) 从三国到宋初(十世纪)

在以后的几个世纪内，出现了六部有声望的著作，但近代学者不易定出它们的年代。其中最早的无疑是《孙子算经》。这部书与孙武——公元前六世纪的名将，《孙子兵法》的作者——毫无关系，它似乎是三国、晋或刘宋时期（即公元280—473年间）的著作。这部书中提到“佛书”，并提及长安与洛阳之间的距离，这些事实都使人无法把它的年代估计得太早①。另一部著作是《五曹算经》，它可能是晋末（四世纪）的著作。接着就是《夏侯阳算经》与《张邱建算经》。不幸，这两部书的作者的年代都已无从查考，人们只能说他们是在甄鸾以前。从某种意义上说，甄鸾是结束这个时期的人，他的活动期间肯定是在北周（560—580年）。他曾注释过夏侯阳与张邱建的著作。此外，张邱建一定比夏侯阳晚一些，因为他曾提起夏侯阳。

① 书中提及晋初的一种独特的税收法，年代比较早，但又提及度量衡的改革，年代则比较晚[参看 Wang Ling (2), vol. 2, p. 43]。

书中的内在证据表明，《张邱建算经》写于468年到486年之间[①]。《夏侯阳算经》提到425年标准容器的改变。因此，可以肯定夏侯阳与张邱建是生活在北魏。

我们已经说过《孙子算经》在筹算上的重要性。它是一部直接涉及乘除运算、求面积和体积、处理分数以及开平方和立方的著作。书的开头描述了当时所应用的度量衡体系，并附有简短的金属（金、银、铜、铅、铁）和玉石的比重表。《孙子算经》除了讨论其他题目以外，还给出了关于不定分析（一次同余式组）计算问题的一个最早的例子[②]。这是此书超过《九章算术》的主要点[③]，但它

① 参看 Wang Ling (2), vol. 2, p. 66。

② 参看后面第268页。

③ 我们是经过深思熟虑才称它为"最早的例子"的。不可否认，印度的数学家们也论及这个题目，但他们生活的年代都比孙子晚［例如，老圣使(Āryabhata)活动于476—510年；梵藏(Brahmagupta)活动于598—628年］。但迪克森［Dickson (1), vol. 2, p. 58］认为，杰拉萨的尼科马朱斯(Nicomachus of Gerasa，活动于公元90年前后，大概比同时代的王充年轻一些)提出了与孙子相同的问题(第23题)以及它的正确解答。在这里，迪克森犯了一个错误：这个问题在尼科马朱斯《数论入门》(*Introduction to Arithmetic*)的两个部分中都没有出现，它出现在奥什(Hoche)印刷版

本(pp. 148 ff.)的增补题中(第五题，但未为多奇、罗宾斯和卡平斯基[d'Ooge, Robbins & Karpinski (1)]的英译本所译出。这些增补题仅仅在塞金西斯(Cizensis)古抄本及其复制本中发现，也就是说，在尼科马朱斯著作现存的约50种抄本中，只有两三种包括这些增补题。这些古抄本本身的年代是十四世纪末或十五世纪初。不仅如此，这五个问题中有三个带有某个叫做伊萨克(Issac)的人的印记。奥什本人认为，这个伊萨克就是伊萨克修士或伊萨克·阿吉罗斯(Issac Argyros)，他是一个优秀的拜占廷数学家和天文学家，大概活动于十四世纪中叶[约1318—1372年；参看Sarton (1), vol. 3, p. 1511; Fabricius (1), vol. 11, pp. 126 ff.]。因此，事情似乎很清楚，这个不定分析题是中世纪末期的产物，不能上溯到尼科马朱斯本人。至于伊萨克是如何掌握这个问题的，那是另一回事，但由于梵藏所给出的例子具有完全不同的数据[参看 Colebrooke (2), p. 326]，它可以认为是从大陆上直接流传过去的。一个比较确实的不定分析的古代例子体现在著名的"牲畜问题"中，但人们把这个问题的提出归功于阿基米德(Archimedes, 公元前三世纪)，则是有些可疑的[参看 Archibald (2); Smith (1), vol. 2, pp. 453, 584; Heath (5), pp. 142 ff.]。丢番都(Diophantus)的一部佚著可能讨论过类似的问题，但丢番都本人的确实年代也无法肯定，很可能是在三世纪后半期，约与孙子同时。丢番都提到过许多二次不定方程，他曾用各种不同的方法近似地求解[参看 Heath (5), Gow (1), pp. 114 ff.]。代数学这个分支后来得到阿拉伯人的多方研究，例如，十一世纪的阿布·巴克尔·法拉吉(Abū Bakr al-Farajī)就是其中之一[参看 Woepcke (3)]。如果伊萨克·阿吉罗斯没有所提出过的问题与首先由孙子叙述与解决的问题并不完全相同的话，那末，可以认为他的东西全部是从阿拉伯人那里得来的。

对问题的解法没有作更清楚的说明①。

《五曹算经》一书②的名称表明，它是政府官员的一部初等手册，它是稍为有些落后的。书的第一卷(《田曹》)主要是讨论面积的求法，其中所给出的许多公式只需用到乘法和除法，这些公式或者是粗糙的近似，或者是完全错误的。其他部分(例如《兵曹》——军事，《集曹》、《仓曹》——谷物的储藏，《金曹》——交易，等等)也都没有超出乘法和除法的范围。

就现存的夏侯阳著作而论，它并没有多少更令人感兴趣的东西。它的内容是百分法和根的计算，以及一些普通的逻辑运算方法。它有些地方重犯了《五曹算经》的错误，例如，确定相连的两个全等梯形与一个不等边四边形的面积公式就是如

① 在《孙子算经》最后几个问题当中，有一个关于算命的问题(预言胎儿的性别)是很有趣的，它可能出自其他著作，被错误地塞入这部书中了。但是，那时的计算与算命确实是很难分开的。另一方面，书中的三头六臂的人和动物，很像是从印度的神殿引进来的。

② 史密斯[Smith (1), vol. 1, p. 141]曾把《孙子算经》与《五曹算经》混为一谈。贝克尔和霍夫曼[Becker & Hofmann (1)]在 1953 年重犯了这个错误。

此。但是，这部书似乎曾经唐代的韩延（公元780—804年）全部重写过①，原著可能会好些。赫师慎[van Hèe (11)]曾为《夏侯阳算经》写过一篇专题论文，他怀疑其中的某些分数名称来源于印度，例如，1/2称为中半，1/3称为少半，2/3称为太半，1/4称为弱半，等等，但这种论证是不能令人信服的。事实上，这些术语是漏壶的分度，在天文测量上也有相仿的术语（参看第四卷第222页）。太半与少半见于《九章算术》，其他名目在《后汉书》中也已经出现。

我们只有把这些书和同时代的欧洲及世界其他地方的书比较一下，才能把它们放在适当的位置上。例如，从史密斯[Smith (1)]等人的考证可以看出，由于欧洲把希腊的许多数学都忘掉，所以从三世纪到八世纪，只有印度才能和中国的数学知识媲美。

张邱建（公元500年前后）的著作，篇幅比《夏侯阳算经》和《五曹算经》长得多。他在序中说，乘除并不困难，但分数却是相当麻烦的。因此，他用

① 钱宝琮早就提出过这种怀疑[钱宝琮(1)，第51页]；后来李俨也同意了这一点[李俨(2)，第二版]。

相当多的篇幅处理分数的问题。张邱建给出近代分数除法——交叉相乘（《九章算术》就已经给出）[①]——的一些例子；这个法则印度人（例如九世纪的大雄）也是知道的，但后来失传了，直到1544年才为施蒂费尔（Stifel）重新发现[②]。张邱建的著作还提到各种测量问题（所用的方法是和《海岛算经》相同的相似直角三角形法），以及百分法、归谬法、联立一次方程、三率法和不定方程问题。在这部书中，有一些与纺织有关的、用算术级数表示的新问题已得到正确解决。书中还正确地解答了几何级数问题，用的是比例方法（和《九章算术》一样），而不是现在知道的普遍公式。此外，还有开平方和开立方。

甄鸾（公元570年前后）为早期的数学著作写了许多注释，他著有一部《五经算术》，但这部著作没有完整地留传下来[③]。有一个著名的不定分析

① 《九章算术·方田章》。

② 参看 Smith (1), vol. 2, p. 226。

③ 这是一般的说法，在《算经十书》的各种版本中，《五经算术》都是相当长的。《北史》卷八十九第十三页正面上信都芳（与甄鸾同时代，但略早一些）的传记中曾提到他抄录过一部《五经算事》，如果这是同一部书，那末，它的年代就要早一些。

问题和若干个古典的测量问题，已在他给徐岳著作所作的注释中出现了。他曾为北周制订了一个历法。在前面论述道教的部分[①]，我们曾提起过他，他后来由于改信佛教而攻击过道教。

在这个时期的佚书当中，最重要的大概是祖冲之（430—501 年）的《缀术》。这是一部很有名望的著作，被认为远比任何其他数学著作需要作更多的研究，但是很少人能够读懂它。这部书的内容大概与他对 π 值的极为精确的计算——这将在后面适当的地方（第 222 页）讨论——以及天文历法理论中的有限差分法有关。钱宝琮[②]曾提出一些相当深刻的论证来证明，祖冲之曾详细说明了分数求近似值的方法，并引入了两个新的方程：

$$x^2 - ax = k,$$

$$x^3 - ax^2 - bx = k.$$

关于《缀术》这部书的情况，我们主要是从《隋书》得知的[③]。在宋代，沈括也对它发生了兴趣，并在

① 参看本书第二卷第十章第九节第（4）小节。

② 参看钱宝琮（1），第 58 页。

③ 《隋书·律历志》卷十六。李俨［Li Nien（2）］和周清澍（1）都写过祖冲之的略传。

他的《梦溪笔谈》[1]中讨论过它。

祖冲之的这部书似乎是突破《九章算术》以后形成的中国数学著作比较静止的状态的主要著作。从三世纪到六世纪，大多数著作重犯了《九章算术》的错误，而对它的许多坚实的成就则没有增添什么新的东西。有趣的是，与政府机关有关的《五曹算经》是所有著作中最差的一种。除此以外，每个作者都作出一些特殊的贡献。在基本计算方法方面，《九章算术》所没有明确表达的，孙子都一一加以阐述，并用一个简单的问题开辟了一次同余式的新领域。夏侯阳比他的前人更为清楚地叙述了10的各次幂的性质，并在一个问题中抛弃了各小数位的特殊名称，从而十分接近于先进的小数概念。最后，张邱建第一个处理了真正的不定方程，并提出两个算术级数的公式；此外，他还巧妙地为《九章算术》的二次方程找到了新的应用。

在唐代（618—906年），数学又开始有了进步。前面所提到的那些最重要的早期著作这时被集合起来，作为科举考试的指定教程。这个时期的

① 《梦溪笔谈》卷八第六则。

算术书籍残本已在遗留下的敦煌手抄本书籍中发现[1]，并由李俨加以出版[2]。最长的一篇包含有一个完善的乘法表及一系列乘积之和[3]。七世纪初最重要的数学书是王孝通的《缉古算经》。

汉代的《九章算术》为了解决其中的一个问题，已经使用过一个二次数字方程[4]，这个方法是通过表示方程的专门术语[5]而显露出来的。后来在张邱建著作中，这个方程是用文字（与一个求积公式有关）代替特定的数字表成代数形式的。因此可以肯定，二次方程及其解法从后汉以来就已为人们所熟知了。但是，三次方程最早是在《缉古

① 在巴黎，这是国立图书馆伯希和收藏品 2490 号，2667 号，3349 号；在伦敦，则是大英博物馆斯坦因收藏品 19930 号，5779 号；O/N 42518 号，39813 号，39760 号。

② 李俨（7）；（4），第一集，第 123 页起。

③ 书名是《立成算经》，参见前面第 19 页和后面第 239 页。

④ 三上义夫［Mikami（1），p. 23］曾用近代记号正确地表示出这个公式，但他用来表达这个问题的文字二次方程，并不能表示出《九章算术》作者的原意。

⑤ 即"开方除之"，意思是"开平方根"，这句话暗示，这是在进行计算时必须遵循的一个标准程序。书中还提到"并出南门步数为从法"，这句话表明了在这个标准程序中所应选择的步骤。参看 Wang & Needham（1）。

算经》中发现的，这部书问世的年代肯定是在公元625年前后。像往常那样，这些方程是从工程师、建筑师和测量人员的实际需要产生的。例如，其中有这样一个问题：直角三角形两边的乘积是$706\frac{1}{50}$，其中斜边比另一边长$30\frac{9}{60}$，求三边边长。答案是从方程 $x^3+\frac{S}{2}x^2=\frac{P^2}{2S}$ 中得出的，这里P是两边的乘积，S是多出的数。其他问题是关于谷仓容积的。王孝通没有讨论更高次的方程。

我们在历史概述中①说过，到了隋代，无疑有相当数量的印度知识通过佛教徒传进中国。有一些冠以“婆罗门”字样的书籍是论述天文、历法和数学的②。不幸，所有这些著作后来已相继散佚，因此现在无法估量它们有何贡献。然而可以肯定，在七、八世纪期间，印度学者曾在中国京城的太史监工作。王孝通可能熟悉他们当中几个最先到来的

① 本书第一卷第274页。

② 必须注意，命名为《婆罗门算法》（参看本书第一卷第274页）的书不一定是数学书，它有可能是印度作者或印度知识的中国传播者讨论算命与占卜等问题的著作。参看李俨（2），第60页；Sarton (1), vol. 1, p. 450。

人，如迦叶孝威，他是在公元650年以后不久到达的，以一个历法改良者的面貌出现在那里，他以后的大多数印度继承者也是这样[①]。在这些继承者当中，最伟大的是瞿昙悉达，他成了太史监的长官，并于729年写成了《开元占经》，这是一部很重要的著作，我们经常会在别的地方提到它[②]。这些印度人似乎还带来了当时正在印度发展起来的三角学雏型[③]。这一切都再次表明，中世纪中国的数学与历法科学之间有着密切的联系。

数学与天文学的这种结合，可以在唐代最著名的数学家僧一行的一生中清楚地看到。一行在《畴人传》中所占的篇幅不下于三卷，比任何时代的其他学者都多，这主要是由于他对历法科学的贡献。在公元721—727年间，他奉诏制订一个历法，虽然这个历法和不定分析没有多大关系，却被称为《大衍历》（参看后面第269页）。遗憾的是，

① 参看《旧唐书》卷三十三第十七页正面。

② 参看前面第26页和本书第四卷第76页。

③ 参看薮内清(1)，第154页；Yabuuchi (1), p. 588。亦可参看后面第329页和第四卷第74页。《开元占经》中有一个正弦表。

他给我们留下来的记录实在太少了，不然，我们本来应该是可以从记录中了解到一行的数学成就的实质的[1]。他的著作后来全都散佚了。

公元855年郑处诲写的《明皇杂录》中，有一篇关于僧一行生活的记事。这里不妨引用其中的一段，为我们这严肃的篇章稍添生趣：

> 一行被皇帝召见以前，曾在嵩山普寂大师的门下学习。有一次，百里以内的和尚和沙门都到嵩山聚会。其中有一个名叫卢鸿的，是一个博学的隐士，人们请他写一篇文章来纪念这次盛会。卢鸿果然写了这篇文章，并在文中使用了一些很难懂的僻字。他宣称说，不管谁能读懂这篇文章，他都愿意收他作门生。这时，一行微笑着走到前面，把文章看了一会儿，便又放下了。卢鸿很不满意他这种漫不经心的态度。但是，当一行毫无错误地把文章背诵出来的时候，卢鸿完全信服了，他对普寂说："这个学生不是你教得了的，你最好是让他去游学。"

---

① 参看后面第269，308页和第四卷第73页。

一行由于一心想研究大衍（不定分析），便不远千里去寻访老师。后来，他来到国清寺的天文台，看到院子里有一棵古松，前面有流水。他屏息静静地站在那里，因为他听到里面有一个和尚正在用算筹进行数学运算。这时，里面的老和尚说："今天必定有一个人来找我学习算法。现在他应该已经在门外了。为什么没有人把他带进来呢？"说完，他又继续进行工作。但是过了一会儿，他又说："门前的水已汇合向西流，我的学生应该来了。"于是，一行便走了进去，跪在老和尚的面前。因此，老和尚便开始把各种计算方法和计算体系传授给一行，这样一来，门前的流水立即改变方向，转向东流了。①

〈(一行)师事普寂于嵩山。师尝设食于寺，大会群僧及沙门。居数百里者，皆如期而至，且聚千余人。时有卢鸿者，道高学富，隐于嵩山。因请鸿为文，赞叹其会。至日，鸿持其文至寺。其师授之，致于几案上。

① 《明皇杂录补遗》第二页正反面，由作者译成英文。

锺梵既作，鸿请普寂曰，某为文数千言，况其字僻而言怪，盍于群僧中选其聪悟者，鸿当亲为传授。乃令召一行。既至，伸纸微笑，止于一览，复致于几上。鸿轻其疏脱而窃怪之。俄而群僧会于堂，一行攘袂而进，抗音兴裁，一无遗忘。鸿惊愕久之，谓寂曰，非君所能教导也。当纵其游学。

一行因穷大衍。自此访求师资，不远数千里。尝至天台国清寺，见一院，古松数十步，门有流水。一行立于门屏间。闻院中僧于庭布算，其声簌簌，既而谓其徒曰："今日当有弟子求吾算法，已合到门，岂无人导达耶？"即除一算，又谓曰："门前水合却西流，弟子当至。"一行承言而入，稽首请法，尽授其术焉。而门水旧东流，忽改为西流矣。〉

这个迷人的故事说明了当时数学家相互传授知识的困难，也表明了科学上的发明和改进是多么容易和它们的作者一同湮没①。

前面已经提过的李淳风也是这个时期的人，他大概是整个中国历史上最伟大的数学著作注释

① 同书的另一个故事说明了一行与道士的密切关系，有一个道士曾把扬雄的《太玄经》（参看本书第二卷第十四章第一节）借给他，并和他进行了讨论。

家了。他的工作已由李俨加以描述[1]。但是，作为数学上一个有创造性的发现者来说，他是无法和王孝通媲美的。

(3) 宋、元、明时期

在李淳风等人与宋、元代数学时期(十三、十四世纪)的大人物之间,出现了几个重要的数学家。其中最令人感兴趣的是沈括，关于他的多方面的才能，我们已在前面历史概述中提到过[2]。他在1086年完成的《梦溪笔谈》不是一部正式的数学论著,它几乎包含当时已知的各个科学领域的记录，但其中许多是具有代数与几何意义的。特别值得提起的是，沈括作为一个在重要工程与勘察工作中负有责任的高级官员，曾促进了平面几何学的发展。正如阮元和告析［Gauchet (7)］所指出的，他确定圆弧长度的方法后来成为十三世纪郭守敬

① 参看李俨(2)，第40页起。亦可参看前面第62，68页。

② 参看本书第一卷第289页。他的名字在某些数学史中被音译作 Chōu Huo 以及其他连专门家也无法辨认的译名。

发展球面三角学的基础①。

在《梦溪笔谈》卷十八(第四则)中，沈括说：

> 我有另一种分割圆周的方法。取圆(圆田)的直径的二分之一，然后用这个半径作为直角三角形的斜边(弦)1)。取半径减去被割部分(矢)2)所得到的差作为三角形的第一边(股)。用斜边的平方减去第一边的平方，再把所得到的余数开平方，就得出第二边(勾)。第二边的两倍就是弓形区域(弧田)的弦3)。取被割部分(矢)的平方②，把结果乘二。再把所得到的结果除以直径，再加上弦，便得出弧长4)了。

---

① 参看后面第245页。胡道静(1)最近曾出了一部《梦溪笔谈》的评注本，钱君晔(1)则写了一篇沈括略传。

② 在这方面，我们遇到了一些文字的困难。这里我们主要是依靠三上义夫[Mikami (1)]，而不是告析[Gauchet (7)]。译文中大多数专门名词都是沈括原来用的字，但"矢"字除外。参看胡道静(1)，第二卷，第575页起。

1) 即图中的 r。——译者

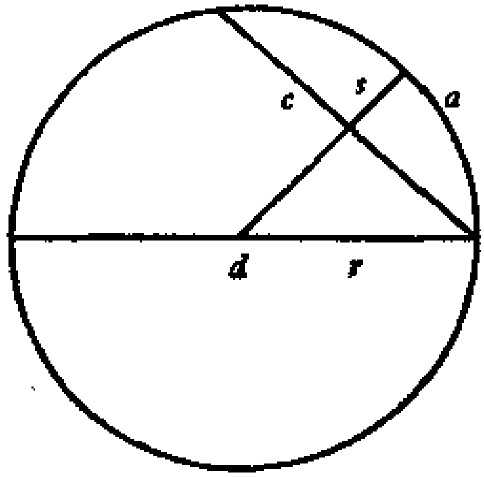
2) 即图中的 s。——译者

3) 即图中的 c。——译者

4) 即图中的 a。——译者

〈予别为"拆会"之术。置圆田，径半之以为弦。又以半径减去所割数，余者为股，各自乘，以股除弦，余者开方除为勾，倍之为割田之直径。以所割之数自乘，退一位倍之。又以圆径除，所得，加入直径，为割田之弧。〉

这相当于下列表式：



$$a = c + 2\frac{s^2}{d},$$

式中 a 是弧，c 是弦，s 是矢，d 是直径。这个方法称为弧矢割圆之法，即从弧矢来确定圆弧长度的方法。可以把这个公式和郭守敬的公式比较一下。郭守敬的公式是：

$$d^2\left(\frac{a}{2}\right)^2 - d^3s - (d^2 - ad)s^2 + s^4 = 0,$$

这个公式要精密得多，但它晚了两个世纪①。

沈括在他的著作(卷十八)中还有中国数学中最早的级数求和的例子，它是在于求一些垒成棱

① 参看钱宝琮(1)，第149页；van Hée (13)。沈括发展他的方法是由于他不满于《九章算术》所给出的粗糙的、不精密的弓形面积公式，这个公式是 $\frac{1}{2}(sc+s^2)$（参看后面第218页）。

台形状的酒坛的数目。从某些观点来看，这个例子是有重要意义的(参看后面第306，316页)。

印刷术开始于八世纪，到了九世纪，它已经用作传播经籍的工具了。尽管此时数学书籍似乎也有可能得到出版[①]，但我们所知道的最早的版本是1084年的《海岛算经》以及九部其他著作，张邱建的著作是在下一年印刷的。这些印刷版本当时分发给所有国家典藏图书的机构。1115年出现了一种重要的《九章算术》版本，应该记住，这时正是宋代王安石及其变法运动的时期。尤其值得注意的是，王安石的继承者蔡京（1108年）曾明确地说过[②]，必须鼓励科举考试中的算学研究。严敦杰(9)已查明了宋代数学家与当时纸币之间的关系。

下面我们只想提到宋、元时代最伟大的人物，但读者不要以为，在十二世纪到十四世纪期间，他们是孤立的。关于这个时期丰富的著作，李俨

---

① 参看 Carter (1), 2nd ed., p. 60。

② 参看《宋史》卷二十第八页正面和第九页反面；*TH*, p. 1608。亦可参阅李俨(21)，第4集，第238页那一节和第260页。

(1, 2) 已有所论述。这些著作有一部分列入流传至今的宋代书目中，例如尤袤的《遂初堂书目》[1]，其中列入数学部分的书目有 95 种。在这个时期的著作中，可以提出蔡元定的《大衍详说》(不定分析的解释)。蔡元定是研究《易经》的学者，对卦的排列与组合很感兴趣[2]。

不管这个事实是否重要，但宋代科学的主要贡献确是在后期(即公元 1200 年以后)作出的。事实上，最出色的工作是十三世纪后半期几个同时代人的著作。首先出现的是 1247 年秦九韶的《数书九章》，这部重要著作中的九个部分与汉代《九章算术》的分类并无关系。虽然我们不知道秦九韶的生卒年代[3]，但就我们所知[4]，可以断定他必然具有迷人的性格。在青年时期，他曾当过军

① 收入《说郛》卷二十八。

② 参看 Forke (9), p. 204。亦可参看本书第五卷第 599 页。

③ 按照萨顿 (Sarton) 的看法，秦九韶是“他的民族、他的时代以至一切时期的最伟大的数学家之一”。

④ 根据周密的《癸辛杂识续集》卷二第五页反面关于他的传记。

官[1]，在骑射和文学方面的成就都闻名一时。在恋爱方面，他的声誉同阿维森纳（Avicenna）不相上下。后来他升为两个州的太守。

1248年，秦九韶的著作问世之后仅一年，出现了一部同样重要的著作——李冶的《测圆海镜》。接着1259年，又出现了李冶的《益古演段》。李冶[2]（1178—1265年）是一个北方人，居住在金国；当他在任一个州的长官时，这个地方陷入宋人之手。他逃亡出来以后，便过着隐居生活，从事数学研究。1234年，蒙古人推翻金朝以后，元朝政府向他求教，后来多次给他荣誉，但他不再进入仕途。虽然秦九韶和李冶所应用的符号相同，并且他们的著作在许多方面是相互补充的，但是他们毫无可能相识，因为秦九韶住在南宋，而李冶则在金、元统治下的北方，在他们的一生中，这些国家之间的战事几乎是从不间断的[3]。

① 在这一点上，他与笛卡儿相似，但我们不知道他是否像法国的哲学家一样，参加军队是为了得到研究数学的空闲时间。

② 有人怀疑李冶是李治的印刷错误，因为两者在写法上十分类似。但缪钺（1）已指出，他最初的名字是李治，后来发现这个名字与唐朝一个皇帝的名字相同，因此中年改名李冶。

③ 参看本书第一卷第292页。关于战争在中国和日本数学史上可能起的作用，参见三上义夫（18）。

秦九韶和李冶的代数著作不久就为另一个天才数学家杨辉的著作所补充。杨辉的《详解九章算法纂类》出现在1261年。后来又由其他著作加以增广，合辑为《杨辉算法》，其中有一部完成于1275年。关于杨辉的生活，除了他是一个南方人以及生活在宋朝之外，我们实际上一无所知。杨辉没有提到秦九韶和李冶，但他提到了他的前辈刘益；不幸，关于刘益，也没有留下任何其他资料，但他肯定是一个代数学家。此外，杨辉没有用其他作者所喜欢用的天元术一词来称呼代数学。

最后出现的是这些人当中最伟大的朱世杰[①]，他的《算学启蒙》出现在1299年，接着，在1303年又出现了著名的《四元玉鉴》。朱世杰一生的境遇和他的生卒年代，我们不太清楚，他似乎是一个到处流浪的学者，靠教授数学来维持生活。他在序言中暗示，他的学问是继承元好问的。元好问是金朝的官员（1230年以前），他是李冶的朋友，并且曾为刘汝锴的早期代数著作《如积释锁》作过注（要不是这样，这部著作是没有人知道的）。因此，

① 萨顿认为，他也许是所有中世纪数学家当中最伟大的。

可以把中国人的天元代数学推到十二世纪，这正是伟大的新儒学时期。

正如萨顿所说的[①]，秦、李、杨、朱这四个人在半个世纪内相继出现，而又如此相互隔绝，实在是十分令人惊奇的。秦九韶完成了解方程的一套术语；李冶完成了另一套术语，不过，他们的总的体系是相同的。杨辉未引上述二家学说，却宗祟另二个数学家刘益与贾宪（关于刘益与贾宪，我们所知道的仅止于此）。朱世杰对他的三个前辈都没有征引（虽然有内在的证据表明他知道杨辉的工作），但显示出他受到同样并不著名的元好问和刘汝锴的影响[②]。“这一切都表明，关于中世纪的中国学派，我们的知识一直是十分贫乏的。我们只知道很少几部著作，并且对这些著作缺乏充分的

① 参看 Sarton (1), vol. 3, p. 138。

② 根据朱世杰著作的一篇序言来判断，他们只是一个很分散的学派的两个成员。这个学派包括蒋周；如果蒋周就是蒋舜元，那么，他早在1080年就写过一部《益古集》。此外，这个学派还包括撰《照胆》的李文一和撰《钤经》的石信道。我们还知道，李德载曾把地元引入天元代数学中，并写了一部《两仪群英集》。《乾坤括囊》的作者刘大鉴则引入了人元。所有这些著作都已散佚。

研究。"[1] 人们越来越强烈地感到，中国的大量的数学文献，仍有待进行有效的发掘[2]。

值得注意的另一点是宋与宋以前数学家之间社会地位的差别。唐代的李淳风和王孝通像刘宋的祖冲之一样，都身居高官；而在宋代，最伟大的数学家（除沈括外）大多数是流浪的平民或小官吏。此外，宋代数学家的注意力较少放在历法计算方面，而较多地放在一般人与技术专家都同样感兴趣的实际问题上。事实上，似乎可以指出，女真人的金朝和蒙古人的元朝帝国摆脱了官僚政治的约束，加上汉族学者当时在仕途中遭到种种障碍，这些都是促使这个时期中国数学达到高潮的主要解放因素。

秦九韶《数书九章》的第一部分讨论了不定分析（一次同余式）的问题，他称这个方法为"大衍求一"术。这是在于求这样一个数，当这个数被 m_1，m_2，m_3，…，m_n 除时，余数各为 r_1，r_2，r_3，…，r_n。

① 萨顿还补充说，至今还没有一部可用的宋代代数学著作的评注本，也没有一部经汉学家和数学家详加注释的译本。

② 关于宋代代数学家的背景，包括零的出现，严敦杰(6)有一篇新的重要论文。

正是在这里，首次出现了一个著名的成语“天元一”，这就是说，在运算中最重要的一步开始以前，要先把符号（1）置于算盘的左上角。这种叫法可能是为了把它同最后余数中的符号(1)区别开来。秦九韶曾提到这个方法在历法计算中的应用。

书的第二部分有复杂的面积和体积的计算。在秦九韶的著作中，第一次出现了高次方程(高达10次幂)的处理，以及各项正负号相杂的各种组合，它们与遥测圆城周径（图55）等问题有关。书中关于灌溉渠道的配置、石坝的建筑（图56）以及含有算术级数和一次联立方程①的财务问题等，都是十分有趣的。正如前面已提到的，零的应用在秦九韶的著作和以后的著作中已到处出现。正数与负数是用黑筹与赤筹来区别的②。秦九韶发展了古代解高次数字方程的方法，他的方法与1819年霍纳(Horner）重新发现的方法实质上是相同的③。在

① 按照史密斯［Smith (1), vol. 1, p. 270］的解释，秦九韶“对应用代数学知识去解决实际问题不感兴趣，他宁愿把它看作一门纯科学”。这种说法是难以理解的。

② 在秦九韶的著作以及所有后来的数学著作中，经常用拚合写法来书写数字，这是适合于汉字的直排法的。

③ 参看 Wang & Needham (1); Smith (1), vol. 2, p. 471; 并见本书后面第148页。

探讨一般方程时，让方程的一端等于零总是比较方便的，对于这一点，欧洲人直到十七世纪初才有所认识——这应归功于内皮尔(Napier，1594年)、布吉(Bürgi，1619年)或哈里奥特(Harriot，1621年)①。但是，秦九韶和他以后的所有宋、元代数学家都早已达到同样的成就，他们总是使常数项排

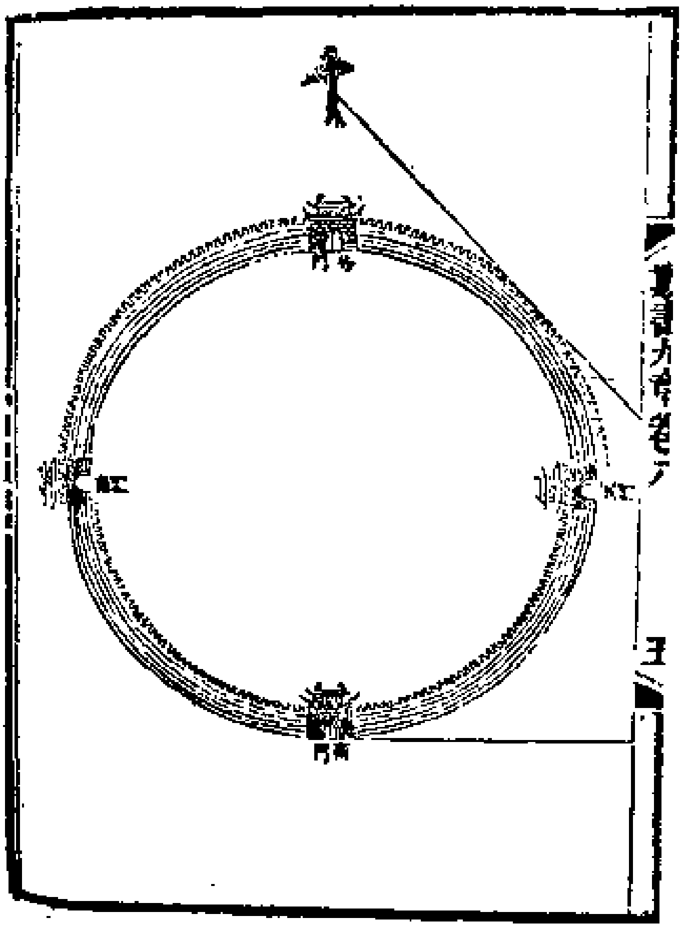


图 55　遥测圆城的周径
(《数书九章》，1247 年)

① 参看 Smith (1), vol. 2, p. 431。

成负项。

很自然，要在秦九韶著作中找到新儒学的痕迹是不困难的，在他的第一章中就有太阴、小阳等与五行有关的东西以及天元术的一个主要特色，即用“太”字作为已知数的符号①。关于这一点，我们将在后面第 291 页见到。

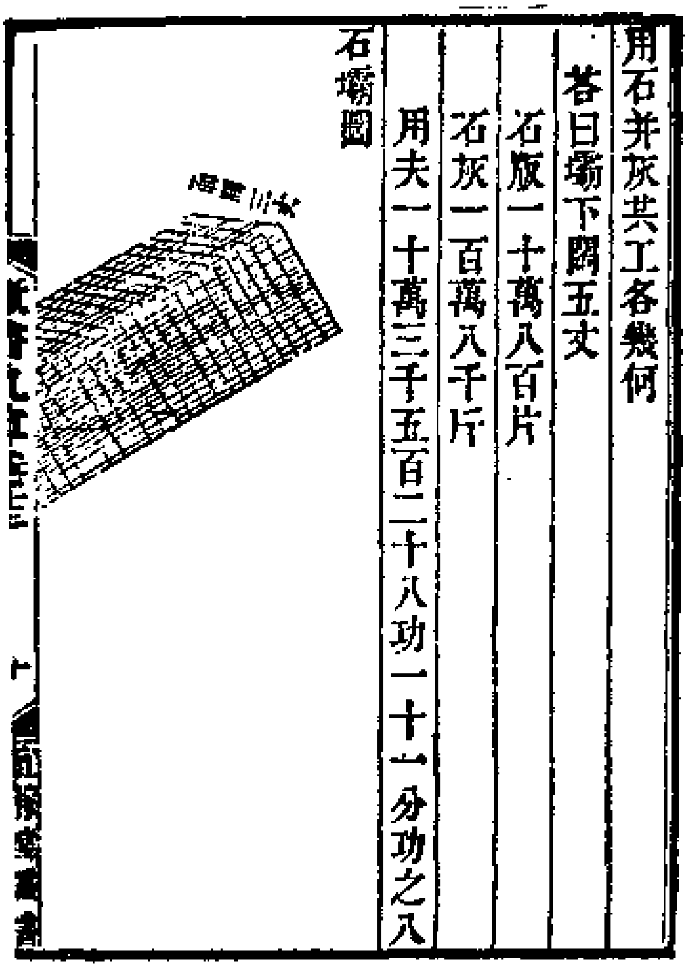
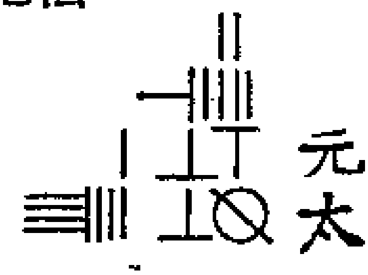

用石并灰共工各幾何
荅曰墻下闊五丈
石版一十萬八百片
石灰一百萬八千斤
用夫一十萬三千五百二十八功一十一分功之八
石墻圖

图 56 《数书九章》(1247 年)
中的石坝建筑问题

① 参看本书第二卷第十六章第四节第(2)小节。

秦九韶的著作未曾译成西文。他的书在清代重被发现以后有许多注释本，其中宋景昌的《数书九章札记》(1842年)尤为著名。

李冶的《测圆海镜》有一部分阐述三角形的内接圆[1)]的性质(图57就是他的著作前面的图)，但主要部分则与方程的解法有关。这部论著完全是代数学的[①]。他的《益古演段》虽然在记法上与《测圆海镜》有些不同，但也是属于代数学的。李冶把“系数的阵列”(天元术)应用到数字方程的记法上，而不像秦九韶那样用在不定分析方面。李冶书写方程的方法通常是纵行数码与横行数码同时并用，未知数附一“元”字；常数项出现在一次项之下，并附一“太”字[②]；平方项和立方项出现在未知数之上。这样，记法



① 参看后面第290页。

② 在实践中，他只用这两个符号之一来确定纵行中各行的意义。

1) 即勾股容圆。——译者

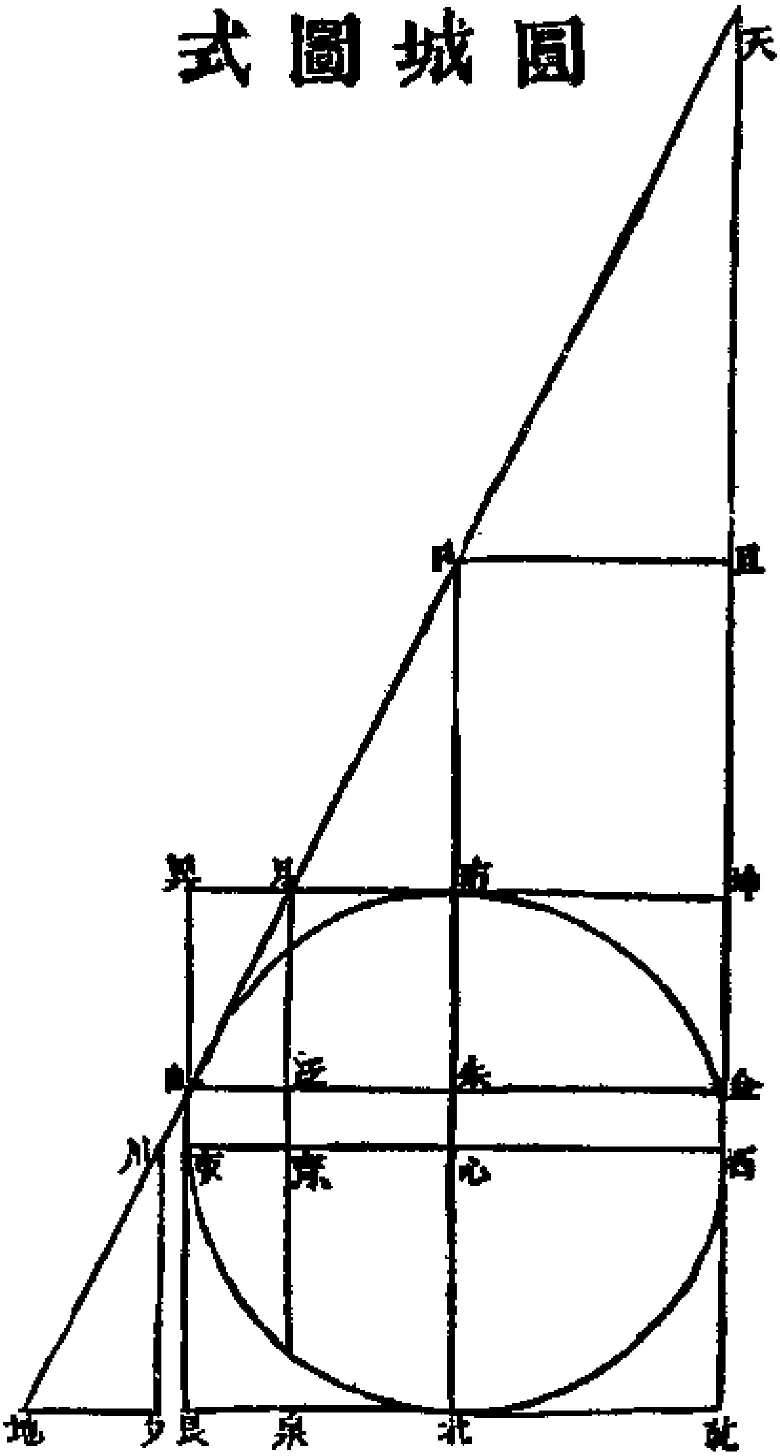


图 57 李冶《测图海镜》(1248 年)前面说明直角三角形内接圆的性质的图(参看后面第 290 页)

就代表方程 $2x^3+15x^2+166x-4460=0$。可以看到，有一斜划通过某个数的一个数字，这表示该数是负数，这种记法和从前的赤、黑筹记法相比，是一种改进，并且是在秦、李以后一般所采用的。可是，后来的作者又恢复秦九韶的习惯，把常数项放在最上面，其他项都在它之下，李冶本人在《益古演段》就是这样做。无论哪一种情形，这种纵行体系无疑是代表算筹在算盘上的实际排列。

李冶的《测圆海镜》没有西译本①。《益古演段》的64个问题曾由赫师慎［van Hée (4)］译出。关于这部书，最近有一篇刘冰弦(1)的中文论文。

杨辉与这些人稍有不同，他对算术级数感到兴趣。在他的《算法》中，他列出了级数

$$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3\cdots+n)$$

和

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

的求和公式，但没有对这些级数进行解释或分析。他对分配问题也感到兴趣。他考虑过复比例问题

① 从俾纳次基(Biernatzki)开始，李冶的名字是以一个堂皇而错误的写法“李冶仁卿”出现在数学史中，这是把他的名与字混合起来了。

（重互换），并处理了具有五个未知数的一次联立方程组。杨辉能够十分巧妙地处理小数，在他的著作中有一个宽 24 步 $3\frac{4}{10}$尺、长 36 步$2\frac{8}{10}$尺的长方形田的面积问题；在把这两个数相乘时，他把尺数表示成步的小数部分，得到

$$24.68 \times 36.56 = 902.3008。$$

这种方法与我们所用的小数是相同的。

这里需要有一种说明数位的字。在宋代，杨辉把小数的前三位分别称为分、厘、毫，甚至在前一个例子中[①]，当他处理长度的问题时，也用到这些小数名称，尽管在他那个时代，这些字（至少是厘和毫）已不用作长度单位而用作重量单位[②]。杨辉在上述问题中，也没有使用本来预计会用到的单位名。真正的尺和真正的寸都没有出现在他的语言中，在他的 0.68 中的第一位小数虽然超过了半步，但他称它为分。而这个分字，如果正确地用作

① 参看 Mikami (1), p. 86。应该注意，这些数名的作用和位值成分（见前面第 27 页）是多么类似，但这里仅仅是有意识地借用小的单位（见后面第 187 页）来表示小于 1 的数值。

② 主要是由于 992 年颁布的诏书。

长度单位，它的意义应该是十分之一寸。同样，另一个例子[①]把6两(16两为1斤)表示为3分7厘5毫，即0.375斤。这一切都表明，杨辉已经有了高度发展的小数概念，并且为各位小数定下了专用名称。他的小数决不是刘徽时代在开平方根中出现的那种无名"微数"。刘徽在三世纪寻求平方根的过程中碰到十进小数是很自然的，但由于他用十进分数来表示所有的答数，因此，这些小数对他来说是"不自觉地"出现的。但在十三世纪，杨辉则有意识地避免了一般分数，而用十进小数来表示。虽然他没有像斯特文(Stevin)那样使用小数点符号，但在运算的时候，他的心目中肯定是在算盘上画上一条想像的纵线的。在十四世纪，丁巨以匹作为布帛的单位时，又一次以分、厘、毫作为匹以下的前三位小数[②]，这就表明了他们的确有一个严格的专门数学观念。丁巨在整数与第一位小数之间插入一个"余"字，这个字起了与小数点相同的作用。

---

① 参看钱宝琮(1)，第78页。

② 参看《丁巨算法》第十页正面。

在杨辉的著作中还第一次出现一次项系数为负的二次方程，不过他曾说，在他以前刘益已经考虑了这种方程。他的著作从未翻译成外文。

到了朱世杰，中国的代数学达到很高的水平。在他的第一部著作《算学启蒙》中，已提出了代数加法和乘法的正负数规则，并且总的看来，它构成代数学的引论。此外，还有一个适用于算盘的除法表(用文字表达)①。虽然《算学启蒙》没有添入前人著作中所没有的新内容，但是它对日本数学的发展有很大的影响。然而，这部书在中国却失传了，直到1839年才发现它的1660年朝鲜重印本[严敦杰(1)]。

在《四元玉鉴》中，朱世杰发表了他真正重要的发现。关于这部书，赫师慎[van Hée (12)]曾经写过一篇专题论文②；康南兹[Konantz (1)]有一篇英文的内容介绍。康南兹曾与已故的陈在新

① 参看后面第164页。杨辉、丁巨以及比朱世杰稍晚的贾亨[三上义夫书中作贾洪，见 Mikami (1)]，也都曾列出这样的表，他们为当时常用算盘提供了有力的证据。参看三上义夫(10)。

② 这篇论文对非数学家来说是十分难读的，要是没有三上义夫[Mikami (1)]及史密斯和三上义夫[Smith & Mikami (1)]的帮助，几乎是不可理解的。

合作将它全部译出，可惜至今尚未出版[①]。

祖颐季在为朱世杰著作所作的序言中写道：

"人们象云一样从四方集中到他的门下来向他学习。……他用几何图形解释天、地、人、物(代数记号的术语)的关系。从他的图形可以看出，天对应于直角三角形的底边(勾)，地对应于高(股)，人对应于斜边(弦)，物则对应于三角形内接圆的直径(黄方)。通过上下左右地移动这些表达式，进行交替和联系，变换和乘除，用非实数来代替实数，用虚数来代替真数，使用正负数符号，保留某些元而消去其他元，然后改变算筹的位置，如四个例子中所示的那样，或先攻击正面，或先侧击一翼，他终于成功地以一种奥妙面又自然的方式求出了方程和根。……他不使用物，而物却发挥了作用；他不使用数，而却得出所要求的数。他以前的数学家都未能达到这部精深的著作中所包含的奥妙的道理。[②]

① 参看 Sarton (1), vol. 3, p. 703。根据汉科克 (E. M. Hancock) 小姐的私人通信，它的手稿现在已经遗失了。

② 《四元玉鉴》序。英译文采自 Konantz (1)，经作者补充修改。

〈踵门而学者云集。……按天地人物立成四元，以元气居中，立天勾地股人弦物黄方，考图明之，上升下降，左右进退，互通变化，乘除往来，用假象真，以虚问实，错综正负，分成四式，必以寄之剔之，余筹易位，横衝直撞，精而不杂，自然而然，消而和会以成开方之式也。……不用而用以之通，非数而数以之成，由是而知有数皆从无数中来，高迈于前贤能尽其妙矣。〉

这段包含道家诡辩的引文，暗示出道家曾经使中国的代数学家获得过某种灵感。

这部著作的开头有一个图形，它与后来西方称为巴斯噶三角形的图形完全相同①(图 80)。它是二项式定理中对任意整数值 n 展开 $(a+b)^n$ 时求系数的工具。在欧洲，这个图最早是在1527年彼得·阿皮亚尼斯(Peter Apianus)的著作中印出的，但在巴斯噶的《算术三角形》(*Traitè du Triangle Arithmètique*, 1654)中才得到最完善的研究。奇怪的是，朱世杰在他1303年的著作中称它为“古法七乘方图”，暗示出这个图起码在相当长

① 参看 Smith (1), vol. 2, p. 508。

的时间以前就已经为人们所熟知了。后面(第299页)在简述朱世杰所使用的新的代数方法①时,我们将再回到这个问题上来。朱世杰所说的“四元术”实质上是在所求的一个未知数外,再取几个辅助的未知数,然后从问题的条件所给出的已知关系出发,消去这些辅助的未知数。这就是上面所引祖颐季的话的由来。朱世杰解少于五个变数的联立方程的办法,实际上与消去法和代入法完全相同。他的理论在若干方面与西尔维斯特(Sylvester)的分离消去法是极为相似的,只是没有使用行列式②而已。朱世杰的方法已为十九世纪的许多中国数学家所阐明,其中最突出的有丁取忠③,他曾编辑了著名的古代数学著作集《白芙堂算学丛书》

① 这些方法就符号系统而论是新的,但就实质而论,汉和三国的数学家就已完全知道它们了。

② 行列式是日本人发展中国数学而得到的产物[Smith & Mikami (1), p. 124],首先由伟大的关孝和(Seki Kōwa)在1683年加以阐明,十年后,莱布尼茨才在一封(他生前未发表的)信中宣布了他的独立发明。第一个给以解释的是范德蒙德(Vandermonde),时间在1771年。“行列式”这个术语是高斯(Gauss)在1801年最先采用的。参看后面第263页。

③ 他与耶稣会传教士合作过。参看 van Hée (5)。

(1875 年)。

正如我们已经看到的，中国数学家在此以前就已经把他们的方法用到各种实际问题上；毫无疑问，税收、灌溉和筑城等事业所提出的各种要求，曾经经常激励着他们的工作。还在唐代，一行就已用当时高深的数学知识来造历，在元代，造历的需要更带动了十分著名的数学家与天文学家郭守敬的工作。郭守敬的原著虽然没有保存下来，但我们可以在《元史》① 和《明史》② 篇幅很大的历法部分中看到他的方法。此外，人们还曾根据一些目前已不存在的资料，如邢云路(1573—1620年著称)在《古今律历考》③ 和梅文鼎 (1633—1721 年) 在《历算全书》④ 中，查明了郭守敬的工作。这一切都已为告析 [Gauchet (7)] 所注意到，他把郭守敬看作中国球面三角学的创立者，并认为他是从十一世纪沈括的会圆术得到启示的。

郭守敬 (1231—1316 年) 最初 (1262 年) 是

① 《元史》卷五十二至卷五十七。

② 《明史》卷二十五至卷三十一及其后。

③ 《古今中国历法考》卷六十七及其后。

④ 《历算全书 · 堑堵测量》。

在忽必烈汗手下从事水利工程工作的[①]，大约十四年后才开始天文历法的研究。他创造的一些仪器一直保存至今，这一点将在天文学部分（第四卷第459页）进行叙述。这里我们只谈他的数学。他的球面三角（这样称呼未必妥善，因为正如我们目前所知道的，它没有用到正弦、余弦等）[②]与赤道、黄道和月球轨道在天球上的升交点所构成的球面图形有关，我们将在适当地方更充分地考虑它。郭守敬应用了四次方程，他用“招差法”对幂级数求和[③]，这就是求由观测量 x 所表示的方程 $Ax+Bx^2+Cx^3$ 中常数 A, B, C 的方法，以便在另一个观测量 n 具有任何值的情况下，都能预测出 x 的值。这个方法与有限差分法相当，它的原理并不是新的，因为我们后面将看到，唐代的李淳风就已经应用“䇲”（䇲差）来表示经验观测的变数，用“定”（定差）来表示我们现在所说的任意常数。郭

① 参看本书第二十八章第六节。

② 除非这些东西隐藏在他沿用的勾、股、矢等古代术语之下。钱宝琮[(1)，第150页]曾经指出，在郭守敬的方法中，这些术语分别与正弦、余弦和正割相当。

③ 参看后面第277页那一节。

守敬加上了“立”以改善近似值。这个方法被用于太阳视运动角速度的计算中，它在某种程度上与笛卡儿以后的科学中使方程适合曲线的方法是相当的。

阿拉伯人对郭守敬及其同时代人的影响究竟是什么，影响又有多大，这至今仍然是一个未解决的问题。在元代，阿拉伯人（事实上，他们大多数是波斯人与中亚细亚人）在中国科学技术中所扮演的角色同印度人在唐代的角色十分相似。《元史》卷二〇三告诉我们，穆斯林炮手阿老瓦丁和亦思马因[①]在1271年曾为蒙古人服务，前者卒于1295年，后者卒于1274年，他们无疑是可以传播数学知识的[②]。还有一个受过较高教育的叙利亚景教徒爱薛，即伊萨·塔札门（通译伊萨）[③]，他从1250年到1308年去世为止，一直是为蒙古朝廷工作，

① 这两个人也许就是阿拉·丁（‘Ala’ al-Din）和伊斯迈尔（’Ismā‘īl）。

② 我们在第三十章讨论军事技术时，将再次碰到这两个人。

③ 爱薛既精通数学和天文学，也精通医学和药物学。他的传记说，他来自拂林，也就是拜占廷，但他肯定是叙利亚的阿拉伯人。

在这期间他被提升为翰林院学士和国家大臣。此外，波斯的天文学家札马鲁丁 (Jāmāl al-Dīn)①1)在1267年曾为忽必烈汗设计了一个新历法——《万年历》，这个历法后来已经失传，无论如何，它是比不上郭守敬的《授时历》的，后者是明代《大统历》(始于1364年)的蓝本。不过，在元代末期，中国知识界受"阿拉伯的影响"是很大的，甚至在明朝政权建立的那一年(1368年)，还设立一个穆斯林(回回)司天监和通常的司天监并立②，但是两年以后，它便成为钦天监的一个科(回回科)了。这个科的主持者是一个穆斯林，名叫海达儿③，一直流传至今的一部著作《明译天文书》④(译自阿

① 参看本书第四卷第475页。

② 这个司天监的历史，实际上可上溯到1271年，那一年，札马鲁丁被任命为一个新的天文台的负责人。马坚(1)是一部叙述回回历及其专家的有趣的近代著作。

③ 他的另一个译名是黑的儿。

④ 过去的科学史家(例如萨顿)都没有提到这部著作，它被辑入《涵芬楼秘笈》。这部书是翰林院学士李翀和吴伯宗与穆斯林阿答兀丁、马沙亦黑、马哈麻等共同翻译的。诏令载于《明史》卷三十七第一页正面。

1) 在第一卷中译作贾马尔·丁。——译者

拉伯文?),就是他在1382年呈给皇帝的。然而,这部著作中没有数学,只有方位天文学的丰富数据以及许多占星学的资料。但是,要根据穆斯林的方法得出行星历表,如贝琳在1482年重新发表的《七政推步》[①],需要进行大量的计算。当耶稣会传教士在十六世纪末到达北京的时候,这些"阿拉伯天文学家"的后裔仍在他们的天文台工作。因此,毫无疑问,波斯和阿拉伯(例如马拉加和撒马尔罕的天文台)的数学是有不少机会对中国的传统产生影响的。但是,在同时兼有天文学史和数学史的可靠知识的学者掌握阿拉伯和中国原著的第一手材料,并且对这个问题进行深入研究以前,实际上是无法知道到底有没有重要的影响的——现在我们只能作一些推测[②]。在这方面有一个困难,这就是在这个文化接触时期以后,中国数学出现了明

① 薮内清[Yabuuchi (1)]曾对这部著作做了专门研究,他的研究表明,其中的行星部分是以马拉加天文台的伊儿汗表为基础的。这部书还包含一个记有黄道带区域中及其周围的277颗星位置的有趣的星表;这个表一定是某一个穆斯林国家于1365年前后造成的。《明史》卷三十七至三十九的《回回历法》是《七政推步》的一个缩写本。

② 参看李俨(8);钱宝琮(7)。

显的衰退①，以致在1400年到1500年间，几乎没有一部值得注意的著作。

在转入十六世纪以前，应该提一提在郭守敬去世后半个世纪内进行工作的几个数学家。这里包括丁巨，他的年代我们只能从他在1355年出版的《丁巨算法》进行猜测，这部书大致与佚名作者著的《透簾细草》同时，是一部很简单的算术问题集。1372年出现了严恭的《通原算法》，它包含一些不定方程及其不完备的解法。这些论著和一些其他著作② 都保存在剑桥大学图书馆的《永乐大典》(1406年)卷一六三四三至一六三四四中(图54和图65示出这部抄本的两页)③。李俨对这些著作曾作过论述④。其中说明开平方根方法的几何解释的图形，出自1261年杨辉的《详解九章算法纂类》。

① 但也有某些作者，如赫师慎，反对这种看法。

② 例如，贾亨的《算法全能集》及安正斋和何平子的《详明算法》[但这部书也可能是贾亨撰写的，因为遗留下来的几乎完全相同；参看李俨(4)，第3集，第42页]。参见 Sarton (1), p. 1536。还有一部佚名作者著的《锦囊启蒙》。

③ 应该记得，这部包罗万象的巨著只留下很少的册数，散落在世界各地的图书馆内。参见本书第一卷第309页。

④ 参看李俨(4)，第2集，第83页。

在明代初期的150年间，数学上几乎没有什么令人注目的东西，但到公元1500年以后，数学家又开始出现。军事工程家兼数学家唐顺之(1507—1560年)由于从事圆弧计算工作而获得了盛名，他出版了五部著作，其中《弧矢论》要算是最重要的一部。与他同时代的数学家有云南巡抚顾应祥，他的《测圆海镜分类释术》(1550年)根据系数的符号把不同次幂的方程区别开来，并对它们的解给出较为详细的解释；两年后，他的《弧矢算术》(1552年)系统地发展了当时处理弧与弓形的公式，例如

$$\frac{c}{2}=\sqrt{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{d}{2}-s\right)^2\right]}$$

或

$$s=\frac{d}{2}-\sqrt{\left[\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{2}\right)^2\right]}$$

$$a=\frac{2s^2}{d}+c,$$

$$d=s+\frac{\left(\frac{1}{2}c\right)^2}{s},$$

$$A=\frac{1}{2}(s+c)s,$$

$$s\equiv\frac{d^2\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{(d^3-d^2s')-(ad-s')s'},$$

这里 d = 直径，c = 弦，s = 矢，A = 弓形面积，a = 弧，s' = 矢的近似值。另一个和唐顺之同时代的人是周述学，他的著作主要是历法计算方面的，其中一部著作①出现在1558年。

但是，这些明代数学家没有一个通晓宋、元的代数学。宋、元的代数学完全被废弃不用了，直到耶稣会传教士及其他人引入欧洲代数学以后很久，梅瑴成等人才认识到隐藏在不习见语言下的中世纪中国代数学，并重新对它进行研究。

在明代数学家当中，最引人注目的是程大位，他的《算法统宗》②出现在1593年。这部书在历史上是有重要意义的，因为它虽然问世已晚，但却第一次给出中国算盘的图说，并说明了它的应用③。

---

① 钱宝琮和李俨在他们的著作中都列出了周述学著作的书名。这个时期以及其他时期次要数学家的姓名和著作，也可在他们的书中找到。三上义夫(9)则讨论了清代数学家在割圆术方面的工作。

② 这部书所占的篇幅不少于十三卷(卷一一三至一二五)，它与《周髀》(卷一〇九至一一一)一样，全文收入《图书集成·历法典》的数学部分。其余的部分由混合的引文构成，其中包含宋代谢察微(参看后面第172页)著作的残篇。武田楠雄(2)曾对《算法统宗》进行过周密的研究。

③ 但这方面有些争论，有人认为它不是最早的算盘图，柯尚迁的著作《数学通轨》(1578年)比它更早一些。

关于这种在计算中有重要作用的算盘的历史，后面我们将根据已知的情况加以概述。一个多世纪以前，《算法统宗》各卷的标题就已由毕瓯[E. Biot (5)]译成西文，他 [E. Biot (6)] 报道了这样一个事实：这部书有一个与朱世杰的图十分相似的巴斯噶三角形图①。《算法统宗》虽然是一部实用的著作，主要注意测量和计算具体形状的平面面积及合金成分等问题，但它也涉及了相当多的幻方。在这部著作中，程大位列出当时存在的许多数学书目，但其中除去上面已提到的顾应祥的著作之外，后来都已散佚。三上义夫 [Mikami (7)] 和武田楠雄(1)对这个时期的文献曾作过专门的研究，他们详细叙述了十六世纪的十二部次要的著作②。

随着十七世纪初耶稣会传教士的到达北京，本书所感兴趣的那个可称为"本土数学"的时期即告结束。那些想研究中国学者与耶稣会传教士合作时期的人，可在三上义夫 [Mikami (1)] 的著作

① 《算法统宗》卷六第二页反面。这个三角形因袭了吴信民的著作。参看后面第 172 页。

② 关于罗洪光，亦可参看 Forke (9), p. 424。

中找到有关这个题目的相当细致的一章①。利玛窦(Matteo Ricci)和他的同伴几乎是其生平事迹得以写入中国正史的仅有的外国人，由此可看出他们所获得的荣誉之大。欧几里得前六卷的中文翻译是由利玛窦和徐光启承担的，在1607年译成②。《同文算指》则由利玛窦口授③，李之藻笔述，于1614年出版。在这以后有一些较为高深的几何学与测量术著作。这个世纪的后期(1669年)出现了汤若望(Adam Schall Von Bell)和其他耶稣会传教士在1635年以前编纂的《新法算书》④。对

① 大多数人推测耶稣会传教士带给中国的是陈旧的欧洲数学知识。然而，只有欧几里得的《原本》才是如此。我们将在后面第256页强调指出，耶稣会传教士所传人的不属于几何学的数学发明和技术在欧洲是最新的。此外，中国人曾为这种新知识而感到非常激动，这有一部分是因为他们自己的数学当时已陷人衰退之中。

② 即《几何原本》。他们所用的版本是克拉维乌斯(Christopher Clavius, 1537—1612年)的欧几里得《原本》十五卷。克拉维乌斯在书中以丁先生的名字出现，因而迷惑了后人。原书仍存在北京北堂图书馆，我很高兴曾在那里见到它。参看 d' Elia (2), vol. 2, pp. 356 ff.; (6); Trigault (Gallagher ed.) p. 476。

③ 此书译自克拉维乌斯的《实用算术简要》(*Epitome Arithmeticae Practicae*)。

④ 这部书大部分收在《古今图书集成·历法典》卷五十一至七十二和卷八十五至八十八中。裴化行[Bernard-Maître (7)]曾周密地研究过这部著作，在这方面，可进一步参阅后面第二十章第十节第(3)小节。

数首先出现在穆尼阁 (Nicholas Smogulecki)[1] 一篇关于日月食的论文《天步真原》中，他的学生薛凤祚[2] 在1653年出版了最早的中国对数表及其讨论。十八世纪以后，在康熙统治时期，诏令编纂和出版的数学大纲有1713年的《律历渊源》[其中已把佛拉哥 (van Vlacq) 1628年的对数表印成中国的形式][3]和1722年的《数理精蕴》。从此以后，一乙
中国数学文献便更加丰富了，虽然和外国仍有一些隔阂，但它是世界文献的一部分。

这时，中国人开始发现，他们自己也曾经有过代数这门科学。由于本土科学的衰退以及对耶稣会传教士带进来的“阿尔热巴拉”的高度热情，中国古代代数学就被忽视了。前面已提到梅文鼎的孙子梅瑴成(1681—1763年)，他最先认识到，中国自己的数学在十七世纪以前已有极大的发展，只

① 他的传记见 Kosibowicz (1)。

② 赫师慎 [van Hée (6)] 曾意译过阮元所作的薛凤祚传。亦可参阅李俨 (13)。参看第四卷第 689 页。

③ 费尔德豪斯 [Feldhaus (23)] 曾回顾过查尔斯·巴巴奇 [Charles Babbage (1)] 怎样在 1827 年用宋君荣 (Antoine Gaubil) 1750 年赠给皇家学会的一个版本来比较排字错误，从而证明它们是同出一源的。参看本书第四卷第 670 页。

是它使用了后人所不熟悉的符号和表达方法而已。他把这个发现记在他的《赤水遗珍》中①。在这里，梅瑴成使用了一些隐晦的词句，把“阿尔热巴拉”看作是欧洲人已承认他们的代数学系来自东方的证据②。虽然后来某些中国作者在这方面的强烈的民族自尊感③引起十九世纪欧洲人的许多苛评，但事实俱在，不论将来的研究能否揭示出文化交流的秘密，代数学实质上仍然是出自印度和中国的，就象几何学出自希腊一样。实际上，目前有某些迹象表明，代数学是在十三、十四世纪从阿拉伯传入中国的，但有更多的证据说明，它在更早的时候从中国传入印度和欧洲④。因此，在作出

① 在十九世纪，有许多人(例如李善兰)步他的后尘进行类似工作。

② 代数学的西文原名 algebra 当然是出自阿拉伯语。

③ 例如《格致古微》与《瀛海论》。参看本书第一卷第 104 页。

④ 然而，读了史密斯的话，还是令人大吃一惊的，他 [Smith (1), vol. 1, p. 269] 认为，我们关于西方旅行家得普南诺·卡品尼 (de Plano Carpini)、威廉·鲁布鲁克 (William Rubruck)、亚美尼亚的海顿王 (King Haython of Armenia)、马哥孛罗 (Marco Polo) 等人的知识，“解决了中国代数学在十三世纪是否传到过意大利的问题。我们要再次指出，如果中国代数学没有传到过意大利，那倒是一件奇怪的事。”但是，事实上中国代数学在方法上和符号系统上与欧洲是大不相同的，如果天元术传到过意大利，那末，它在西方难道不会留下一些痕迹吗？参看后面第 289 页。

任何最后的定论之前，必须进行大量的谨严的历史考证。

到这里，关于古代和中世纪中国数学的主要方面及主要文献的叙述已告一段落，接着，我们将分别叙述数学的各个分支。在讨论中，我们将尽力说明所用到的某些方法和专门术语，并把中国的成就和其他各国人民的成就摆到适当的位置上。关于十八世纪末与十九世纪的中国数学记事，读者可参考本章开始时所提到过的那些历史著作①。

四、算术和组合分析

(1) 初等数论

在古代，“算术”一词的意义不是今天名之为算术的简单计算，而是数论的初步②。从关于数的

① 为方便起见，很多后期数学家的姓名也列在本书最后一卷的人名录中。

② 迪克森 [Dickson (1)] 的杰出著作主要是论述比较高级的数论的。亦可参看 P. G. H. Bachmann (1)。

神秘主义和数字学——这两者是希腊和中国最初所共有的(参看本书第二卷第十三章第四节)——的所谓毕达哥拉斯气氛中,已开始认识到素数、合数、垛积数、亲和数以及类似的数的存在。在欧几里得《原本》的若干卷①中已把这类知识加以系统化。公元前三世纪的"埃拉托色奈斯(Eratosthenes)筛法"——一种通过筛去自然数列中的合数以求素数的方法——是很著名的②。公元二世纪与刘洪(参看前面第64页)同时代的希腊人——杰拉萨的尼科马朱斯(Nicomachus of Gerasa)和士麦拿的塞翁(Theon of Smyrna)——曾把许多新的命题加到数论中;三世纪与刘徽同时代的、亚力山大里亚的丢番都(Diophantus)也这样做过③。

奇数与偶数的差别谅必最先引起了人们的兴趣。在西方,奇数称为标竿数④,因为标竿同它的

① 即第2, 5, 7, 8, 9, 10卷的某些部分。

② 参看 Heiberg (1), p. 22; Sarton (1), vol. 1, p. 172; R. A. Fisher (1)。

③ 数论的一个基本定理是费玛(Fermat)定理(1640年),即如果 p 是任意数, x 是不能为 p 除尽的任意整数,则 $x^{p-1}-1$ 必定可被 p 除尽。据迪克森[Dickson (1), vol. 1, pp. v, 59]说,

对于 $x=2$ 的情形，中国人在古代就已经知道。我们无法追查这个结论的真正出处，但其他数学著作[例如 Rouse Ball (2), p. 63; Smith (1), vol. 2, p. 29，后者有印刷错误]也引用这种说法。这种说法的来源乃是琼斯 (J. H. Jeans) 在 1897 年(这时他还是一个大学生)一篇短文中所作的一个奇怪的附注："威妥玛[1)] (Thomas wade) 爵士的一篇论文认为在孔丘时代就已有这个定理，并且(错误地)说，如果 p 不是素数，则此定理不成立。"

这个结论可能是由于琼斯对于偶数能为 2 除尽而奇数则不能这一叙述发生误解而产生的。如果考虑到西方早期的汉学家曾为《九章算术》的某些东西所迷惑(因为这些汉学家搞不清《九章算术》的真正年代)，那末，提到孔丘是很容易理解的。《九章算术·方田章》写道：

可半者半之(如果分子和分母都可为 2 除尽，则分子分母都折半)。不可半者副置分母子之数，以少减多，更相减损(如果分子和分母不能为 2 除尽，则分别对分子和分母设定某些数，不断辗转地从大数中减去小数)。求其等也(并求出它们的相等值，即继续进行到最后的被减数等于最后的减数为止)。有人认识到这里所叙述的是一个法则，但却没能认识到，事实上它是用辗转相除法求最大公约数的。可能，威妥玛爵士或翟理斯 (H. A. Giles) 教授当时想到了 $\frac{x^{2-1}-1}{2}$，便把第一句话理解为以 2 作分母，接着就大淡其从大数减去小数了。他们可能是把"更"字解释成"再"字，以适应第二项 -1。但是其余的，他们就无法翻译了。他们这样解释完全不是原文的原义(如果我们的意见是可以接受的话)。毫无疑问，汉代的数学家决不会想到任意数 x 就是 x^{2-1}。

④ 参看 Smith (1), vol. 2, p. 16。

1) 在第一卷译作魏托马。——译者

影子构成了一个 $2n+1$ 型的数字，所以这个数字必定是奇数。这种必然性在计算方阵的行数时也存在；这是中国在同一时代所采用的办法，只不过是目的不同而已。士麦拿的塞翁也知道与此相应的事实，即前 n 个奇数(包括1在内)之和是 n 这个数的平方。自然，人们会把奇、偶数同阴、阳性联系起来，这种情况既可在古代中国人的议论中找到，同样也可在毕达哥拉斯学派的言论中找到①。过去，中国人也同样广泛流传着奇数代表吉利、偶数代表不祥的迷信②。

一个整数的因子被定义为能整除这个数的那些整数，其中包括1，而不包括这个数本身。而一个数之被称为不足数、完全数或富裕数，则要看它是大于、等于或小于它所有各个因子之和。希腊人早就知道了这些定义，他们在二世纪末已给出了前四个完全数。虽然斐波那契(Fibonacci)在1202年曾最早宣布了一个寻找完全数的有效法则，但是一直到1460年，人们才找出第五个完全

① 参看后面第127页。钱宝琮[(1)，第80页]给出了一个有趣的特殊情形。

② 例如参看 Granet (5), p. 293。

数。如果两个整数当中每一个数都等于另一个数的各因子之和，例如220和284，那末，这两个整数就称为亲和数。九世纪阿拉伯的数学家对亲和数就已感到兴趣，但是一直到八百年后，费玛（1636年）才发现第二对。所有这一切对于中国数学家来说都是陌生的，在中国，过去所注重的是具体的数字，而不是这样的数。对于垛积数，希腊人也很感兴趣。所谓垛积数，就是这些数所含的1的数目可垛积成一些几何图形。例如，3，6和10是三角形数，4和9是正方形数，5和12是正五边形数，等等。这种数[①]，中国人同样是知道的。毕瓯［Biot(5)］在后来（十六世纪）的著作《算法统宗》中找到过一些三角形数，但这种概念的出现则要早得多[②]。1247年，秦九韶曾用“束箭法”讨论方阵和圆阵。这种方法的起源可追溯到《九章算术》中的级数表达方式——“锥行衰”。

---

① 在中国和希腊，它都引起了级数的研究［Heath (5), p. 247; Gow (1), p. 103; Smith (1), vol. 2, p. 499］。

② 参看李俨(11)。

(2) 幻　方

中国人感兴趣的另一个方面是组合分析——幻图的构造，即在各种几何形状的表上排列数字，使得在对这些数进行简单的逻辑运算时（例如加法），不论采取哪一条路线，得到的和或积都能完全相同[①]。由于西方历史学家采纳了中国古典著作的很不可靠的年代，过去一直把组合分析这一分支的出现年代定得比实际年代早得多，但是，即使对它的起源采取恰如其分的保守的看法，它的发明权似乎仍然应属于中国。既然可以说是"无年代的中国传统"可追溯到历史的神话时期，事实究竟如何，就很难加以肯定了，但是，情况大致可概述如下[②]。

① 参看杜德尼［Dudeney (1)］及弗罗斯特和芬内尔［Frost & Fennell (1)］的优秀文章。在有关幻方的书籍中，可以提出安德鲁斯［Andrews (1)］和古老的维奥尔［Violle (1)］的著作。参看 Rouse Ball (2), pp. 193 ff.。

② 李俨有一篇文章是专门考证幻方的历史的，参看李俨(4)，第3集，第59页；(21)，第1集，第175页。

神话的一个组成部分有这样一个故事：为了帮助工程师皇帝大禹统治天下，从只有他才能治理的水中跃出几头神物，献给他两张图，其中“河图”是来自黄河龙马的礼物，“洛书”是来自洛水神龟的礼物。前者（“河图”）一般被描绘成青色或用青色书写的，而后者（“洛书”）据传说是红色的。毫无疑问，这个故事是很古老的，不会晚于公元前五世纪，因为在《论语》①和《书经》②中均有记载③。公元前四世纪初的《墨子》④和公元前四世

① 《论语》IX, VIII [Legge (2), p. 83]。孔丘在评述时代的衰退时曾哀叹道：“河不出图”。少数学者，如顾立雅[1) [Creel (4), p. 218]，怀疑这一段话是后人添上的。

② 《周书·顾命》[Legge (1), p. 239; Medhurst (1), p. 299; Karlgren (12), p. 71] 认为“图”是在一个皇帝死后展出的遗物中的一部分。这一章一般被认为是在孔丘以前写成的少数几篇中的一篇。理雅各[2) [Legge (1), p. 138] 认为，《书经》没有提“河图”是误人匪浅的。

③ 孔安国的《书经》注释写于公元前100年前后，他说，每个图都有一至九的数字[参见 Medhurst (1), pp. 198, 199]。

④ 《墨子》卷十九 [Mei (1), p. 113]。

1) 在第一卷译作克里尔。——译者

2) 在第一卷译作赖格。——译者

纪末的《庄子》[①]也都有所征引。《庄子》是最先把数与图联系起来，提出"洛书"的九个数的[②]。公元前二世纪，这个图开始有所发展。《淮南子》[③]的引证还没有进一步阐明这些图是什么，但在大约与它同时的《易经系辞传》中有重要的两段(第二卷第十三章第七节)。《系辞传》第一部分卷九说："天一，地二，天三，地四，天五，地六，天七，地八，天九，地十"[④]；对于这一点，宋代注释者的传统说法[⑤]是：这两个图是前十个基数排列的方法——后来在卷十一提到这两个图本身时，一如既往把它们说成是作为圣人的符瑞而出于水的[⑥]。

在《史记》中，司马迁记录了一个可能与河图、洛书有关的奇妙的故事[⑦]，这个故事说，秦始皇的

① 《庄子》卷十四 [Legge (5), vol. 1, p. 346]。

② 原文只提到"洛"字，但后来解释者通常认为它指的是"洛书"。

③ 《淮南子》卷二 [Morgan (1), p. 54] 和卷十八。

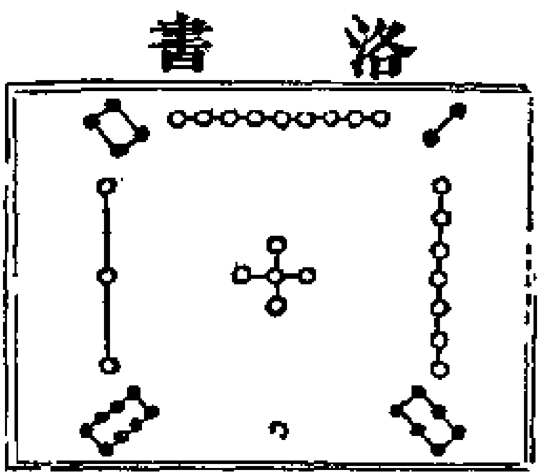
④ 参看 R. Wilhelm (2), vol. 1, p. 234。

⑤ 例如见 1177 年朱熹《周易本义》中的有关章节。

⑥ 参看 R. Wilhelm (2), vol. 1, p. 244。

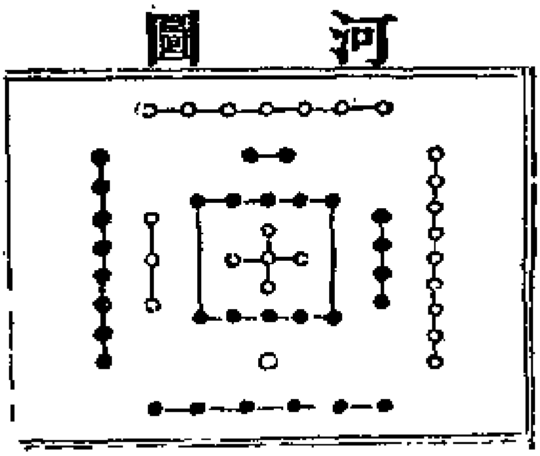
⑦ 《史记》卷六第二十一页反面 [Chavannes (1), vol. 2, p. 167]。

一个方士卢生，把录图写的一部含有预言的书呈献给他①。这段记载写下的年代是公元前 100 年前后，但所记载的事件则发生在公元前 230 年前后。正如以前(第二卷第十四章第六节)说过的，它所记的多半是古图变成汉代谶纬伪书中神怪占卜材料的定形核心这个过程的开端。曾丘孙②和陈



4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 58　洛书图



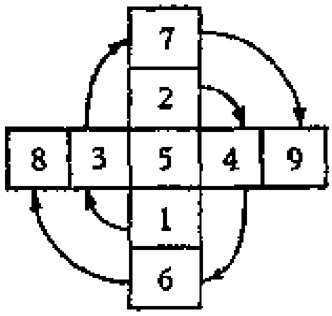


图 59　河图图

① “录图”曾被看作是某个人的名字，后来认为是老子，但陈槃的看法认为这是与“河图”有关的书名。

② 参看 Tsêng Chu-Sên (1), pp. 103 ff.。

槃① 曾批判地考核过谶纬书中带有"河图"、"洛书"之名的几部著作。他们发现,在公元十世纪成书的《太平御览》中,几乎所有关于"河图"的大段引文,都是出自这些著作的。

至此,我们只能找到一些暗示,说明这些图形与数字有关。在进一步叙述以前,我们应该根据后来学者的一般解释③,看看"河图"、"洛书"的图形是什么样的。实际上,它们是一个简单的幻方和一个用从 1 到 10 的十个数字所组成的十字阵。偶(阴)数用黑点表示,奇(阳)数则用白点表示②。

图 58 和图 59 所示的是通常见到的形式,在《易经》的近代版本以及其他地方也是这样表示。洛书是一个简单的幻方,在这个幻方中,数字按对角线、横线或竖线相加,结果都等于 15。这个图形可以发展成一个卍字形的图形④。 河图则是这样

① 参看陈槃(1—4)。

② 大家都知道,十二世纪的朱熹曾把这两个图的名称对换过(《十驾斋养新录》卷一第六至七页)。这里遵循这种办法。

③ 我采用的是陈文涛和李俨的叙述。最完善的讨论见 Granet (5), pp. 176 ff.。宋君荣 [Gaubil (2)] 大概是最早 (1732 年)认识到它与欧洲的幻方相同的人。

④ 关于卍字形与中国的关系,可参阅 Loewenstein (1)。

排列的：在抛开中间的5和10时，奇数和偶数各自相加都等于20[①]。关于这些简单数字排列，有线索可查的最早著作似乎是写于公元80年且含有许多早期资料的《大戴礼记》。这部著作所给出的洛书的数字次序是“二，九，四；七，五，三；六，一，八”[②]。但它是在讲九宫或明堂九殿时给出的。九宫据说是皇帝按季节定时去祭祀的神宫。关于明堂的古代传说总是与“洛书”的图形纠缠在一起，详细的说明（但不是全部令人信服的）可在葛兰言的著作中找到[③]。

刚才提到的伪书中，至少有一部可大致确定为属于后汉时期（公元一或二世纪），其中有一段指的显然是洛书的幻方[④]：

> 阳在运行中前进，由七变到九，象征着气的兴盛；阴在运行中后退，由八变到六，象征

① “河图”的真正意义是：它按照特有的符号关系，把这些数字与四时、五行等的关系体现出来（参看本书第二卷第261页）。

② 《大戴礼记》卷六十七。

③ 参看 Granet (5), pp. 177 ff.; (1), pp. 116, 478; 亦可参看 Soothill (5)。

④ 《易纬轮凿度》卷二第三页正面。引自《古微书》卷十六第二页正面《易纬河图书》的注释。

着气的衰退。所以，太乙采用了这些数，让它们循环于九宫之间[①]。不管是沿着四个方位点的方向相加，或依照四个中间方位点相加[②]，所得到的和总是15。[③]

〈阳动而进，变七之九，象其气之息也；阴动而退，变八之六，象其气之消也。故太乙取其数以行九宫，四正四维，皆合于十五。〉

由此可见，"九宫"是幻方的九个格子。在另一些纬书中对河图的图形有清楚的叙述[④]。

自此以后，只提一提河图、洛书的书（像公元100年前后的《前汉书》那样）[⑤]仍继续出现，但也出现了一些指出幻方存在的叙事文。如果徐岳的《数术记遗》确实是写于公元190年，那末，其中关于"九宫"计算方法的叙述就是有意义的。它说"九宫算五行，参数犹如循环"，这可能完全是指河图

① 像皇帝在行宫之间循环一样。

② 即三纵、三横和二斜上的三数的和。

③ 由卜德（Bodde）译成英文，见 Fêng Yu-Lan (1), vol. 2, p. 101。

④ 见《易纬河图书》，载于《古微书》卷十六第一页正面。

⑤ 《前汉书》卷二十七上第一页正面。

的。六世纪的注释者甄鸾立即解释道："九宫者，即二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。"这就明显地描绘出后来被认为是洛书的图形。大约一个多世纪以前的堪舆家关朗所写的《易传》，也同样提供了有关河图的明确的记述，他说："七在前，六在后，八在左，九在右。"[①]在六世纪，这类问题必定已普遍地为人们所了解，因为与甄鸾同时代的卢辩在注释《大戴礼记》时，就是这样解释这些神秘数字的[②]。

尽管人们对于徐岳和关朗仍有怀疑，但幻方的真正发明者的生活年代远在陈抟证明河图、洛书是幻方图形之前，则是十分清楚的。陈抟是一个著名的道家人物，著称在唐宋之间（公元940年

① 朱熹在他的《易学启蒙》（1186年）中接受了这种说法并加以引用，但后来的学者曾怀疑过它的真实性，指出它应该是始于十一世纪前半叶的。关朗（或后来的作者阮逸）也叙述过洛书。关朗的原文现已散佚，但被发现已被引于《图书集成·经籍典》卷五十一中。

② 在唐代，人们也很了解这些东西，例如，王希明的《太乙金镜式经》就提到过它们。关于这个问题，我愿意提出苏嘉庆关于洛书数字排列的另一种说法，它出现在《图书集成·经籍典》卷五十一中，但我们无法断定苏嘉庆的年代。

前后)[①]，他的贡献是十八世纪的胡渭最先指出的[②]。陈抟在他的《易龙图》中对这个题目十分注意。他的思想通过若干学者传给宋初的刘牧，并通过刘牧的《易数钩隐图》[③]流传下来。这些宋代学者以及后来的思想家的很多引文都被保存在《图书集成》中[④]。不用说，这些引文大多数或者与占卜有关(例如1220年前后邢凯的《坦斋通篇》)[⑤]，或者把河图、洛书的图形纳入符号关系的框架中(参看本书第二卷第十三章第四节)，即把它与音乐联系起来，例如，1740年前后江永的《律吕新论》。

在十三世纪以前，幻方的发展是明显地与数学思想的主流分开的。中国人称为“纵横图”的知识，首先由杨辉在他的《续古摘奇算法》(1275年)中作为一个数学问题来加以研究，他所作的某些幻方十分复杂(图60)。杨辉还提出了构造这种图

① 我们已在第二卷第十六章第四节谈“太极图”时提到过他。

② 在他的《易图明辨》(1706年)中。

③ 刘牧把河图和洛书弄混了，但蔡元定在朱熹把它记入《易经》以前，就已经改正了刘牧的错误。

④ 《图书集成·经籍典》卷五十一至五十八。

⑤ 《坦斋通篇》第七页反面。

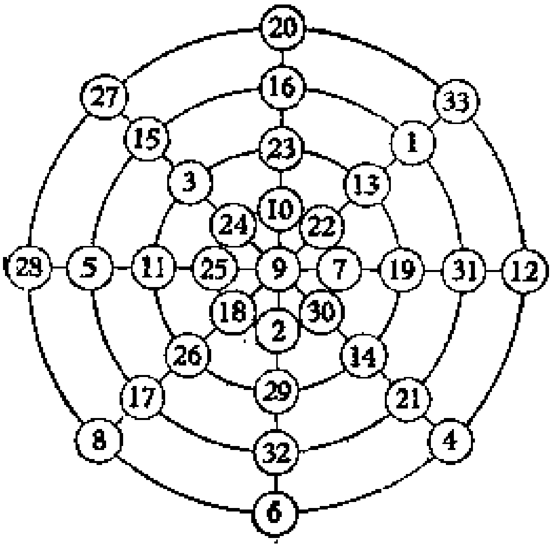
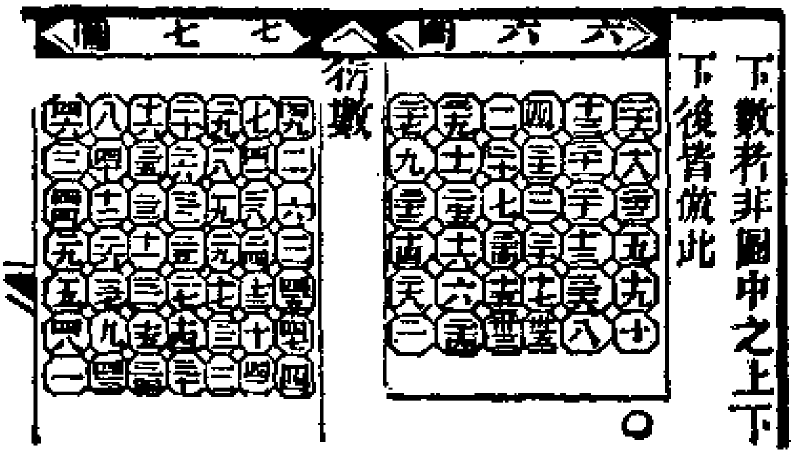


图 60 杨辉《续古摘奇算法》(1275 年)
中的一个幻方。根据李俨的考证

形的一些简单规则。例如，如果把数字一到十六安放在四行四列的方阵上，并且分别把内方与外方的对角数字对换，即得一个行、列、对角线之和都是34的幻方。程大位在 1593 年的《算法统宗》中继承了杨辉的工作，他给出了十四个图(图 61)。方中通在《数度衍》(1661 年)增添了几个；张潮在同时代的《心斋杂俎》的"算法图补"中又添上了更多的图。这个时期以及十八世纪的日本数学家对这一方面的组合分析也极感兴趣[①]。在中国，这种兴趣仍然延续不断，并出现了一个像保其寿那样

① 参看 Smith & Mikami (1), pp. 57, 69, 116, 177。



27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

图 61　程大位《算法统宗》(1593 年)中的两个幻方。
右边那一个已由李俨改成阿拉伯数字示于下图

的天才爱好者，他在十九世纪后半叶出版的《碧奈山房集》甚至包含有一些立体的幻方(见图 62)。

在这段前言性的叙述中，似乎是汉学的内容比数学多，但是，这是必不可少的，因为在西方科学史家当中至今仍流传着这样一种说法①："幻方是黄帝所发明的，如所周知，他在公元前二十七世

① 参看 Struik (2), p. 34 (1953 年)。

纪统治中国。"因此，除非是把中国的年代弄清楚，否则就不可能与欧洲幻方的历史进行比较。但我们现在是能够作这样的比较的。在西方，关于幻方的最早的讨论出现在士麦拿的塞翁的著作中，前面已经提到，这部著作约写于公元130年①。因此，它明显地晚于《大戴礼记》。如果我们接受中国人的传说，认为河图和洛书确是幻方，那末，同幻方在中国第一次出现的年代相比，欧洲要晚好几个世纪。尽管对这一点存在着颇为可疑之点，但是，幻方在中国出现的年代至少可以说比希腊要早两个世纪。毫无疑问，在这个时期已有相互交流的可能性，但幻方在东、西方的起源似乎是以各自独立的说法更为可信。

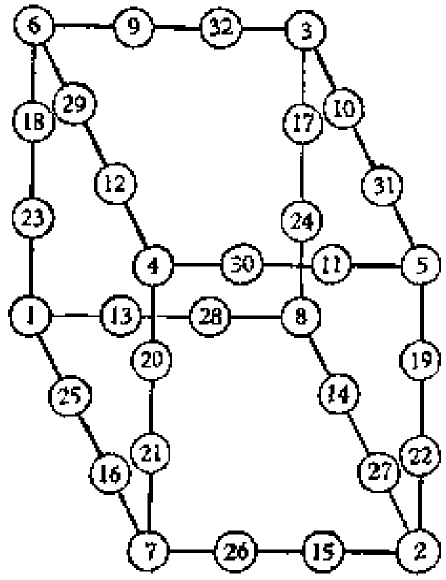


图 62 保其寿《碧奈山房集》中的一个立体幻方

在塞翁以后，直到阿拉伯人开始对幻方发生兴趣为止，幻方在西方几无进展；以后，正好与杨

① 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 272 (tr. Dupuis)。

辉同时，有三部涉及幻方的著作。阿拉伯人的这些著作首先是属于幻术方面的——阿布-尔-阿巴斯·布尼（Abū-l-Abbas al-Būnī，卒于1225年）[1]的《(幻术）道具之书》（*The Kitāb al-Khawāss*）和纳杰姆·丁·卢布迪（Najm al-Dīn al-Lubūdī，1211—1267年）题献给曼苏尔（al-Mansūr）的幻方论[2]。但是，真正与杨辉相当的人物是拜占廷的希腊人曼纽尔·莫斯霍普洛斯（Manuel Moschopoulos)，他的时代可能比杨辉稍晚（1295—1316年著称)，他应尼古拉斯·拉达斯（Nicholas Rhabdas）的要求，写了一部有关"平方数"（*tetragonon arithmon*，τετραγώνων ἀριθμῶν）的著作，这部书描述怎样在方形内排列数字1到n^2，使每行、每列或对角线上的数字之和都等于$\frac{1}{2}n(n^2+1)$[3]。同杨辉的工作一样，这是纯数学的，而不属于幻术[4]。有趣的是，在第一个幻方构造图出现

① 参看 Sarton (1), vol. 2, p. 596。

② 参看 Sarton (1), vol. 2, p. 624。

③ 参看 Sarton (1), vol. 3, pp. 119, 679。

④ 译文见 Tannery (2)。

后，经过了许多个世纪，才几乎同在十三世纪末在中国和拜占廷帝国对它进行严格的科学处理①。后来，他们像内特谢姆（Nettesheim）的阿格里帕（Agrippa，十六世纪）② 一样，把这些图形弄成神秘哲学的一个重要部分。

一些与幻方相联系的问题被称为约瑟问题（Josephus problem）③。把数目一定的一群人排成一个圆圈。这些人分为两类（土耳其人与基督教徒，作为牺牲品的受害者与其他人，继承人与被剥夺继承权的人，等等），问题是在于要把这些人按照一定的方法排成圆圈，使得在顺序计数时，每一个属于一定周期数（譬如15）的人都属于同一类。这个问题可以追溯到罗马军队十杀一的演习，但在十世纪以前，欧洲很少提到它。它的来源是不清楚的，有可能是藤原通宪在十二世纪所处理的排列问题之一，并且可以肯定，它曾引起后期日本

① 精确的洛书图形已在十三世纪欧洲的手抄本中发现［Smith (1), vol. 2, p. 597］。

② 参看 Nowotny (1); Calder (1)。

③ 参看 Ahrens (1)。

数学家的极大兴趣(参见图 63)①。但我们不能指出在中国的数学著作中曾出现过这种“继子立”问题的实例。

图 63　日本著作——吉田光由的《尘劫记》(1634 年)——中的一个约瑟问题

① 参看 Smith (1), vol. 2, p. 541; Smith & Mikami (1), pp. 89 ff.; Papinot (1), p. 99。

五、自然数的逻辑演算

算术计算中的基本运算，并不是始终被认为只有四种(加、减、乘、除)。在不同的历史时期[①]，其中还包括有其他运算，例如二倍法、减半法和开方等。但是，中国人似乎一直只承认近代的四种[②]。

(1) 四则运算

关于加法(即“并”，分数的加法称为“合”，求出的和有时称为“都数”)[③]，没有多少可说的。公元三世纪以前的著作常常把各个数详细地写出；但是很明显，从战国时期开始，加法是用筹码在算

---

① 如史密斯[Smith (1), vol. 2, pp. 32 ff.]、门宁格[Menninger (1)]和特罗弗克[Tropfke (1)]所指出的那样。

② 从中世纪晚期到十八世纪，人们普遍地想从河图和洛书导出基本的运算。对于这些异想天开的分析，郑金德(译音)[Chêng Chin-Tê (1)]曾作过简略的评述。

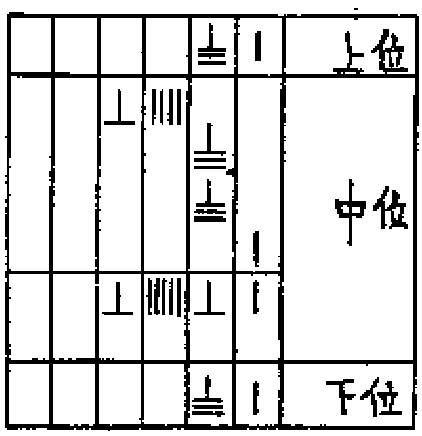
③ 因为中国古代数学著作的专门术语与近代所用的大不相同，所以应该把它们放在这里，这样，对愿意进一步研究这个问题的人可能有所帮助。

盘上按照位值制进行的，而在我们应该使用零号的地方留下空位。虽然中国的书法总是一行行从上写到下，但是数字似乎是从左到右横写的。加数的和单独放在下面。进位法肯定是很古老的，它是算盘运算的自然结果。

减法也用筹码按同样方法进行。从《九章算术》的时代到现在都称之为“减”。相减的结果称为“余”或“差”，像加法的和一样，差也是单独放的，但却放在上面。

正如加法是代替较为繁重的数数求答案的办法一样，乘法是“加法的简化”，它把许多加数“叠在一起”。“乘”这个字的应用似乎正是出于这样的想法；这个字的一般意义是坐车或骑马，在目前的场合下，各个加数可以设想为马车夫控制下的一群马。事实上，乘数过去确实是放在最上面的位置（上位）上的。乘法是除法之逆，它们的图式如下：

	乘法	除法
上位	乘数	商数
中位	积	被除数
下位	被乘数	除数



以上位乘下位("以上命下")，对于十位栏上的每个数，其乘积向左移一栏("言十即过")。附图就是遵循这个方法进行的，它表示81乘81的乘法。首先把乘数与被乘数放在上位和下位，然后"上八呼下八"，得64，把它写在左边两栏中，表示6400，然后上八呼下一，得8，写在中间，这时上八被消去；接着，上一被下八所呼，下八被消去，最后"一呼一"得1，放在个位栏中。把这些乘积加起来，便得到最后的积[①]。这个方法在欧洲是不常见的，但它与特雷维索(Treviso)算术(1478年)相似[②]。现在我们通用的近代方法(中世纪的欧洲称它为棋盘法)大概就是起源于这种计算。介于棋盘法与古老的中国算盘之间的形式，已在巴斯卡拉(Bhāskara)[③]以及其他印度数学家的著作中发现。起源于

① 参见拉格朗热(Lagrange)对"反乘法"的辩解。我们在这里选用这个特例，是因为它在《孙子算经》(卷上第四页正反面)中有详细的说明。

② 参看 Smith (1), vol. 2, p. 109。

③ 公元1150年前后；参看 Taylor (1) tr. p. 10。在十世纪的巴克沙里(Bakshali)手抄本中也有。见 Renou & Filliozat (1), vol. 2, p. 175。

印度或阿拉伯的格子乘法（*Gelosia*）[1]，在《算法统宗》（1593年）以前，从未在中国的著作中出现过，它在《算法统宗》中被称为“因乘图”或“铺地锦”。

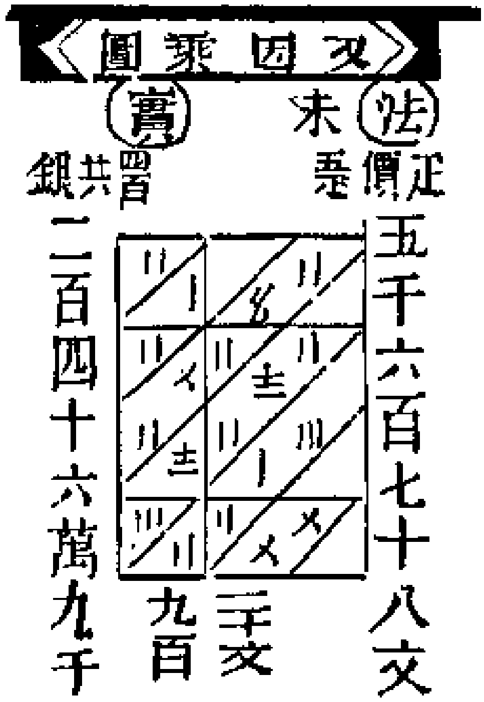


图 64　格子乘法，采自《算法统宗》（1593 年）

乘法表（九九歌诀）在中国自然是很古老的。与巴比伦人按竖栏排列数字的作法不同，出现在古代中国著作中的表是简单地用文字写出来的。李俨（8）和严敦杰（2）曾搜集了古书中所记录的歌诀；其中最早的大概是公元前四世纪的《管子》中的一些片断[2]。严敦杰还曾描述过在额济纳旗居延烽遗址发现的竹简[3]上的乘法表，那是公元前100年前后的汉代遗物。直到宋代，这些乘法表的某些部分仍然继续出现在书中，例如，

① 参看 Smith (1), vol. 2, p. 115。

② 《管子》卷五十八和卷八十。

③ 在这些竹简上还写着许多与《九章算术》相似的算术问题。

永亨的《搜采异闻录》中就有这类东西[①]。所谓毕达哥拉斯式的乘法表，即把数字排在两个坐标上的表(很像伦敦的公共汽车价目表)，似乎是在八世纪前后出现在中国的[②]，但是排成了三角阵的形式[③]。

对于某一个数的平方，汉代及汉以后的数学家都很自然地称它为“方”，“乘方”的称法产生于宋代，现代则称为“自乘”。另外一个现代称呼是“平方”，它在古代和现代都是为了与“立方”相区别的。

除法和上面所描述的乘法相似，也应用筹码在竖栏里进行。“除”这个字始终是这种运算的专用名词。除数称为“法”，被除数称为“实”。“法”这个字显然与法律(尤其是成文法)中的“法”字相同[④]。如果除法最初是由于进行土地丈量而产生的，那末，除数自然就是用法律固定的单位量度，

---

① 《搜采异闻录》卷三第四页正面。

② 见李俨编的敦煌手抄本［李俨(7)］。参看前面第19，79页。

③ 参看 Smith (1), vol. 2, pp. 125, 127。

④ 参看本书第二卷第十二章和第十八章第六节。

被除数就是田地的真实长度。孙子(三世纪)曾说过[①]，如果被除数(实)有余，则取除数为母(分母)，余数为子(分子)。因此，$6562\div9=729\frac{1}{9}$。"法"和"实"这两个名词后来在一系列其他运算中，包括开方和二次、三次及更高次的数字方程中[②]，逐渐获得了特殊的技术意义。这就表明，许多复杂的方法都起源于除法中的数字处理。在夏侯阳的时代，除法运算所得到的结果被称为"商"。在传教士来华以前，中国从未使用过[③]"帆船法"[④]。在宋代以后，由于珠算的兴起，除法歌诀是很普遍的。

(2) 根

古代开平方(即"开方"、"开方除之"等)和开立方的方法，与现今的方法基本上是相同的。阿

① 《孙子算经》卷二第一页反面。

② 参看后面第143，283页。亦可参阅 Wang Ling (2), vol. 1, pp. 132 ff., 217 ff.。

③ 参看李俨(2)，第227页。

④ 参看 Smith (1), vol. 2, p. 136。

拉伯的数学家曾设想一个平方数是从根生长起来的，而拉丁的作者们则设想根是几何正方形的一边。“根”（*radix*）这个术语出自阿拉伯语[1]，而“边”（*latus*）这个术语则出自罗马语。古代中国开方的方法也是从几何上的考察提出来的，汉代数学家精练了这些方法，从而为宋代大代数学家解决数字方程及超先发现霍纳方法打下了坚实的基础[2]。霍纳方法早已暗含在《九章算术》中，关于暗含的程度，王铃和李约瑟［Wang & Needham (1)］曾详细讨论过，他们解释了汉代算盘运算的各个步骤。只要重演汉代数学家在计算《九章算术》求根问题时的算筹布置，就可以看出，宋代天元术[3]是怎样从这一过程自然地发展出来的。

求平方根方法的几何基础大致可以肯定是刘徽用图示出的。《九章算术》近代版本附有戴震所

---

① 关于“根”这个近代中国数学术语的起源，甘兹（Gandz）与马氏之间曾有过争论。马氏论证了根字是古代的字，但这并不能解决问题。他们两人似乎都不知道，古代中国关于平方根和立方根的术语是很不相同的。“根”字的应用不能追溯到十四世纪受到阿拉伯的影响以前，也有可能不早于耶稣会传教士的到来。

② 参看后面第 284 页。

③ 参看后面第 290 页。

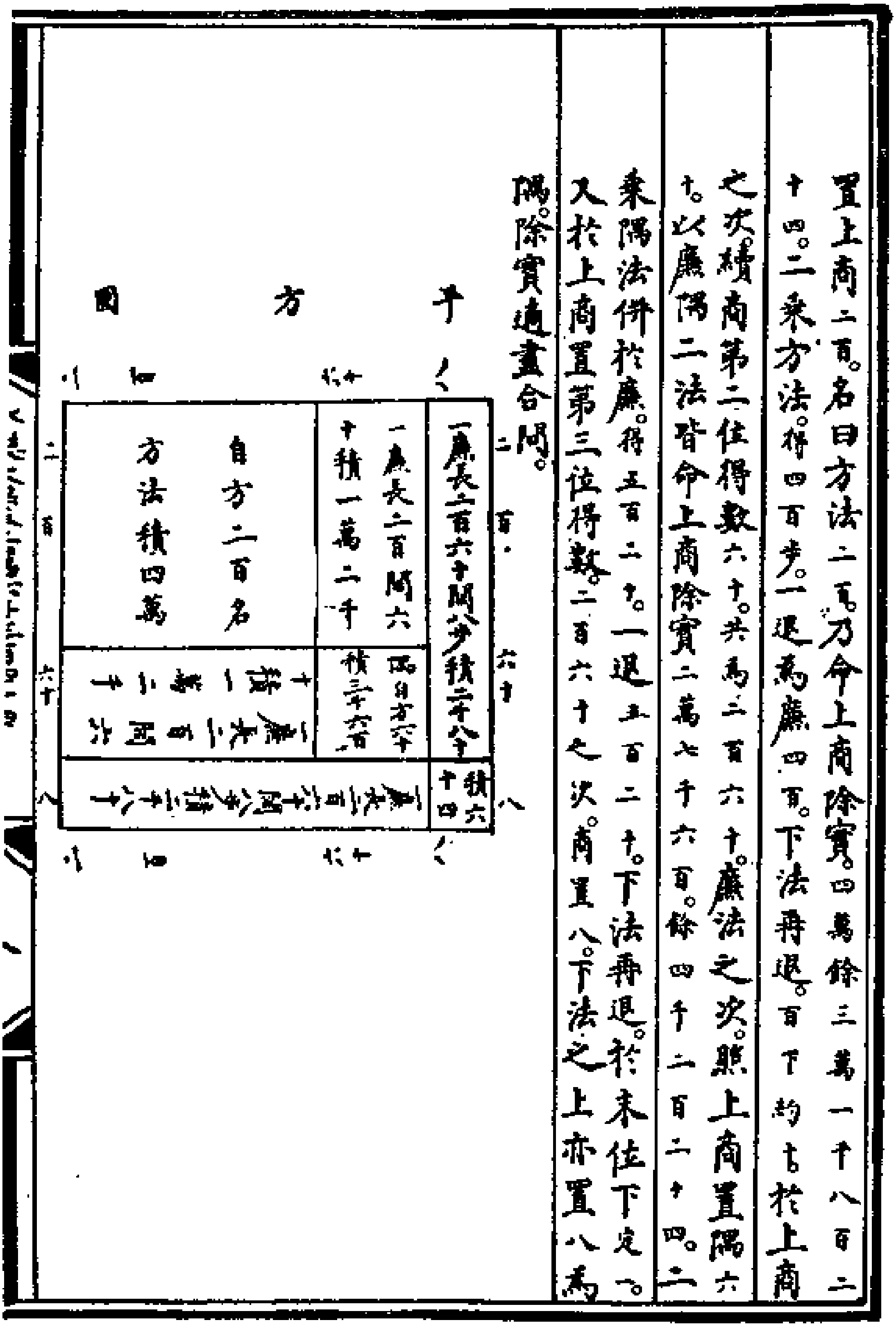

置上商二百。名曰方法二百。乃命上商除實。四萬。餘三萬一千八百二十四。二乘方法。得四百步。一退為廉四百。下法再退。百下約百於上商之次。積商第二位得數六十。共為二百六十。廉法之次。照上商置隅六十。以廉隅二法皆命上商除實二萬七千六百。餘四千二百二十四。二乘隅法併於廉。得五百二十。一退五百二十。下法再退。於末位下定。又於上商置第三位得數。二百六十之次。商置八。下法之上亦置八為隅。除實適盡合問。

图 65 说明开平方过程的图，出自杨辉的《详解九章算法纂类》(1261 年)，采自《永乐大典》手抄本 (1407 年) 卷一六三四四(藏于剑桥大学图书馆)

补入的一张图，它表明，如果把一直线分成两部分，则以全线构成的正方形，等于两条分线各自构成的正方形之和再加上这两条分线所构成的矩形的两倍，用代数方程表示时是：$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$。这些量的命名如图中所示，“方”表示其中较大的正方形，“隅”表示较小的正方形，两个“廉”表示两个矩形。现存最古老的图是杨辉1261年的《详解九章算法纂类》中的那一个，这部书以抄本的形式保存在《永乐大典》卷一六三四四中（图65）。实际上，这些术语最初是在《孙子算经》中出现的，至于图形的面积，刘徽曾用不同的颜色表示过。在列表计算时，位于最上面一行的“商”就是所要求的根，“实”就是用来求根的那个数（位于第二行），面“方法”、“廉法”、“隅法”和“下法”（位于下面的几行），是计算中暂时出现的因子。

汉代人所用的图与欧几里得（公元前300年前后）所给出的图[①]相似。欧几里得是用几何的方法论证上面的命题的，不过，这个命题本身可能早就为人们所知道了[②]。但在这个早期阶段，a和b可

① 参看 *Elements*, bk. II, prop. iv。

② 参看 Smith (1) vol. 2, p. 145。

能是任意数，当时还没有用不同位值的数字来表示它们（例如 $a=10b$）的概念。但是在公元前100年左右的《九章算术》中，这种做法已经完全有意识地出现了，刘徽（公元260年著称）还了解到，这种办法可以无限制地推广。在欧洲，开方法最早似乎是出现在亚历山大里亚城的塞翁[①]的著作中，那是公元390年前后的事（即与夏侯阳的时代相近；而离刘徽的时代稍远），他用六十进位的分数开平方，从而清楚地表明，他具有把 a 和 b 看作一定数字级数的概念。欧洲开平方和开立方的近代方法是在普拉努德斯（Maximus Planudes，1340年前后）的时代和帕乔利（Pacioli）的时代之间提出的，普拉努德斯仍然应用塞翁时代的方法，而帕乔利则在1494年给出一个与《九章算术》相似的方法，在这个方法中，根的数字是按位值一位一位分别求出的[②]。我们不知道在这个期间内欧洲人受到什么启发，但可以肯定，在1430年前后，吉亚斯·

① 不要和二世纪士麦拿的塞翁相混淆，士麦拿的塞翁是研究幻方的第一个欧洲人；参看 Sarton (1), vol. 1, pp. 272, 367。并见前面第119, 134页。

② 参看 Smith (1), vol. 2, p. 146。

丁·贾姆希德·卡希(Ghiyāth al-Dīn Jamshīd al-Kāshī)① 在他的《计算之钥》(*Miftah al-Hisāh*)中说明了开方的方法②。他的开方法也出现在霍纳方法之前，正好与中国数学家贾宪(1100年前后)等人的情况相似③。帕乔利的开平方法是成

① 他是兀鲁伯[1] (Ulūgh Beg) 1420 年在撒马尔罕建立的天文台的第一任台长。详情见后面第 196 页。

② 这部书曾为卢凯 [Luckey (1)] 研究过，并由罗森菲尔德和尤什凯维奇 [Rosenfeld & Yushkevitch (1)] 译成俄文。

③ 参看后面第 301 页。这种算法从中国传出的具体情况，见 Yushkevitch (1); Rosenfeld & Yushkevitch (1), p. 386。在当时一段相当长的时期内，中国学者与伊斯兰学者之间的关系是很密切的。远在1221年，道家人物邱长春就记载过在撒马尔罕会见一个天文台台长——中国天文学家李某——的情况 [《长春真人西游记》卷上第十三页反面; Waley (10), p. 97]。1260 年在马拉加至少有一个中国天文学家傅孟吉 (Fu Mêng-Chi)，而在 1267 年札马鲁丁率领他的天文学代表团到达北京。在十四世纪期间，有一些穆斯林数学家住在北京，他们的著作（主要是天文学和占星学方面的），大多已译成中文(见前面第 108 页)。后来，在 1420 年，有一个重要的帖木儿使团由沙鲁克 (Shāh Rukh, 即兀鲁伯的父亲) 从撒马尔罕派往北京，这个使团以吉亚斯·丁-伊·纳卡什 (Ghiyāth al-Dīn-i Naqqash)为书记，随从人员不少于 77 人(参看《明史》卷三三二第二十三页反面)。有趣的是，由阿尔卡西制订的兀鲁伯历有一卷专论中国的历法[参看 Sédillot (3)]。

1) 在第一卷译为乌鲁格·贝格。——译者

功的。在开立方方面，甚至到了十六世纪，欧洲数学家的方法仍很落后，一直到十七世纪，才引入了应用立体模型使方法具体化的步骤①。《九章算术》的计算程序有力地表明，汉代的数学家已应用了这样的模型或以此模型为基础的想法②。

六、计算工具

如果手指计算法可以说是计算工具的话，那末，它无疑是最早的一种。在这方面，中国古代著作中没有多少明确的资料。伊斯特莱克［Eastlake (1)］和卫聚贤(2)曾搜集了一些有关这个题目的情况③。正如理查森（L. J. Richardson）所指出，

① 参看 Smith (1), vol. 2, p. 148。

② 从《九第算术注》（卷四第十四页正面和第十八页正面）可以看到，三世纪的刘徽和七世纪的李淳风都重视立体模型的应用，这种方法称为叠棊。据克罗宁［Cronin (1), p. 197］推测，利玛窦提供的克拉维乌斯的著作"第一次用中文揭露整数和分数的开平方法与开立方法"。从前面所有事实看来，克罗宁这种说法是不可信的。

③ 卫聚贤的著作企图从设想的古代手势得到数字的语源，这种做法意义不大。

虽然手指计算在希腊人和罗马人当中是十分普遍的，但在欧洲，在710年前后比德（Bede）的《手势数字讨论》（*De Loguela per Gestum Digitorum*）出现以前，从来没有这种论著①。十三世纪与十四世纪的波斯和阿拉伯有这种著作②。但是，专门论述这种内容的中国著作却没有发现过。

勒穆瓦纳（Lemoine）把手指计算分为三种类型：第一种是只用伸出的手指；第二种是令手指节搭配各种数字；第三种是最复杂的，在这种类型中，数字用各种配合的手指屈伸位置来表示。第一种应用在交易中，并且肯定与著名的“猜拳”有关，后者是任何一个出席过中国宴会的人都十分熟悉的③。这与罗马人的 *Micatio*（阿拉伯语 *mukhāraja*，意语 *morra*，法语 *mourre*）数字④似

① 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 510。其中那些古典的插图可能出自 Pacioli, *Summa de Arithmetica* (1494)。

② 参看 Sarton (1), vol. 3, p. 1533；勒穆瓦纳曾作了杰出的研究。

③ 两个猜者同时伸出一个或多个手指，并在伸出时猜所伸出手指的总数，猜对者获胜。

④ 阿拉伯人在占卜时使用着它，这与圆形的步天规有关（见第二十六章第九节，那里将讨论这些东西同拜占廷的星棋盘和中国古代占卜用的栻盘之间的关系）。

乎是相同的。第二种方法[①]在中国曾广泛地应用过，它与早期的历法计算有关，因为根据习用的惯例，手上的指节数可以表示19，28等数字。第三种方法在亚洲大部分地区都已发现，它似乎起源于巴比伦；勒穆瓦纳曾指出，比德的描述与波斯和阿拉伯的许多作品中的描述之间的有着详细的对应关系。但是，中国的系统则有一些不同，《算法统宗》[②]所给出的一种较晚期的形式，是用不同的手指来代表示各位小数和10的各个幂次的[③]。

有一种用于记数而不是用于计算的简单方法是结绳法；秘鲁人的结绳法是最著名的，洛克(Locke)曾作过详细的描述[④]。在中国古代的文献中，有许多明显地提到应用结绳的叙述，其中最突出的可能就是《易经》(公元前三世纪)，它记载说[⑤]："上古结绳而治。"在《庄子》和《道德经》的著

① 参看 Bayley (1)。

② 《算法统宗》卷十二第九页反面。

③ 亦可参看《图书集成·历法典》卷一二五第十页反面。同时参看 Leupold (2)。

④ 有一些实例表明，在历法计算中有用到它的明显痕迹[Nordenskiöld (1)]。

⑤ 《易经·系辞》下卷二 [R. Wilhelm (2), vol. 2, p. 256]。参看后面第213页。

名卷帙中亦有结绳的叙述[1]。 李俨 (8) 指出过几段较晚的记载[2]。尤其有趣的是西蒙 [Simon (1)] 关于琉球群岛的土著应用结绳记数的描述[3]；在中国的苗、彝等少数民族当中至今仍然有可能找到这种方法。这又是东亚文化与美洲印第安人文化之间的另一个奇异的相似之处。

在各个不同的历史时期，除了通用的计算盘本身（图66）之外，中国数学家使用了三种主要的计算工具：(1)简单的算筹；(2)刻有数字的算筹，这类似于内皮尔 (Napier) 的骨筹；(3)珠算盘。关于这些计算工具的历史起源，人们已有很多争论，但正如后面的叙述所指出，我们对这个问题并不是毫无所知的。我们最好先把在中国发生的各种事件的最可能的经过情形确定下来，而把西方的平行进展这个难题放在后面。

当然，中国数学史家已充分讨论过这些问题。李俨 (9) 有一篇关于珠算盘历史的专题论文。在

① 《道德经》卷八十。

② 不过，没有任何证据可说明中国在有史以后还在应用结绳法。

③ 参看三上义夫 (14)。

西文文献中最有价值的贡献可能是德拉库佩里 [de Lacouperie (2)] 和维散累 [Vissière, (1)] 的论文，后者并把梅文鼎1700年的《古算器考》部分译成西文[①]。关于算筹，最完善的评述也是李俨写的[②]。

(1) 算　筹

关于简单算筹（"算"，"筹"，"策"）的古老性，现有的铭文证据是战国时期（公元前三、四世纪）货币上所出现的算筹数字。但是，在文学方面也存在那个时期的证据，其中最著名的也许是《道德经》[③]，老子在那里别有风趣地说："优秀的数学家是不使用算筹的。"（善数不用筹策）[④] 汉朝建立

① 在梅文鼎写这部书的时候，有一些重要的中国数学著作尚未发掘出来，但维散累在他的著作中已对梅文鼎的论述作了必要的补充。梅文鼎的这部著述是他在1723年出版的《历算全书》的一部分。

② 参看李俨(4)，第3集，第29页那一节。

③ 《道德经》卷二十七。

④ 由于《太平御览》的印刷错误，德拉库佩里认为引用这句话是无意义的。为了表明在这方面所存在的混乱，可以指出，德拉库佩里的错误还被中国数学家郑金德（译音）[Chêng Chin-Tê (2)] 抄入他用英文写的著作中。

以后，提到筹的地方就更多了[1]。在枚乘(卒于公元前 140 年）的一篇与楚辞相似的赋中就出现过关于算筹的叙述[2]。《前汉书》[3] 说，算筹是径一分、长六寸的细竹棍，二百七十一根可装满一个六

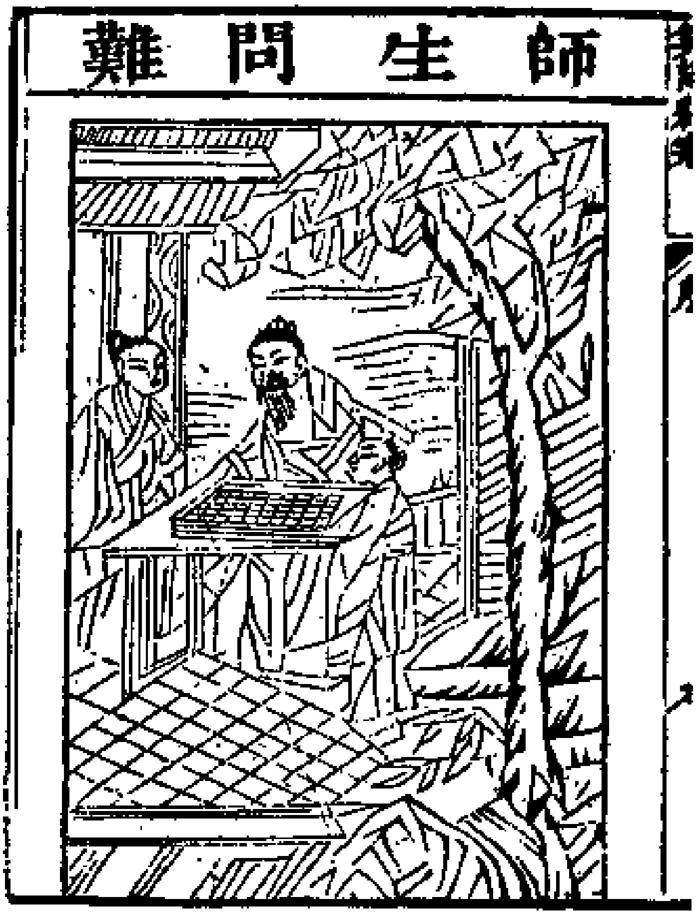


图 66 “师生问难”中的算盘（1593 年《算法统宗》的卷首插图）

① 《淮南子》卷十四第五页反面和第十页正面。

② 参看 Edkins (10), p. 222。

③ 《前汉书·律历志》卷二十一上第二页正面。

角形的筒(六觚)，成为一握[①]。"用它们来测量长度，可精确到百分之一或千分之一寸；测量体积和重量，则不会丢失一粒粟子。"(度长短者不失毫厘，量多少者不失圭撮，权轻重者不失黍絫)[②] 在《史记》[③] 中，司马迁描述了汉高祖与王陵的对话，在对话中汉高祖提到他在各个方面都不如他的三个大将和军师，但是，只有他一个人才知道如何使用他们。在他提到的才能当中，有一项是"运筹策于帷帐之中"。这是公元前202年的事情。从《后汉书》的马融传[④]，我们得知汉初的另一位宰相陈平(卒于公元前 178 年)在应用算筹方面也很著名。此外，还有一个关于秦始皇的大臣赵佗的传说，他后来以一个独立国王的身份统治整个南方，据说在赵佗带兵去南方之前，他已经制成几种不同的算筹[⑤]。这些算筹后来保存在晋安帝(397—419 年)

① 垛积数的一个早期的例子。

② 《说文》(121 年)重述了算筹的长度，它大约相当于我们现在的四吋。

③ 《史记》卷八第三十页正面，西译文见 Chavannes (1), vol. 1, p. 383。但沙畹没有把原文的意义表达出来。

④ 《后汉书》卷九十上第五页反面。

⑤ 这大概发生在公元前 215 年前后。这些材料出自隋以前刘敬叔的著作《异苑》，引自《太平御览》卷七五〇第三页反面。它所提到的很可能是一种专门表示负数的算筹。

的武库中,每根都是一尺长,其中的白色筹是骨制的,其他的黑筹是角制的。从《前汉书》[1]中我们还知道,在《盐铁论》中主张盐铁国有化的首要人物、著名的官员桑弘羊(公元前152—80年,参看后面第四十八章)是一个有名的计算家,因为他善于心计,用不着算筹的帮助。

引证更多的资料是太烦琐了,在这方面,有些材料可以在李俨(4)中找到。我们这里只想再指出几点。王戎(235—306年)是晋朝的一个官员,他非常支持水碓工程,“常常拿着象牙做的算筹,通宵进行计算,简直无法让他停下来”(每自执牙筹,昼夜算计,恒若不足)[2],因面有“牙筹计”之说。在九世纪,算筹是用铸铁做成的[3]。李靖的传记[4]提到,唐代的行政官吏和工程师在腰带上常

① 《前汉书》卷二十四下第十一页正面和第十三页正面,参看 Swann (1), pp. 272, 285。亦可参看《急就篇》(公元前40年前后)卷四第三十四页正面。

② 《世说新语》和《晋书》,引自《太平御览》卷七五〇第二页正面。

③ 《格致镜源》卷四十九第七页反面。引自五代(公元十世纪)陶穀的《清异录》。

④ 《新唐书》卷九十三第四页反面。

系着一个筭囊。筭囊的另一个名称是筭袋，据传说，秦始皇有一次把筭袋扔入东海，后来就从这个袋里生出某种鱼[①]。公元十一世纪，沈括在描述和他同时代的天文家卫朴时，说他“运筹如飞，人眼不能逐”[②]。这种说法使人联想到使用珠算盘时所能达到的速度。晚明以后，很少有关于算筹的报道，毫无疑问，这是由于它们已为珠算盘所取代[③]。在上面的所有叙述中，都设想在进行计算时，是用算筹在算盘上构成筹码数字来实现的。这种方法比书算方便之处，是它比较容易除去那些不再需要的数。总之，在唐代，在算盘上横放的筹码称为卧算，纵立的称为立算。

算筹在文字学上已留下了它们的痕迹，因为大多数计算术语（筭，筹，策）都是竹字头，并且像“推算”、“持筹”等许多词都作为计算上的术语沿用下来了。

---

① 《酉阳杂俎》卷十七第一页反面。

② 《梦溪笔谈》卷八第十一则。

③ 无论如何，珠算盘的应用在1299年的《算学启蒙》中已有叙述。

(2) 刻有数字标志的算筹

带有数字标志的算筹在中国数学中可能是晚期的发展。这些算筹与内皮尔的骨筹实际上似乎是相同的。内皮尔1617年在他的《刺勃道劳奇,或计算用筹》(*Rhabdologiae, seu Numerationis per Virgulas Libri Duo*)中,曾描述了一种以格子乘法为基础的算筹系统(参看前面第141页),好像它的每一列是分开的,并且可以独立地滑动到其他列上。这种滑动算筹在整个十七世纪中一直沿用下来[参见利伯恩(Leybourn)的《明筹记数法;论内皮尔骨筹》(*The Art of Numbring by Speaking-Rods; Vulgarly termed Nepeir's Bones*, 1667年)一书],并且很快就传到中国和日本。在这些国家里,它们引起了很大的兴趣,在论述它们的著作当中,最著名的是有名的学者兼数学家戴震1744年所写的《策算》(参看本书第二卷第十七章第四节)。图67表示出这种算筹的东亚形式。中国所用的一套算筹还包括零筹、平方筹和立方筹,关于它们的使用方法,郑金德[Chêng Chin-Tê (2)]

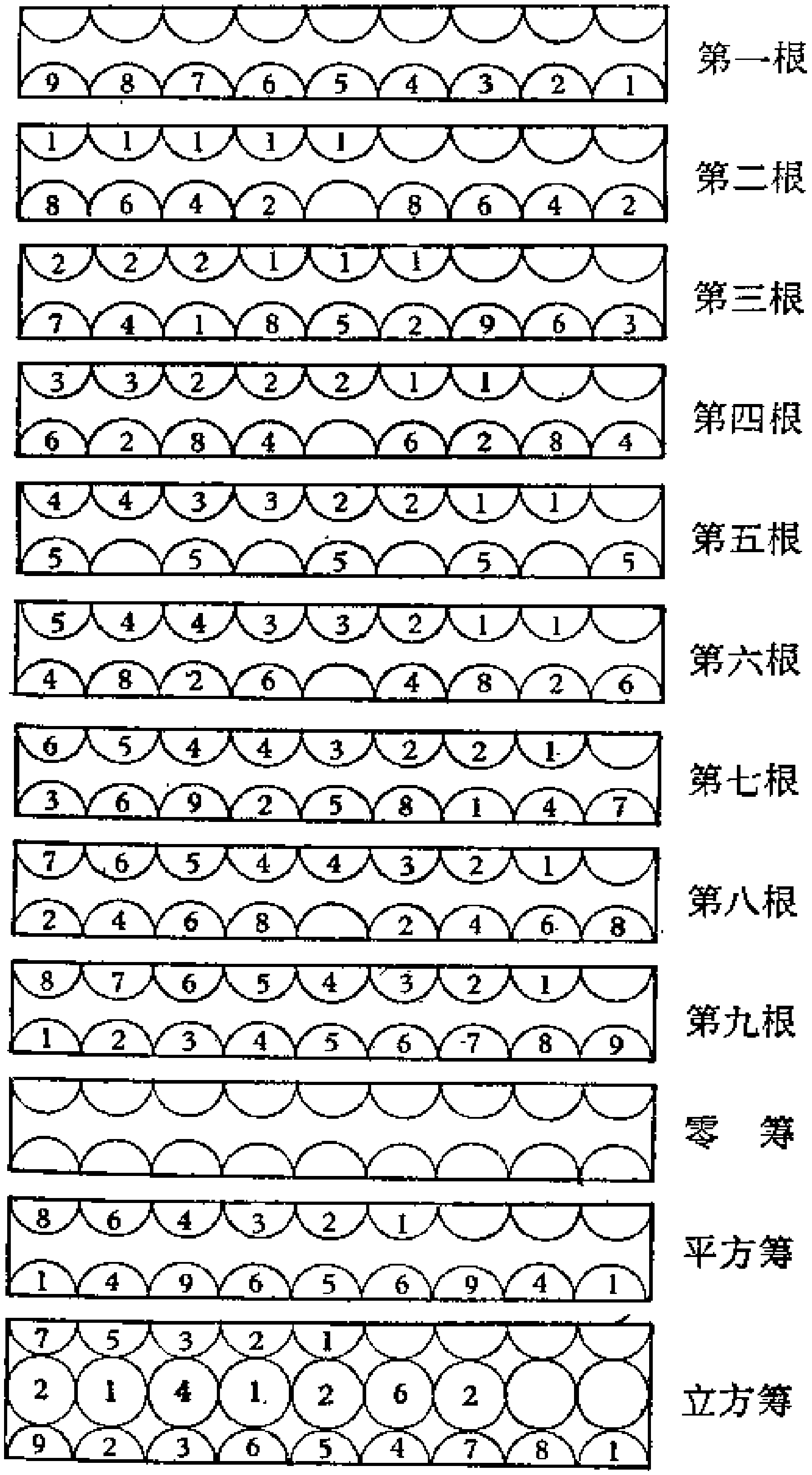


图 67　中国式的内皮尔骨筹(根据郑金德)

有详细的说明。这种算筹与古代的简易算筹同样叫做算筹，这有时会引起混淆。在十九世纪，劳乃宣写了很多关于内皮尔算筹和早期算筹的著作，例如《古筹算考释》及其补编《古筹算考释续编》等。如果对数计算尺和加法器这两种工具不是如此迅速地按照内皮尔的方法发明出来，那末，这种算筹系统的用途可能会更大一些。对数计算尺的发明应归功于冈特（Edmund Gunter）1620年的工作和吴脱德（William Oughtred）1632年的工作①；加法器则是西尔曼（Johann Ciermans）在1640年提出、巴斯噶在1642年完成的，它的优点是使用齿轮机械自动地实现十进位，不需要计算人员去进行这项工作②。当然，计算尺③和简单的计算机也及时地传到中国。图68［采自［Michel (5)］表示出1660年的一根中国式的计算尺。

① 参看 Smith (1), vol. 2, p. 205; Cajori (4)。

② 参看 Lilley (1); Taton (1); Baxendall (1)。

③ 三上义夫［Mikami (1), pp. 13, 14］所用的不恰当的文字有时会引起误解。在说明汉代开方术时，他提到要把一根普通的算筹放在算盘下面，借以表示1，10或10的幂。他把这种做法叫做"借一算"。不用说，这和向朋友借一把计算尺毫无关系。

偶而也有资料谈到一些类似于刻数算筹、但较罕见的数学器械，例如，《戒菴漫笔》①写道：

> 苏州的马怀德（公元1064年前后著称）制作了一副摔星板（手工制的星板）②。这是一组黑檀木制的筹尺，共十二根，长度不等，最长的达到7寸。它们刻有一个指头宽的刻度，从一指到十二指，每指都有更细的分刻度。又有一片象牙筹，四角留空，长有二寸。上面刻有"半指"、"半角"（角度之一半）及"一角"（全角度）等字样。这些筹尺相对反向放置，称为周髀算尺。③

〈苏州马怀德摔星板一副，十二片，乌木为之，自小渐大，大者长七寸余。标为一指、二指以至十二指，俱有细刻，若分寸然。又有象牙一块，长二尺，四

① 这可能是靳贵（1500年前后著称）的《戒菴集》的一部分[1)]。

② 第一个字"摔"是很少见的。"星"字可能是指把各筹尺钉在一起的钉。

③ 由作者译成英文。

1）《戒菴漫笔》是明代李诩的作品，与靳贵的《戒菴集》无关。——译者

角皆缺，上有半指、半角、一角、三角等字。颠倒相向，盖周髀算尺也。〉

关于这些算尺的用法，我们找不到任何说明，它们似乎是为了几何目的而制造的。

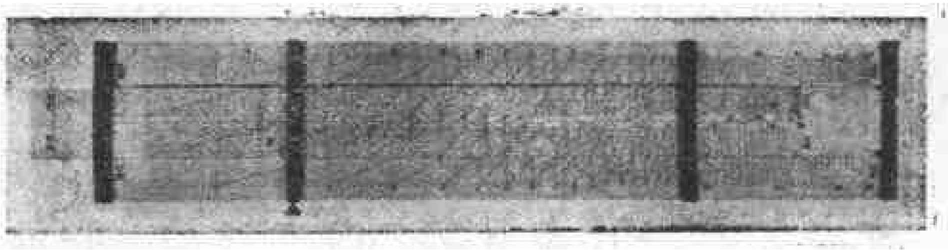


图68　1660年的中国式计算尺（米歇尔摄影）

(3) 珠算盘

关于中国的珠算盘，已经有大量的文献[1]。我们首先应该对珠算盘作一个简单的描述[2]。珠算

---

① 从大量论文中，有参考价值可取的如下：Goschkevitch (1), Rodet (1), Westphal (1), Van Name (1), Knott (1), Kuo Mai-Ying (1), 严敦杰 (3), Leavens (1), Rohrberg (1), Yoshino (1)。

② 不能用近代在欧洲幼儿园中流传的那种退化变质的算盘来评值这种计算工具，在中国和日本，它的应用是有一套特殊的科学方法的，除了那些涉及高等数学的、较狭窄的领域外，它至今仍在使用。

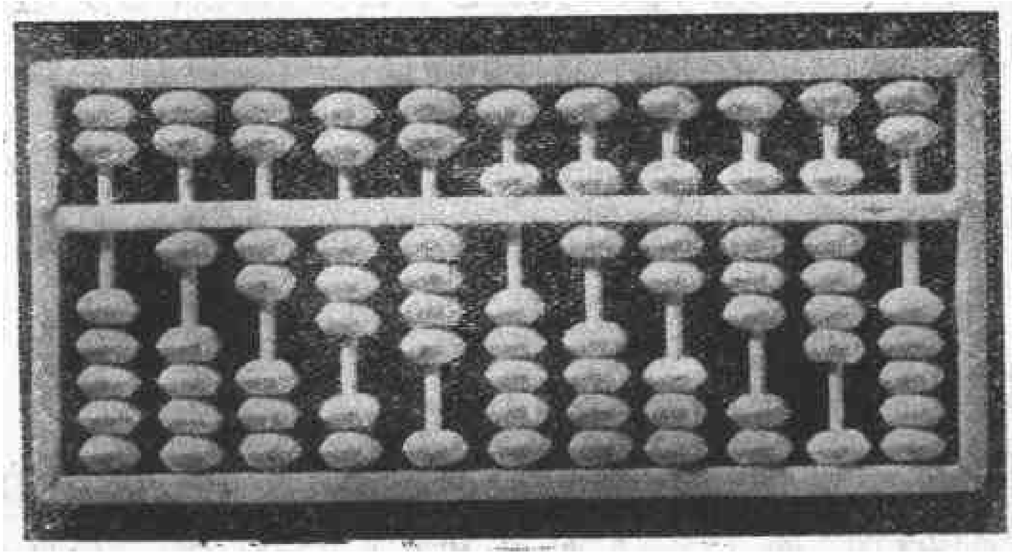


图 69　中国的算盘(原物的照片)

盘又称“算盘”，今天的算盘有一个长方形的木框，木框的两个长边之间有许多粗铜丝组成一系列相互平行的柱（即“位”、“行”或“挡”）。每一根柱都穿着七颗略呈扁形的圆珠。算盘上有一条横梁(或脊梁)把它分成两个不相等的部分，在梁以上总是有两颗珠，在梁以下则有五颗珠，这些珠可以拨近或拨离横梁。每一个算盘通常有 12 根铜柱，但也可以多至 30 根。在同一根柱上梁以上的一颗珠相当于梁以下的五颗珠。每一根柱的数值相差10倍，因此，任何一根柱上的一颗珠都相当于其右面那根柱上同一位置的十颗珠；每一根柱所代表的位值可以随计算者的意图选定。算盘的用法可以从

图69看到,图中所拨定的是123456.789这个数字[①]。算盘横梁以上的两颗珠当中,只用一颗便可以进行加、减、乘这三种基本运算,但对于除法,每一根柱如果能表示出大于10的数,运算时是比较方便的,因此,横梁以上的两颗珠和以下的五颗珠都有用,凑出的总数是15。算盘的左边被认作"前",右边被视为"后";"进"是按10的幂升高,"退"则相反。拨上一个数称为"上",取消一个数则称为"起"、"除"或"去"。对一个计算而言,左边的柱是"首"或"头",最后或右边的柱是"尾"或"末"[②]。正在进行运算的那一位称作"身"或"本位"。诺特[Knott (1)]、史密斯和三上义夫[Smith & Mikami (1)]都叙述过珠算盘的用法,包括开平方与开立方的各种运算。利文斯(Leavens)曾

① 可以看到,只有那些拨到与横梁接触的圆珠才在计算中起记数的作用。

② 这些术语早在公元三世纪就已出现在吴国一个著名的数学家兼占卜家赵达(225—245年著称)的列传中(《三国志》卷六十三第四页正面起)。他有一个称作"头乘尾除"的计算方法。后来同时代的官员(例如公孙滕)想找出这个方法,但却徒劳无功。无论如何,这些解释尚有含糊之处。后面第二十六章第九节,我们将再回到这个问题上来。

提到，甚至在现在的会计工作中，珠算盘也是特别方便的。为了说明从小就受珠算盘训练并已掌握了这种用法的中国和日本计算者的惊人的计算速度，可以提一提这样一个事实：1946年，有一个使用算盘的店员和一个使用电动计算机的美国军官在东京作过一次表演赛，结果，算盘的速度在所有运算（乘法除外）中都获胜了，并且错误较少[Kojima (1)]。当然，它同所有的简单计算工具一样，计算的中间过程没有保留下来，因此很难于核对。

现在我们来考查一下珠算盘的历史。在程大位的《算法统宗》(1593年[①]，见图70）以前，没有任何关于近代式珠算盘的完整叙述，这一事实使许多人（包括梅文鼎）得出结论说，中国直到十五世纪末才知道它。但是，有关珠算盘的最早图说出在1436年的《新编对象四言》[Goodrich (5)][②]。此外，没有人注意到李东阳1513年的《麓堂诗

① 在《算法统宗》以后，有许多关于珠算盘的描述。十七、十八世纪中专门论述珠算的著作的目录，可参看 Wieger (3), p. 264; Wylie (1), p. 103。

② 这部书本身是很有趣的，它是世界上最古老的一部有插图的儿童读物，比科默尼乌斯（Comenius）的 *Orbis Sensualium Pictus*（1658年）早两个世纪。

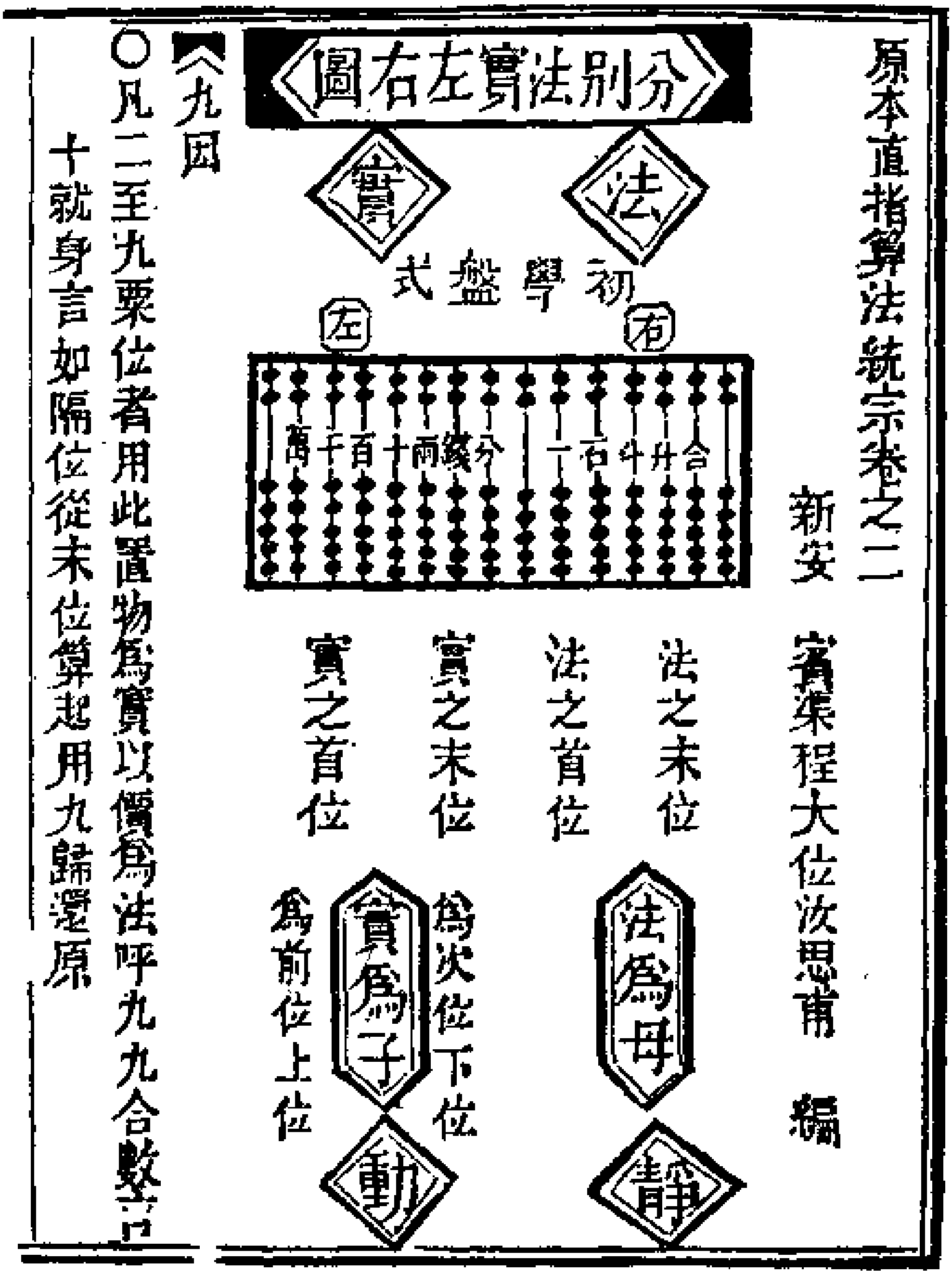


图 70 早期印刷的一张珠算盘图片，
采自 1593 年的《算法统宗》

话》，这部书清楚地把珠算盘描述为“珠之走盘”，是根据珠算的歌诀和基本方法来运算的[1]。但这里出现了一个疑难的问题，这就是东汉末（190年前后）徐岳的《数术记遗》的问题[实际上可能是它的注释者甄鸾（570年前后）所写的]。不管怎样，《数术记遗》是提到“珠算”的最早著作。根据徐岳的说法，他的老师刘会稽曾访问过道家人物天目先生，这位先生为他解释了十四种计算古法，其中有一种确实称为珠算。这一段话过去从未译成英文，现在给出如下：

> （正文）珠算法保持并贯穿四时，并固定三才（天、地、人），就象织物的经纬线一样。
>
> （注释）把一块板用三个横向隔板分开，上面和下面的隔板用来悬挂着可移动的珠（游珠），中间的隔板用于定位[2]（定算位）。每位（柱）有五颗珠。上面一珠的颜色和下面四珠的颜色不同。上面那颗珠相当于五个单位，下面四颗珠当中每一颗珠相当于一个单位。

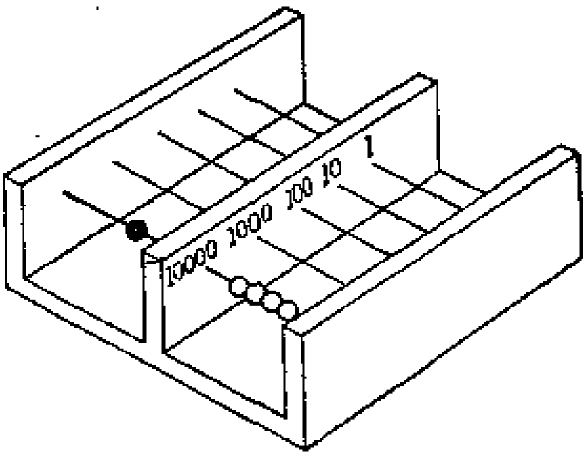
① 《麓堂诗话》第三页正面和第四页反面。

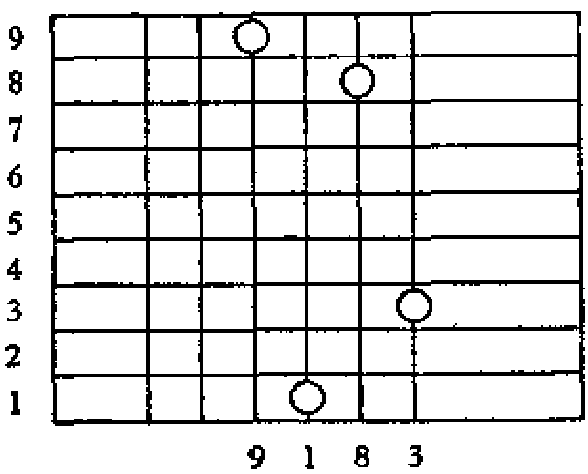
② 即是十、百、千等等。这是一个很好的想法，近代算盘通常是不作记号的。

因为四颗珠上下移动，所以称它“保持和贯穿四时”；由于有三个隔板使各珠在其间移动，所以说“固定三才，就象织物的经纬线一样”。①

〈(正文)珠算：控带四时，经纬三才。

(注释)刻板为三分，其上下二分以停游珠，中间一分以定算位，位各五珠，上一珠与下四珠色别，其上别色之珠当五，其下四珠，珠各当一，至下四珠所领，故云控带四时。其珠游于三方之中，故云经纬三才也。〉





必须承认，这是关于某种珠算盘的非常清楚的描述，显然，这种算盘每一根柱上全部可利用的单位数是9。如果没有那个明显地代表金属线的“带”字，那末，它可以画成一个木槽和珠所构成的工具。

① 由作者译成英文。

在另外三个方法的注释中也提到“珠”。三上义夫(1)曾力图从那些难解的叙述查明“珠”所指的是什么。在谈到“太一”算法时，正文提及某物“去来九道”(或许是槽?)。注释说“刻板横为九道，竖以为柱，柱上一珠”(这种算法的名称就是由此产生的)；因此，把这些珠上下移动，就可以定出需要保留的任何一个数。这个方法清楚地表明，在珠算系统中隐藏着座标几何学的方法，以10的幂次标定x轴，而以小于10的各数标定y轴。如果当时人们(即使是在思想上)能够相信这些珠沿着连续曲线移动，那末，用座标图示法的笛卡儿学派早就应该出现了!

另一个方法是“两仪”算法，它使用两种不同颜色的珠，黄珠在y轴的左边，青珠在y轴的右边，立数的方法与“太一”算相同。这种方法与近代的曲线图形表示法有惊人的类似之处，因为在近代的曲线图形表示中，不同类型的点与轴上的不同标度相联系。还有一种方法是使用三种不同颜色的珠，只有三个水平位置，用这种方法同样可以建立任何一个需要的数。这就是“三才”①算法。总

① “三才”不是指数学上的幂，而是指天、地和人。

之，这些系统即使晚至公元六世纪才出现，它们仍表明当时人们对座标关系已有了一定的认识[1]。

北齐冶金家綦母怀文（550—570年著称）的传记中有一段话或许就是关于珠算的叙述[2]：

> 据说，在晋阳学馆，有一次有一蠕蠕（匈奴）客人来访，馆中的一个外国佛教僧侣指着綦母怀文对他说："这个人有奇异的数学才能！"并指着庭院中的一棵枣树，请怀文用筭子计算树上有多少枣实。试算之后，怀文不仅说出枣实的总数，并说出其中有多少已熟，多少未熟，多少半熟。当把枣实计数核对之后，发现只少一个，但这位数学家说："这是不会错的，请把树再摇一摇！"这样做了以后，果然又有一个枣实掉了下来。[3]

① 参看本书第一卷第78页关于韵表的说明。当然，阿波罗尼的圆锥截面曲线（公元前三世纪）包含连续变量的坐标概念，这更加从根本上显示了解析几何学的前兆。

② 《北史》卷八十九第二十页正面。

③ 由作者译成英文。印度也有一个相似的故事，见《摩诃婆罗多》（*Mahābhārata*）中关于那讷（Nala）和里杜帕那（Rituparna）的传说［Ray tr., vol. 3 (Vana Parva), ch. 72, p. 215］。綦母怀文在钢铁技术发展中所起的重要作用，将在后面第三十章第四节中讨论。

〈昔在晋阳为监馆，馆中有一蠕蠕客，同馆胡沙门指语怀文云，此人别有异算术，乃指庭中一枣树云，令其布算子，即知其实数。乃试之，并辨若干纯赤，若干赤白相半，子是剥数之，唯少一子。算者曰，必不少，但更撼之，果落一实。〉

此处的"算子"虽然觉得很像算珠，但也可能是指算筹。

在《数术记遗》以后，有一段很长的时期没有人谈到珠算。但是，程大位在他1593年的著作所附的算书目录提到，1078年至1162年间有四部著作，从书名判断，它们是与珠算有关的。这些著作是《盘珠集》、《走盘集》、《通微集》和《通杭集》[1]。它们没有一本留存下来，程大位本人是否曾见到这些著作也是可疑的。维散累曾怀疑这些书与珠算的联系，但从这些书名得出它们与珠算有关的印象确实是比较有力的。

① 程大位所提到的这些书，据说在前面指出的杨辉的1275年的幻方著作中就提到过，但在我们现有的刻本中却找不到，在哈佛-燕京引得处编的艺文志综合引得中，除了包含《十物志》的唐代《通微子》(假如它就是上面说的那一部书的话)以外，没有提到其中的任何一本。宋代目录有一部佚名著的《通微妙诀》可能与此有关。见《算法统宗》卷十二第十二页反面。

梅文鼎的意见是：珠算盘初次得到普遍应用大概是在数学家吴信民（1450年前后著称）[1]的时代。他还认为，1384年的《大统历》（它是在元统的领导下和郭守敬的后裔郭伯玉的帮助下完成的）的计算是用珠算盘进行的[2]。但是，正如李俨所指出[3]，梅文鼎忽视了这样一个事实：程大位曾引用过谢察微（大概与沈括同时代，在十一世纪的后廿五年中著称）的著作（现已失传）的片断，其中清楚地提到了珠算，甚至对分界的横木已应用脊梁这个词。严敦杰(3)则增引了刘因在1279年写的一首诗，诗中提到了算盘这个术语。

现在还需要谈一谈珠算在其他文明国家的比较史。这个词的拉丁语是含糊的，它可能来源于闪语的“土”（*abq*）字，这使我们想到算盘最早的

① 他的《九章比类算法》早已失传，但我们知道它曾提到珠算。

② 钱大昕（《十驾斋养新录》卷十七第三页反面）注意到1366年陶宗仪的《辍耕录》中有某些引证，从而把算盘的使用年代提前了几十年。

③ 参看李俨(2)，第一版，第171页，第二版，第162页；(4)，第三集，第37页；(21)，第4集，第21页。引文出自《算法统宗》卷一。参看 Mikami (1), p. 61。

前身可能是土盘或沙盘。接着就需要在面上画线条，再在其上放置小石子（*calculi*）或算子。有一些证据说明，这种工具是古印度最先使用的①，但希洛多德（Herodotus）[1)]说，埃及早先惯于用小石子计数②。在石板上画有平行线条的著名的沙拉米斯（Salamis）算盘，提供了具体的证据③，遗憾的是，这种算盘的年代无法确定。在拉丁文献中，有许多提到画有线条以及用小石子计算的算盘④，近代有些博物馆藏有刻槽的、其中有活动小球的金属盘。但是和沙拉米斯石板一样，这些实物的年代也完全无法确定。情况可以这样总结说：如果这些实物产生于三或四世纪（这是十分合理的），并且承认徐岳著作的年代是在二世纪末，那末，中国人应用珠算就比欧洲人略早一些⑤。由于有许

① 参看 Kaye (2)。
② 参看 Smith (1), vol. 2, p. 160。
③ 参看 Rangabé (1); Kubitschek (1)。
④ 参看 Smith (1), vol. 2, p. 165。
⑤ 珠算与用于宗教或幻术的念珠有什么关系吗？一般认为，念珠最初诞生于印度，在那里，佛教徒早在公元一世纪就已经应用 *japa mala*（念珠）了，而伊斯兰教徒在九世纪、基督教徒在十一世纪才有念珠。中国人最早提到念珠的书牵涉到八世纪的一个宫廷太监。念珠的发展和传播似乎是与珠算平行的，难道念珠不可能促使算盘这种工具兴起吗？参看 Kirfel (1)。

1) 希洛多德在本书第一卷译为希罗达特。——译者

多不确定的因素，因此，无论如何也不能认为这个问题已经解决了[1]。

在欧洲，直到十一、十二世纪，珠算盘才成为通用的工具[2]。有几部书籍谈到用穿在线上的珠来进行计算，例如，1050年跛子赫尔曼（Hermann）的著作就是这样，它和《盘珠集》这一类书相近。欧洲中古时代有一种保守的传说，说算盘是从阿拉伯传入的，但这样的传播并没有得到认可，而且阿拉伯算盘(每根柱上有十个珠，中间没有梁)的起源本身也存在着许多疑问[3]。具有线条的盘被称为算板，所用的小石子通常称为筹或投子[4]。由于算板具有西洋棋盘的外貌，它又是金库

---

① 显然，史密斯对这个问题的全部论述都已过时，需要重新考虑，他重犯了德拉库佩里［de Lacouperie (2)］的错误，这错误是由于《太平御览》的印刷错误而引起的。贝克尔和霍夫曼［Becker & Hofmann (1)］的一部最新的数学史（1953年）认为中国珠算不早于十二世纪，这就忽略了甄鸾，并且只字不提徐岳（该书第133页）。在沂南刚刚发现一个与徐岳同时代的汉墓（193年前后），其浮雕中有一个图样很可能是代表算盘的。

② 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 756。但与甄鸾同时代的波提斯（Boethius）已知道并应用它了。

③ 参看 Gandz (2)。

④ 参看 Barnard (1)。

(exchequer),因此近代又有 Chancellor of exchequer (财政大臣)一词。曾经有人认为,法国银行有一种欧洲式的算盘是从中国算盘直接变来的。不管是否存在其他来源和交流,这种说法都可能是真实的,因为十三世纪有一些商业旅行家(例如马哥孛罗)到亚洲去,他们自然会对珠算发生兴趣。直到近代还继续使用珠算的俄国人,往往认为它起源于中国。在十七,十八世纪的欧洲,中国式的算盘特别引起了浓厚的兴趣,卫匡国 (Martini, 1658年)[1]、施皮策尔 (Spizel, 1660年)、德拉卢贝雷 (de la Loubère, 1691年) 及《皇家学会哲学汇刊》的两位作者都描述过它,斯梅瑟斯特(Gamaliel Smethurst) 于 1749 年,罗伯特·胡克 (Robert Hooke) 本人则于1686年。

在结束这个问题时,我们还可以指出最后几点。"算"这个汉字来源于珠算盘的图形(参看前面第8页)的说法似乎是不可靠的。德拉库佩里认为,如果算盘确是西汉时代的产物,那末,代表它的应该是一个单字,而不会是一个复合词,这一

1) 卫匡国在本书第一卷中译为马丁·马蒂尼。——译者

论证至今仍有一定的份量。诺特认为，中国算盘来源于外国，因为在珠算盘上数字是从左到右、而不是从右到左排列的。但是，当我们想到，不仅每一个汉字都是从左边开始写到右边，而且连古代的筹算盘也是这样排列的时候，这种见解便完全站不住脚了。萨顿认为，珠算盘是中国人独立创造的，这可能是目前最好的结论。但这个结论还不是最终的，我们将保留对它的评价。

七、非自然数

(1) 分数

关于分数的问题，前面在评价中国古代的主要数学著作时已谈过一些了(前面第38页起)。最初，世界各地都有一种避免分数的倾向，宁愿制订一大批越来越小的重量和度量单位，但是这些单位之间的关系是否得当，各地则有所不同。比方说，罗马有十二进法和十六进法，巴比伦有六十进法，而在中国，正如我们将要见到的，往往选择十进法。对分数作适当处理的最古老的尝试，似乎是

公元前1500年前后阿美斯纸草所记载的，但当时埃及人还不会用1以外的分子来表示分数。这种方法沿用了相当长的时期，即一直保留到十七世纪[1]。但这决不是中国的特点[2]。

从我们能够加以考察的最早时代起[3]，中国数学就已惯于运用分数[4]。《周髀算经》中已有涉及$247\frac{933}{1460}$这样的数字的问题，虽然这些数字是用文字、而不是用符号表达出来的。在这部著作和汉代其他著作里，$\frac{b}{a}$的表示法是"a分之b"。

---

① 参看 Smith (1), vol. 2, p. 213。

② 在这方面，三上义夫 [Mikami (1), p. 12] 曾给人以一个错误的印象。他从《九章》里原原本本地转录来的单位分数是非常特殊的，它只不过是用以求最小公分母的一个简化的练习而已。

③ 这个时代可以上溯到与埃及第二十个朝代相同的时期（约公元前十二世纪），因为根据董作宾的殷历（古四分历）研究，在殷代的人已经知道一年的长度为$365\frac{1}{4}$日。公元前二世纪，《淮南子、天文训》所给出的一月长度为$29\frac{499}{940}$日。

④ 主要参看 Mikami (3)。

在《九章算术》中，分子和分母在运算前[①]称作子和母，在运算中则称作实和法。加法(合分)、减法(减分)、乘法(乘分)和除法(经分)，从汉初以来就都已为人们所熟悉。例如，用 $182\frac{5}{8}$ 除 119000 时，首先是把两个数都用 8 乘，而且一切近代法则当时的确都已用到了。约分法是指找出最大公约数(等数)来把分数化成最简单的形式，这在当时是用辗转相除法("更相减损")进行的。在分数加法中，每个分子分别乘以其他分数的分母("母互乘子")，然后把所有各个分母相乘，这样，每个分数上下都"平等化"("齐")了，有了一个公分母("同")，于是这些分数就彼此相"通"。这时，就可进行分子相加了。分数减法(减分)是这样进行的：分子分母互乘，从两个积中的大者减去小者，并以分母的积除余数。最小的公分母称为"最下分母"。

① 用"儿子"表示分子和用"母亲"表示分母是很有启发意义的，它表明古人所想到的是真分数，即下面的数字(指分母)比上面大(就象怀孕一样)。性(阴与阳)的差别使他们想到，乘一个数与除另一个数的作用是等效的。

分数划杠的办法似乎起源于阿拉伯，在中国在十七世纪以前还不流行[1]。另一方面，汉代数学家所运用的最小公倍数和最大公约数的技巧似乎非常先进，因为我们知道，欧洲直到十五、十六世纪才应用它们[2]。可能，《九章算术》对中国数学的影响之一，是完备的分数体系阻碍了小数的普及，虽然后面我们将会看到，小数早就以几种不同的形式发展起来了。

苏美尔人和巴比伦人的算术实质上是六十进制的[3]，无庸置疑，希腊人和亚历山大里亚人的六十进分数和圆周的360°划分都是从他们那里得来的。常常有人猜测，中国人的那种肯定是很古的干支甲子系统(以60天为周期，参看本书第四卷第537页)也与这种六十进制有相同的来源，但这种猜测是没有事实根据的。此外，中国古代圆周的度数是$365\frac{1}{4}$，而不是360。因此，六十进分数在中国人的计算中从未起过任何作用。汉语从

---

① 除非它最初确实是从中国筹算盘的横线演变出来的。

② 参看 Smith (1), vol. 2, pp. 222, 223。

③ 参看 Archibald (1); Thureau-Dangin (1)。

来没有一个单词是表示 $\frac{2}{3}$ 的，而这个分数在美索不达米亚却是如此重要[1]，从这一事实可以得到结论说，中国人并没有受到重大的巴比伦影响。

(2) 小数、度量衡和大数记法

当我们进而讨论中国十进分数的发展史时，我们发觉自己被卷到中国度量衡制的发展史中去了，因为从非常早的时期开始，长度计量系统就按10的幂次分档了，关于中国度量衡的基本介绍有吴承洛的著作[2]，不过这本书在西方很少有人知道。除此以外，许多汉学家曾讨论过不同朝代尺的长短的改变等问题，读者可以参考王国维 [Wang Kuo-wei (2)]、淘定 [Daudin (1)]、马衡 [Ma Hêng (1)]、马拉库也夫 [Marakuev (1)] 及福开森 [Ferguson (3)] 的著作，通过这些著作可以

---

① 但有某些字（如阞或仂字）可以代表三分之一和十分之一（参看《周礼·考工记》卷十一第六页反面）。

② 吴承洛（2）是以吴大澂（1）和罗福颐（1）等人的重要研究为基础的。参阅杨览（4）。

了解到较古老的文献。一般认为，标准尺的长度从周到清的三千年间表现出连续增大的倾向①。但这不是我们的兴趣所在；我们必须做的是查明尺所分成的更小的单位以及它的倍数。

也许，我们所能引用来表明对十进位值制有所了解的最早的文字，要算是公元前330年前后《墨经》中的一个命题了。它是这样说的：

经下　59/—/37/51②　十进记法

[经]　“一”比二小，但却比五大。这是在确定位置的意义下说的。

[经说]　在“五”的当中有“一”（即有若干个“一”，因为五的筹码是ⅡⅡⅠ），但在“一”的当中也有“五”(因为在六的筹码丅中，一表示五)。而在十位上所画的一的意义是“十”，即等于二个五的符号。

〈[经]　一少于二而多于五，说在建位。

[经说]　五有一焉，一有五焉，十，二焉。〉

从这里以及从前面(第17，28页)说过的证据可以

---

① 即从每尺0.195米增至0.308米。

② 关于这些标志的说明，见本书第二卷第十一章第二节。

清楚地看到，虽然十进位的概念[1]曾一度失传或不经常流行，但早在这种概念见于《孙于算经》以前一千五百年，中国人对位值制已经有了体会[2]。

正如我们已经说过的[3]，在殷商卜辞和周代青铜器铭文中所见到的数字，从50开始，就和近代一样，是用数字与表示位值的字结合起来表示的，例如，500表示为五百。所用到的专门符号如下：

10^2	百
10^3	千
10^4	万

这些独立的符号不会妨碍计算，因为这些符号与其他文明古国(如埃及、希腊和印度)所用的表示

---

① 参看 Biot (7); Edkins (6);但他们纯粹出于对汉学史的兴趣。

② 后来，偶而也有一些哲学家提到十进记数法，例如，公元1200年前后的宋代新儒学家蔡沉就是如此（参看第二卷第十三章第五节），尽管他热衷于毕达哥拉斯式的数字学和变易主义[Forke (9), p. 279; Sarton (1), vol. 2, p. 625]。

③ 参看郭沫若 (3); 孙海波 (1)。在这个问题上，李俨[(21)，第5集，第1页]否定了他从前的说法[李俨 (8)]，但仍应该与语言考古学著作结合起来阅读。

18, 19, 30, 40, 500 等的符号根本不同①。它们本身并不是数字，而只是表示特殊位值的术语。在后面我们还将回头来讨论大数的表示法。

在周代（公元前1000到前221年）。长度单位变化不定，而且不是经常采用十进制的。吴承洛②曾整理出关于这个问题的大概说明③，从这份材料可以清楚地看到，最初的单位是以人体的各部分为根据的，如手指、女人的手、男人的手、前臂、脚等等④。我们所见到的如下：

8寸＝1咫

10寸＝1尺

8尺＝1寻

2寻＝1常

10尺＝1丈

4, 7或8尺＝1仞

---

① 参看 Smith (1), vol. 2, pp. 40 ff.。

② 参看吴承洛 (2)，第89, 90页。

③ 材料取自《说文》、《淮南子》、《孔子家语》、《孔丛子》等著作。

④ 参看本书第二卷第十三章表11 (no. 73) 度字的象形字源。

5尺 = 1墨

2墨 = 1丈

2丈 = 1端

2端 = 1两

2两 = 1疋

这张表包含有若干个独立系统，但其中没有一个系统是完全十进制的①。秦始皇第一次统一中国时，选择数字六（与五色中的黑和五行中的水有关）作为他的标志②，并且下令实行他那著名的度量衡标准③。他虽规定六尺为步④，但皇帝的法家

① 我们不知道这种概念可以追溯到什么时候。福开森［Ferguson (3)］曾描写过他所珍藏的一把古尺，从外观看，它似是周代的青铜尺(图 71)。这把尺分成十寸，一寸又分成十分，全长是 0.231 米。在同一个墓中还发现了一个钟，其上所刻的年份只能解作公元前 550 年或公元前 404 年，福开森倾向于采用前者。参看温伯格［Weinberger (1)］关于周代青铜尺的叙述。从“莫亨乔-达罗”(Mohenjo-daro) 可以得到一些十进度量衡的证据［Sarton (5)］。

② 参看《史记》卷六第十二页正面；Chavannes (1), vol. 2, p. 130。

③ 参看《史记》卷六第十三页反面；Chavannes (1), vol. 2, p. 135。

④ 参看《史记》卷六第十二页正面。

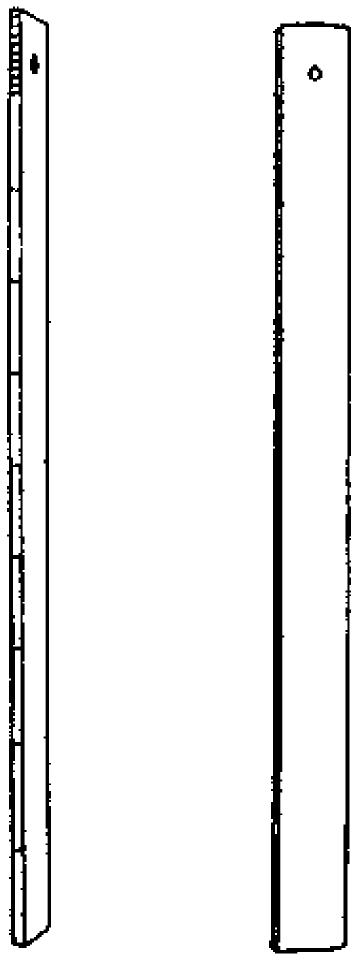


图 71　周代的十进度量衡制。公元前六世纪的青铜尺分成十寸，每寸又分成十分(根据福开森)

顾问们却把墨家的十进记数法用到尺以下的主要长度单位上去，把它们规定如下：

1 尺 = 10 寸

1 寸 = 10 分

1 分 = 10 厘

1 厘 = 10 发

1发 = 10毫

正如贾谊在《新书》[1]（公元前170年前后）中所指出的，这里共有六种单位，与“先王”的制度是一致的，实际上还有等于10尺的“丈”和等于10丈的“引”。这种度量衡制度在整个汉代[2]和汉以后都是通行的(名称稍有改变)。刘歆在公元5年为一个标准容器(嘉量斛)所作的著名的铭文里，就用了十进位的观念，提到一个准确到9厘5毫的长度。有几把铜的或青铜的标准尺一直留存至今，其中有一把是公元12年的，另一把是公元81年的 [Daudin (1)]。

在三国时代，这种趋势仍在继续。公元300年前后，孙子提到以新纺成的蚕丝直径作为“忽”的标准，并且说：

10忽 = 1秒

10秒 = 1毫

10毫 = 1厘

10厘 = 1分

① 《新书》卷四十八。

② 参看《前汉书》卷二十一上第九页反面那一节。亦可参看 Swann (1), pp. 360 ff.; Dubs (2), vol. 1, pp. 276 ff.。

这是为小长度设的单位制，其中除了“秒”在宋代为“丝”所代替外，这种制度一直沿用到很晚的年代。很清楚，到了孙子的时代，容积和重量的单位在一定程度上也跟上来了，因为《孙子算经》载有：

容量单位：1 合 = 10 勺
1 勺 = 10 撮
1 撮 = 10 秒
1 秒 = 10 圭
1 圭 = 6 粟（这是一个例外）
重量单位：1 铢 = 10 絫
1 絫 = 10 黍

但这并不是普遍采用的单位制，在梁代和唐代，关于容量和重量有许多二进，四进，六进和十二进单位的记载。但是，在公元 992 年，重量单位的十进制由政府规定下来了，依次是两—钱—分—厘—毫—丝—忽。不过，旧单位晚至明代仍在计算中保留下来。

用度量衡单位的名称来表示十进分数，这是始终贯穿于中国数学之中的办法。刘徽在他的《九章算术注》(三世纪)中，把 1.355 尺的直径表示为 1 尺 3 寸 5 分 5 厘。在开平方时，《九章算术》曾

提到，在平方根不是整数（不尽）的情形下，余数就按其本来的面目留下（以面命之）①。但是，刘徽曾经关心过这些“微数无名”，并说第一位应以10为分母，接着是以100为分母，这样继续下去，可得到一系列用上述办法表示的十进制的位②，每位都可记数，并且位数不限，不过在第五位（忽）之后便“无名”了。这些小数根无疑是用算筹计算，并且结果是用十进制分数表示的。

自此以后，所用的方法就没有什么改变了。公元五世纪初，夏侯阳提到他称作步除的除法时说，如果除数是10或10的幂，就不需要除了。他引用了③公元三世纪的《时务论》④，这部书记着“十乘加一等，百乘加二等”的规则，明显地用“等”字

① 王铃［Wang Ling (2), vol. 1, pp. 251 ff.］主张这句话的正确解释应该是：要继续求平方根的下一位数字，可以用普通除法，如 $\frac{C}{2R+r}$，其中 C 是余数，R 是根的整数部分，r 是小数部分的首位数字。

② 参看钱宝琮(1)，第77页；李俨(1)，第70页。

③ 《夏侯阳算经》卷上。

④ 杨伟（公元237年著称）的《时务论》也许还有一些别的残文辑录在马国翰的《玉函山房辑佚书》卷七十四第三十二页正面上。

(“等”字在分数加法中有时解作最大公约数)表示幂次。相反的规则也列出了。可见，对于我们今天写成10^{-1}，10^{-2}等的表达方式，《九章算术》、《时务论》和夏侯阳都早就熟悉了，不过，《九章算术》①是以含蓄的方式表现出来，而《时务论》和夏侯阳则表现得很明确罢了。

正如李俨(10)所指出，《隋书》(635年)把小数3.1415927表示为3丈1尺4寸1分5厘9毫2秒7忽，而“微”字要用在更后一位。唐代的韩延(780—804年著称)似乎是第一个采用不记单位而仅记数字(即与近代记法一样)的人②，他用“端”或“文”这种量词来标志最末一位整数③。但是，采用统一的体系和术语并用之于一般运算，却是到公元十三世纪才出现的事，正如我们在前面(第100页)所见到的，那时候杨辉大多使用这些东西。秦九韶(1247年)则使用下列术语。他把紧靠在

① 请注意《九章算术》开方术中所用“中退一，下退二”这样的词句。

② 参看钱宝琮(1)，第78页；但夏侯阳本人可能已这样做。

③ 在公元660年、665年和705年的历法计算中，曹士芳、李淳风和南宫说分别应用过一种十进位记法，用一个字表示两位小数，例如把365.2448表示作365余24奇48，见《旧唐书》卷三十三第十八页正面、第二十四页正面和第二十五页正面。

小数点前的那一位(整数)称为“元数”,并说,它是一个“尾位”为零的数。至于真正的十进小数，他称之为“收数”；这个名称包括了其他数学家称为分、厘等的所有各位。十进小数的现代名称是小数,有趣的是,这名称竟可以追溯到宋代,因为朱世杰就曾用过这个术语。李冶、朱世杰以及秦九韶都经常开方开到小数点后好几位。

在把这整个情况拿来与世界上其他地方的发展进行比较以前，有必要简略地叙述一下中国人对大数表示法的兴趣。在周代著作(例如《诗经》)中,已经出现若干个大数名称,但后来的注释者有不同的解释，看来这些名称最初似乎没有固定的意义(例如“巨万”)。关于这个问题，《数术记遗》(公元190年前后)有一段很有趣的记述。徐岳说,这些大数有上、中、下三种解释方法,他的意思可以表示如下①:

	上	中	下
万	10^4	10^4	10^4

① 这里已考虑到钱宝琮[(1),第76页]所提出的校正。徐岳的表没有超出“京”;“京”以上是根据诺特所编的传统名称表添补的。

亿	10^8	10^8	10^5
兆	10^{16}	10^{12}	10^6
京	10^{32}	10^{16}	10^7
垓	—	10^{20}	10^8
秭	—	10^{24}	10^9
壤	—	10^{28}	—
沟	—	10^{32}	—
涧	—	10^{36}	—
正	—	10^{40}	—
载	—	10^{44}	—

古代著作的所有注释者的解释表明，他们所根据的都无非是上述几种命名法当中的这一种或那一种①。

① 据沈括(《梦溪笔谈》卷十八第七则)说,"下"法是较古老的。瓦卡［Vacca (2)］指出,指数每次加倍的"上"法与阿基米得在他的"沙粒计数"法中所采用的级数相似［Heiberg (1), p. 26］,但这种吻合似乎是偶然的。费希尔(Ronald Fisher)爵士曾告诉我们,在近代科学的用法中,这三种系统之间仍存在混乱。最流行的美国用法和"下"法是一致的,埃丁顿(Eddington)所提倡的方法则与"中"法相同,而费希尔和耶茨以及其他统计学者却采用"上"法。美国人与欧洲人在 million 与 billion 这两个词的用法上的混乱是众所周知的。近代中国采用"下"法系统;而"中"法在近代日本则更为普遍。

印度人(尤其是佛教徒)对大数表示法的特殊兴趣是众所周知的,不过,这对数学的进步有什么意义是值得怀疑的[1]。无论如何,刚才介绍的古代中国记数法不可能来源于印度,因为即使《数术记遗》是著于六世纪,而不是著于二世纪,但古典注释者(例如郑玄或毛亨)的年代也还是太早了,不可能受到佛教的影响。前面“上”、“中”二栏头两行的名称在《九章算术》[2]中已可找到。公元175年的《风俗通义》则载有两个完整的“下”栏[3],同《数术记遗》中最长的一样长。此外,正如月婆首那(Upásūnya)在541年翻译的《大宝积经》[4]中所揭示的,印度记数法有完全不同的进法和名称[5]。的确,在四世纪以后,所有印度数学家都提到过10的幂次,例如,生于476年、因而大致与夏侯阳同

① 参看 Renou & Filliozat (1), vol. 2, p. 171。藏文中10的每一次幂都有专用字,直到 10^{60} 为止 [Edgar (1)]。

② 《九章算术·少广章》。参看《吕氏春秋》卷五十八。

③ 保存在《太平御览》卷七五〇第三页反面及《广韵·五旨》中。《风俗通义》中法大学校订本,“佚文”卷四第一一一页。参看《吕氏春秋》卷六十二。

④ 南條 [Nanjio (1)]《中译佛经目录》第23条。

⑤ 参看 McGovern (2), pp. 39 ff.。

时代的圣使（Āryabhata）[①]、大雄（Mahāvīra, 830 年前后）[②]、巴斯卡拉（Bhāskara, 1114—1178年）[③]、纳腊延纳（Nārāyana, 1356 年著称）[④]等都这样做过。但从前面的讨论可以看到，（1）记数法可远溯至商代，（2）十进位的思想明确地出现在公元前 330 年前后的《墨经》中，（3）公元前 200 年前后，毛亨就已用 10 的幂次来解释大数，（4）十进位的度量衡制在公元前 170 年就已提出，（5）在汉代数学中有一整套用筹算盘进行运算的系统，因此，萨顿关于小数记法是在七、八世纪由瞿昙悉达[⑤]或印度的婆罗门著作介绍到中国的提法[⑥]不可能是正确的[⑦]。

---

① 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 409。

② 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 570。

③ 参看 Sarton (1), vol. 2, p. 212。

④ 参看 Sarton (1), vol. 3, p. 1535。关于所有这些人，可参看 Renou & Filliozat (1), vol. 2。

⑤ 参看前面第 37 页和本书第四卷第 76 页

⑥ 参看本书第一卷第 275 页。

⑦ 参看 Sarton (1), Vol. 1, pp. 321, 444, 450, 513。最近的数学史著作之一 [Becker & Hofmann (1), 1953] 仍然认为"十进位制"是七世纪印度最大的数学发现（该书第 118 页）。

的确，中国人的实事求是的精神强烈地反对印度人那种把数学与神秘主义结合起来的做法。沈作喆写过一段至今尚未受人注意的有趣的话(十二世纪前后)：

> 现在就连儿童也从刻印的《菩萨算法》学习数学了，这部书讨论无限大量的沙粒("无量沙")的计数办法，因此，儿童就能够知道沙粒的数目了①。书中还讲到怎样列举出十方世界之间的区别。但是，如果这里没有一定的数量和明确的原则，菩萨又怎么能够得出答案呢?凡是涉及数目和测量的问题，是绝不容许有含糊隐晦的地方的。不管数量和尺度是大是小，问题总是能够解决，并且明确地说出答案的。事物一超出形状和数量("象数")的范围，就无法加以研究了。超出形状和数量的数学怎么能够存在呢?②

(童子修学书算数，印以《菩萨算法》，算无量沙聚，悉知颗粒多少。又能知十方世界种种差别。然则非有本因定数，佛亦何自而知之? 一涉于数，无有

① 这与阿基米得的"沙粒计数"正好遥相呼应?

② 《寓简》卷七第十四页正面，由作者译成英文。

隐显多寡鉅细，则皆得而知之矣。盖象数之外不可测也。夫孰有出于象数之外者乎?〉

另一方面，中国人的制图术也证明他们是熟悉十进位的概念的。正如我们在后面（第五卷第115页）将要见到的，从三世纪裴秀的时代起，地图都是画在矩形网格上，每格相当于100里。这个制图传统经过八世纪贾耽流传下来，终于在1137年达到精致的石刻地图的高峰。而在欧洲，除了已经完全被埋没的埃拉托色奈斯和托勒密的定量地理学外，在十三世纪初出现海图以前，具有十进位网格的地图是不为人们所知的①。

在十进小数的运用方面，还有一条关于 a 开 n 次方的老规律，它写成现代的形式应为

$$\frac{\sqrt[n]{a \cdot 10^{kn}}}{10^k}。$$

这种开方的方法和近代的十进小数开方相似，但这种技巧避开了难以处理的小数部分。史密斯曾把它的起源归于印度②，但王铃和李约瑟［Wang

① 参看 Sarton (1), vol. 2, p. 1049。见本书第五卷第88页。

② 参看 Smith (1), vol. 2, p. 236。

Ling & Needham (1)] 曾经指出，在 $n=2$ 或 $n=3$ 的情形下，这种方法见于一世纪的《九章算术》。欧洲在十二世纪才知道这个办法，并由此编出了那些盛行于十六世纪的准十进记数法的平方根表。阿拉伯数学家无疑受到过印度人的启发，他们在十一世纪使用了十进小数[例如1030年前后的波斯人阿马德·纳萨维(Ahmad al-Nasawī)]①；而犹太和拉丁学者则在十二世纪[例如1150年前后的依士拉 (Abraham ben Ezra)②；1140年前后的塞维勒的约翰(John of Seville)③]。此外，在1427年前后，吉亚斯·丁·贾姆希德·卡希 (Ghiyāth al-Dīn Jamshid al-Kāshī)④ 得到 π 的头十六位数

---

① 参看 Mieli (1), p. 109; Hitti (1), p. 379; Sarton (1), vol. 1, p. 719, (2)。有意义的是，他把他的著作称为 *al-Muqnī' fil-Hisāb al-Hindī* (《印度计算的论证者》)。

② 参看 Sarton (1), vol. 2, p. 187。

③ 参看 Sarton (1), vol. 2, p. 169。

④ 在他的(《论圆周》) (*Risālat al-Mohītīje*) 一书中。这部著作最近已为卢凯 [Luckey (2)] 研究过，并由罗森菲尔德和尤什凯维奇 [Rosenfeld and Yushkeritch (1), pp. 364 ff.] 译成俄文。参看 Smith (1), vol. 2, pp. 240, 310; Cajori (2), p. 108。十进小数还出现在他的另一些著作中，例如参看 Luckey (1); Rosenfeld & Yushkevitch (1), p. 88。然而史密斯犯了一个显著的错误 [Smith

字，其中 3 作为"完数"或"整数"与其他数字隔开。

---

(1), vol. I, p. 289]，他至少把卡希和同时期的另两个精通数学的天文学家混同起来，以为他们是一个人。其实，他们是兀鲁伯 1420 年在撒马尔罕所建立的天文台的三个前后任台长。第一个是我们所熟悉的吉亚斯·丁·贾姆希德·卡希，他卒于 1436 年 [Suter (1), p. 173, No. 429; Brockelmann (2), vol. 2, p. 211, Suppl. vol. p. 295]，继承他的是萨拉·丁·穆萨·伊本·穆罕墨德·伊本·马穆德·卡迪·扎德·鲁米 [Salāh al-Dīn Mūsa ibn Muhammad ibn Mahmūd Qādī Zāde al-Rūmī，土耳其某法官的儿子，生于 1357 年，卒于 1436 年与 1446 年之间，参看 Suter (1), p. 174, No. 430; Brockelmann (2), vol. 2, p. 212]。第三个台长是另一个土耳其人阿拉·丁·阿利·伊本·穆罕默德·库什希 [ʻAlā' al-Dīn ʻAlī ibn Muhammad al-Qūshchī，参看 Suter (1), p. 178, No. 438; Adnan Adivar (2), p. 33; Süheyl Ünver (3); Sarton (1), vol. 3, pp. 1120 ff.]。著名的兀鲁伯历是在伊本·库什希的领导下最后完成的，但在帖木儿帝国灭亡后，他成为奥斯曼帝国的臣民，并于 1474 年死于刚被征服的伊斯坦布尔。关于这些数学家，虽然在文献中有许多混乱，但这些事实在雷斯奇海尔 [Rescher (1), pp. 7 ff., 102 ff.] 所译达斯科普鲁札德 (Taškōprüzade) 的《诺曼的芍药花》(*Eš-Šaqā' iq en-Noʻ mānijje*, vol. 1, p. 78) 和塞迪约 [Sédillot (3), pp. 5, 225 ff.] 所译的《兀鲁伯历》的序言中已得到澄清了。亦可参看苏联乌兹别克的卡里-尼亚佐夫 [Kari-Nyazov (1)] 关于兀鲁伯天文台和它的工作人员的精彩综述。把这三个人放在同一脚注中介绍，这一事实本身就充分地表明，对具有不同文化传统的历史学家来说，掌握阿拉伯、波斯和土耳其学者的名字是如何困难。

小数点第一次出现在佩洛斯（Pellos，1492年）的算术中，但它的使用直到1585年斯特文（Stevin）的《十进小数》（*La Disme*）一书出版后才完全明确下来[①]。

总之，十进记数法的使用在中国是极古老的，可以上推到公元前十四世纪。在各文明古国当中，中国人在这方面是独一无二的[②]。在把十进制用到度量衡中去这方面，他们尤其先进[③]。因为正如萨顿所说[④]，欧洲一直等到法国大革命的时候才

---

① 参看 Smith (1), vol. 2, p. 242; Cajori (3), p. 314; Sarton (2)。

② 因为他们在10的任何次幂的位置上都用同样的九个符号，而10的各次幂是用位值成分来表示的。

③ 当然可以认为，这种度量衡制的过早成熟对小数符号的发展起了阻碍作用，因为每个小数位都有一个名称，很难去掉。这种方法模糊了整数和小数位的差别。不仅如此，在杨辉时代(十三世纪)以前，还没有一套标准的名称。早期的成就使后来的成就推迟的这种矛盾现象，我们并不是第一次遇到。后面(第四卷第225页)我们还会看到，中国很早就在星图上采用赤道座标，这虽然与近代的做法完全一致，但很可能推迟了岁差的发现。

④ 参看 Sarton (1), vol. 2, p. 5。世界上没有别的国家这样早就有度量的十进位制。在这方面，罗马尤其落后。比较度量学的题目太大了，这里不能加以讨论，不过，希腊文化在这方面的概况可在佩尼斯［Pernice (1)］的著作中看到。有一本十世纪的叙利亚文著作也已经译成西文，见 Sauvaire (1)。

开始这样做。在把十进制应用于制图方面，中国人比阿拉伯人和欧洲人大约早一千年。不过，唯一足以使一切数学计算革命化的小小的符号，却有待于西方的文艺复兴。

（3）不尽根

这一节只想提一下不尽根。希腊的传统［如普罗克卢斯（Proclus）所说］是毕达哥拉斯学派发现了正方形的边和对角线的不可通约性，这也就是对 $\sqrt{2}$ 的无理性的几何看法。希腊人关于无理数的概念是某个数不能表示为两个整数之比。这不是"无理"，而是"不可比"。由于中国数学家很早就用十进小数表示方根，所以，即使他们确实了解到有不尽根存在①，他们对根的无理性显然就

① 正如马勒（K. Mahler）教授所指出，希腊人也有求近似根的方法，但这些方法大概被认为不够典雅，不能同严密的不可通约理论相比。此外，相当奇怪的是，中国虽然从未发展出原子学说，但却总是把正方形看作是由许多更小的正方形组成的，这些小正方形按照10的幂次一级级分下去，愈分愈小，因此，平方根的近似值可以达到所要求的任意精确度。参看 Neugebauer (9), p. 142。

既不会感到兴趣，也不会感到困惑。

(4) 负 数

中国人同样毫不费力就得到了负数的概念。前面已经说过，大概早在西汉时期（公元前二世纪），他们就已用赤筹表示正系数，用黑筹表示负系数。另外一种方法是用三角形截面的算筹表示正数，矩形截面的算筹表示负数[①]。宋代代数学家是熟悉这种正负号的法则[②]的，例如1299年的《算学启蒙》就叙述过。当然，丢番都（275年）曾把具有负数解的方程说成是"荒唐的东西"，中国人同样也不考虑负解。在印度，梵藏（Brahmagupta, 630年前后）最先提到负数。在欧洲，第一部圆满论述负数的著作是1545年卡但（Jerome Cardan）的《大法》（*Ars Magna*）。宋代的代数学家用两种方法来表示负数：一种是把它们写成或印成黑色，

① 参看李俨（1），第36页。

② 《九章算术》就已说明了其中的一部分，参看 Wang Ling (2), vol. 2, p. 163。

以别于赤色的正数；另一种是在负数的最右一位数字上打一斜杠[1]，这种做法也许来源于刘徽注中所说的用斜放的筹码表示负数的古法。中国人对于求负数的平方根的问题似乎未曾留意过，虽然印度人（如大雄和巴斯卡拉）已觉察到这个问题。不过，复数和虚数的意义，在文艺复兴以前，更确切地说即在十七世纪末以前，在欧洲也确实并未被人们所理解。

八、几何学

(1) 墨家的定义

常常有人说，所有古代的几何学，除了希腊以外，都是直观而不是论证性的，也就是说，它们只探讨与测量有关的事实，而不打算用演绎推理的办法去证明任何几何定理。毫无疑问，论证几何学是希腊数学的主要特征，到了欧几里得（公元前300年前后）和阿波罗尼乌斯（Apollonius，公元前

① 参看前面第99页。

200年前后)达到其高峰;同样肯定的是,正如在本章许多地方可以看到的那样,中国数学的主流是朝着代数学的方向发展的。在中国从未发展过理论几何学[1],即与数量无关、而纯粹依靠公理和公设作为讨论的基础来进行证明的几何学。但是,正象在有机界中一种生物可能在解剖学上显示出另一种生物的特征器官的退化或发育不全的痕迹,甚至象在哺乳动物的两性之间所显示的那样,我们发现,希腊的数学并非没有代数学(这以250—275年著称的丢番都为其顶峰),中国的数学也不是没有理论几何学的某种萌芽。这些幼芽没有得到发展是中国文化的特征之一。包含着这些幼芽的命题见于《墨经》[2],但由于这样或那样的原因,这些命题似乎至今尚未为数学史家们所知[3]。这部古代著作以不同程度涉及物理学的几乎所有分

① 由此可看出十七世纪耶稣会传教士翻译欧几里得原本时把它定名为《几何原本》的意义。开头两个字可能是 Geo 的音译;无论如何,自周代以后,"几何"这二字就一直固定不变地具有"多少?"的涵义。

② 参看本书第二卷第十一章第二节。

③ 以后所采用的习惯用法可在本书第二卷第十一章第二节找到说明。

支，现在人们相信它是在公元前330年前后问世的。我们来看一看这部著作在讨论几何问题时所说的话。

[经上] 61/—/24.54　几何点的“原子”定义

[经] “点”(端)的定义如下：一条线可分成许多部分,那种没有剩余部分(即不能再分成更小部分)、因而成为一条线的极端的部分就是点。

[经说] 点可以处在一条线的终结或开端的地方,象孩子诞生时先露头一样。就它的不可分性而言，没有什么东西是与它相似的。

〈[经] 端,体之无厚而最前者也。

[经说] 端,是无间也。〉

这似乎与欧几里得的第一和第三个定义(《几何原本》第一卷)相合，亦可以同柏拉图（Plato）的 $\alpha\rho\chi\dot{\eta}\ \gamma\rho\alpha\mu\mu\dot{\eta}\sigma$（一线的开始）相比较［Heath (1)，p. 155］。

[经下] 60/270/39.52　同上

[经] 凡不能分为两半的东西都是不能再割的，因而也是不能分的。理由见

“点”(端)的定义。

[经说]　如果你把一个长度一次又一次地分割成两半，那末，你可以一直做到剩余部分的中部小得不能再对分为止；这时，这个剩余部分就是点。割掉一条线的前部，又割掉它的后部，最后就必然在当中留下一个不可分的点。如果你是不断一半一半地分割的，那末，你最后必定会达到一个“几乎无物”的阶段，而“无物”既然是不能分成两半的，所以它就不能再分割下去了。

〈[经]　非半不斮则不动。说在端。

[经说]　非，斮半进前取也。前则中无为半，犹端也。前后取则端中也。斮必半，毋与非半，不可斮也。〉

可以拿这段明显的叙述与悖论 PC/31 中惠施之流的诡辩者的同类讨论（本书第二卷第十一章第四节）作一比较。看来，那些诡辩者是想(象芝诺那样)证明在物理上不可能存在不连续性，而墨家则把“不可分”的概念看作是成立的。这是冯友

兰的解释，我们同意顾保鹄[Ku Pao-Ku(1), p. 81]的说法，而不同意胡适那种认为墨家站在名家一边的说法。司马彪（公元三世纪）在《庄子》第三十三篇（《天下篇》）的有关段落中注释说：“若其可析，则常有两；若其不可析，其一常存”（如果它是可以继续分割的，那末，就总是存在着“二”；如果已经到了不可再分的地步，那末，就只剩下“一”了）。张湛（320—400年）在《列子》第四篇（《仲尼论》）的有关段落中注释说：“在于麤有之域，则常有有，在于物尽之际，则其一常在，其一常在而不可分”（在一个有真实大小的区域内，总是有某种东西存在。在它的边缘，也总是有一些单个的面积元存在，这些面积元是不能再分为更小的东西的）。这些引文表明，后来中国的思想家持有一种“原子的”几何点的见解，虽然这种见解在中国人的思想中从未占主导的地位。

按照卢里亚［Luria (1)］的说法，这里同希腊的原子论者可能有过的无穷小的理论，存在着一种非常有趣的相似之处。显然，那些与德谟克利特（Democritus）学派有关的数学家是持有“几何原子”的概念的，他们认为，线、面和体积就是由大

量（但有限度）的“几何原子”所构成的。但古代的西方却宁愿采用更为严格的穷竭法［见 Struik (2), pp. 54 ff.］

［经上］ 53/-/8.49 等长的直线

［经］ 说两个东西有相同的长度，意思就是说有两条直线终结在同一个地方。

［经说］ 这就象直的门闩可以挪得同门稜一般齐那样。

〈［经］ 同长，以正相尽也。

［经说］ 同，捷与狂之同长也。〉

这相当于欧几里得的第四个定义（《几何原本》第一卷）。

［经上］ 68/-38.61 长度的比较

［经］ 比较（仳）的意思就是要弄清楚两条线什么时候互相重合或不互相重合。

［经说］ 在两种办法中都要有一个固定点，比较才能够实现。

〈［经］ 仳，有以相撄有不相撄也。

［经说］ 仳，两有端而后可。〉

这里所提到的两种办法大概是：（1）叠合或并列

的测量法，(2) 二线从一共同端点伸出，用两脚规来测量。

[经上]　52/-/6.49　平行

[经]　平的意思就是用同样高度的支撑物来支持住。

[经说]　这好比两个像兄弟一般同样高矮的人，在肩膀上合抬一根木条。

〈[经]　平，同高也。

[经说]　平，谓台执者也，若弟兄。〉

参看《几何原本》第一卷第三十和三十一个定义，第二卷第一个定义。

[经上]　40/-/82.38　空间

[经]　空间（宇）包含所有的不同的地点（异所）。

[经说]　东西南北都包含在空间之中。

〈[经]　宇，弥异所也。

[经说]　宇，东西家南北。〉

参看《几何原本》第一和第二个公设。

[经上]　41/-84.39　有界空间

[经]　在一个有界空间的外面不能包含任何线（因为面的边缘是一条线，超出

这条线就是这个面积之外了)。

[经说]　一个平面不能把每一条线都包含进去，因为它有界限。但如果这个面是无界的，那末就没有一条线不能被包含进去了。

〈[经]　穷，或有前不容尺也。

[经说]　穷：或不容尺，有穷；莫不容尺，无穷也。〉

参看《几何原本》第一卷第十三和第十四个定义。

[经上]　62/-/26.55　同上

[经]　二维空间(间)的意思就是说有某种东西包含在其中。

[经说]　这就象门方是门和墙壁之间的空间一样。

〈[经]　有间，中也。

[经说]　有间，谓夹之者也。〉

[经上]　63/-/28.56　同上

[经]　一个平面的边是无法达到的。

[经说]　平面是线所夹的空间。线在平面的前面，但在点的后面，不过不在它们两者之间。

〈[经]间，不及旁也。

［经说］ 间，谓夹者也。尺，前于区穴而后于端，不夹于端与区内。〉

线本身当时并不被看作空间的一部分，因此便说是线所夹的空间。线被认为是由点积累起来的，而空间或面是由线积累起来的。线可以联接两点或两个平面，但不能联接一点与一个平面。亚里士多德也有同样的说法〔参看 Heath (1)〕。见后面第 314 页那一节。

［经上］ 59/-/20.52　矩形

［经］ 矩形的四边都是直的，四角都是直角。

［经说］ 矩形的意思是利用木匠的矩使四条线都彼此正交。

〈［经］ 方，柱隅四杂也。

［经说］ 方，矩见交也。〉

参看《几何原本》第一卷第三十和第三十一个定义及第二卷第一个定义。

［经上］ 69/-/40.62　积累

［经］ 说到积累，那末，要是其间没有空间（例如在没有厚度的平面中），它们就不能互相接触（因而就无法积

累)。

[经说] 没有厚度的东西可作为这个原理的例证。

〈[经] 次,无间而不相撄也。

[经说] 次,无厚而后可。〉

这与《几何原本》第一卷第七个定义完全相同。可与惠施的悖论 HS/2 (本书第二卷第十一章第四节)相比较;“无厚不可积也。其大千里”(没有厚度的东西是无法积累的,但却能覆盖上千里的面积)。平面是只有二维、面没有第三维的。

[经上] 47/-/10 及 18? 51? 圆

[经] 一个圆可以以它的圆周的任何一点作为支点。

[经说] (缺)

〈[经] 儇,秖秪(环俱底)。

[经说] (缺)。〉

参看《周礼·考工记》,郑玄的注释提到,为了使轮子在转动时与地面接触最少,轮子必须做成完美的圆形 [Biot (1), vol. 2, p. 465]。

〔经上〕 58/-/18.51 圆心与圆周(直径)

〔经〕 圆是这样一种形状:所有通过圆心

引到圆周上的直线都具有相同的长度。

〔经说〕 圆是用木匠的圆规画出的、终点与起点相重合的线。

〈[经] 圜,一中同长也。

[经说] 圜,规写交也。〉

参看《几何原本》第一卷第十七个定义。

[经上] 54/-/10.49 圆心与圆周(半径)

[经] 说到圆,它有一个中心,从这个中心引到圆周上任何一点的距离都具有相同的长度。

[经说] 圆心好比是心脏,从它运动到圆周的任何一部分。都要经过同样长的距离。

〈[经] 中,同长也。

[经说] 中,心,自是往相若也。〉

参看《几何原本》第一卷第十五和第十六个定义。

[经上] 55/-/12.50 体积

[经] 每一个体积都有厚度这一维,因此,物体才有大小可言。

[经说] 没有厚度就没有体积。

〈[经] 厚,有所大也。

[经说] 厚惟无所大。〉

参看《几何原本》第十一卷第一个定义。墨家所想到的可能是一些确定的形状,而不是抽象的维。

上列引文似乎清楚地表明，墨家思想所遵循的路线如果继续发展下去，可能已经产生欧几里得式的几何学体系了。由于《墨经》只有非常零乱而残缺的版本留传下来，我们确实不能肯定说他们从未超出这些命题或定义的范围。但是,即使他们曾超出这个范围，他们的演绎几何学也始终只是一个特殊学派的秘密，几乎没有或完全没有影响到中国数学的主流。无论如何,《墨经》这些残存的资料和中国古代和中古代的许多其他证据都完全排除了任何一种认为中国古代缺乏几何思想的猜测——尽管中国几何学是一种对于事实的认识，而不是逻辑推理，并且代数的思潮以及它自己的逻辑推理形式在中国一直占有支配地位。然而，墨家曾经明显地企图从实践知识过渡到哲学的范畴，他们的做法也许多少加深了人们从时间上的紧密相符所得到的下述印象：中国人曾经完全不受西方的影响而独立地工作过。

可惜，我们所见到的墨家几何学没有谈到直角三角形的性质，尽管这个问题在《周髀算经》中是那么突出。(前面第 49 页)《周髀算经》原文的这一部分几乎肯定是写于墨家学派出现以前。没有人能够说明，对于直角三角形在测量和求积中的价值的了解，在中国可以追溯到什么年代。一般认为，它与泰勒斯 (Thales)确定埃及金字塔(公元前 600 年前后)的高度同时，但是没有可资证明的凭据[①]。我们无法考察许多战国时期以前的中国数学。然而不应忘记，在战国以前流传下来的传说中，规和矩已经有一定的地位了。在战国、秦、汉时期，关于这些工具和绳(铅垂线)有很多记载[②]。图 28 是[③]出自山东武梁祠的一幅浮雕（约公元 129—147 年），画着文化圣人伏羲手持木匠的矩和他的配偶女娲，在他们之间还有一个人格化的魁扑 (quipu)[④]。在安阳和卜骨(公元前十三或十二

① 参看本书第四卷第 259 页关于日晷的讨论。

② 李俨(8)曾把这些记载汇集起来。

③ 见本书第一卷第 351 页。

④ 参看严敦杰(13)。这是计数与记录用的结绳，这里所用的秘鲁名称是大家最熟知的。亦可参看前面第 151 页。

世纪)一起发现的车轴及其他物件,是用非常复杂的几何图形文饰的,这些图形由五边形、七边形、八边形和九边形的各种组合形成。许多周代陶器和汉砖的标本也显示出一些几何图形。在以后的年代中,中国设计师的匠心在宫殿,房屋和庙宇窗上糊纸的木格上,创作了异常丰富多彩的几何图案[①]。

(2) 毕达哥拉斯定理

关于《周髀》[②]对毕达哥拉斯定理(《几何原本》第一卷第四十七个定理)的讨论,前面(第49页)已作了交代。三上义夫和李俨[③]曾分析了这些内容,讨论了《周髀》的那些传统附图,这些附图大概始于公元三世纪赵君卿的注释。其中主要的图(叫

① 这类图案在戴伊(Dye)的《中国格子纲要》(*Grammar of Chinese Lattice*)中收罗甚多。

② 要记住,勾代表底边,股代表高,径或弦代表斜边。弦字意指弓的弦或琵琶的絃索;(测量者)拉紧绳索的概念使人联想起古埃及(另一个灌溉农业古国)的"拉绳者"[Gandz (3)]。参看前面第8页。

③ 参看李俨(4),第一集,第1页,(21),第一集,第44页;(1),第24页。

做“弦图”，见图50)表明，把以弦为边的正方形(即用积矩法造成的正方形)，当作纸片那样反摺过来，可以证明它包含另外三个全等的三角形和一个以勾股差为边的正方形。刘徽把这个图形称为“勾股差、勾股并与弦互求之图”。在刘徽和赵君卿的时代，这个图是有颜色的，中间的小正方形是黄色，周围的长方形是红色。十二世纪印度的巴斯卡拉曾作出同样的图①。《周髀》正文中(用文字)写出了代数式 $h=4\frac{ab}{2}+(a-b)^2=a^2+b^2$，这里 h 是弦，a 是股，b 是勾。这种证法与欧几里得的证法完全不同②。

① 但直角三角形各边之间的关系，印度人应该早已知道了，因为在《阿巴斯塔姆巴数经》[*Āpastamba Śulvasūtra*，见 Datta (2)] 中，已有某些典型的数量和一般的陈述。这部《数经》和其他《数经》一样，是与吠陀经典有关的，并且讲到燔祭台的建筑，因而牵涉到平面几何学和立体几何学。它的最可能的年代是在公元前五世纪到公元前二世纪之间。但是，没有任何早期资料可作为这一点的证据，而且巴斯卡拉的著作极可能是出于《周髀》的 [参看 Wang Ling (2), vol. 2, p. 162]。关于各种《数经》，可参看 Renou & Filliozat (1), vol. 2, p. 172。

② 库利奇在他的《几何方法史》(*History of Geometrical Methods*) 中说，这也许是最省力的证明。希思 [Heath (1), p. 355] 说，这与希腊几何学的思想方式有“完全不同的色彩”。

但是，如果假设全部希腊几何学都是公理的和演绎的，那将是一个错误。我们刚刚看到，中国几何学也包含有这种演绎思想的萌芽，而且不仅仅限于《墨经》的那些命题。相反，希腊也有一种几何学[诺伊格鲍尔（Neugebauer）曾注意及此][①]很接近于在中国占主要地位的经验的和代数的体系；这就是与亚历山大里亚城的赫伦（公元一世纪）的名字联系在一起的《计量术》(*Metrica*)和《几何学》(*Geometrica*)这两部著作的内容[②]。诺伊格鲍尔认为，这种"几何代数学"来源于巴比伦。假如真的是这样，那末，巴比伦的源泉大概早就已经在更远的东方产生类似的思想体系了，因为正如我们所已经看到的，虽然《周髀算经》的注释不会早于公元三世纪，但《九章算术》则已被认为是在公元前三世纪到前一世纪成书的。现在已经知道，毕达哥拉斯定理的一种代数表式，是与商代（公元前十四世纪到前十一世纪）同时的古巴比伦数学家所熟悉的[③]。

① 参看 Neugebauer (9), pp. 140, 152, 172。

② 还有《几何原本》第二卷。

③ 证据见 Neugebauer (9), pp. 35 ff.。

随着时间的推移，中国人逐渐建立了一套代数公式，用来在已知边长或边差或其他条件下求任何未知边或未知角。所有这一类关于直角三角形的问题，已由十八世纪末的李锐在他的《李氏遗书》中归结为二十五种类型，例如第二十三种是：已知 $h+a$ 和 $h-a-b$，则

$$-b^2+sb=-\left[\left(\frac{s+d}{2}\right)^2-\left(\frac{s-d}{2}\right)^2\right],$$

这里 s 是已知的和（“合”），d 是已知的差（“较”）。其他问题与此相类似。赫师慎 [van Hée (2)] 翻译了这一著作后非难说，这表明中国人缺乏几何观念①。但珀特律西 [Petrucci (1)] 指出，中国人的方法尽管是纯代数的，可是丝毫不因此而逊色，这不过是处理问题的另一种方法，为那些在欧洲人视为自然的欧几里得演绎框框里长大的人所看不惯罢了。不但如此，负量是必须按这种方法加以处理的，中国人能够这样熟练地处理负量，颇值得人们赞赏。这样一来，在直角三角形方面可能提出的一切问题便都得到解决了。

① 赫师慎只不过是把这个问题弄得比它本来的情况更为复杂而已，他把这些方程的编辑者说成是 “Li Chang Tche”——读者应该知道，他所指的是李锐，尚之是他的号。

在中国的整个历史中，对直角三角形的兴趣主要是在实用方面，即为了测量的目的。宋代的沈括曾认为[①]，这种对看得见的几何图形进行测量的𡨴术[②]，同以天上的几何图形(即想象的圆和曲线弧)为基础进行历法计算的“缀术”，是两个鲜明的对照。

(3) 平面面积和立体图形的处理

到西汉末年，中国人已经建立了一些正确或近似正确的公式来确定各种平面图形的面积和各种立体图形的体积，但都没有演绎的几何论证。可能，他们曾利用过模型，并把较复杂的图形经过实验化为较简单的图形。这些知识体现在《九章算术》中(见图72)。李俨(1)已汇集了计算的公式。在这里仅把中国几何学家所熟悉的图形列举出来，可能还有点趣味[③]。

---

① 《梦溪笔谈》卷十八第三则。

② 这个不常用的“𡨴”字，沈括认为它原来是木匠墨斗的图案。参看本书第二卷第十章第七节和后面第二十七章第一节。

③ 希望这对于那些喜欢研究古代中国数学原著的人有所裨益。

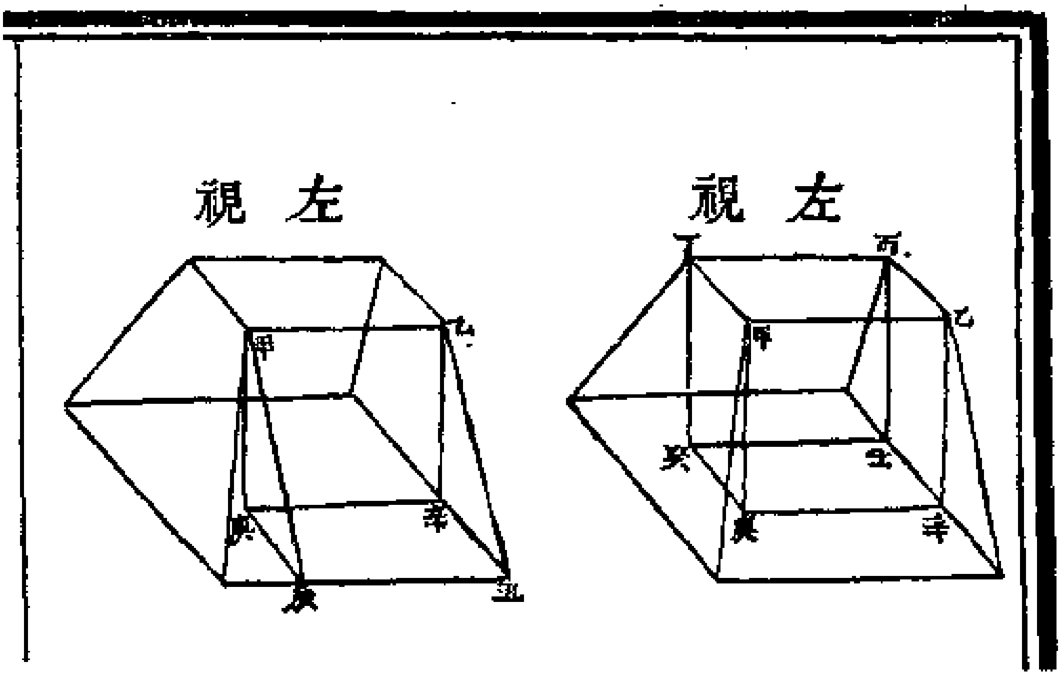


图 72 经验的立体几何学；图示《九章算术》中的稜台

这些图形如下：

面积(积)

正方形(方，方田，平方，实)。

长方形(广田，直田，幂。“幂”字本来是指遮食物用的方布)。

等腰三角形(圭田)。

梯形(箕田)。它的底边称为“踵”，上面的短边称为“舌”。所有这类图形的高都称为“正从”。

菱形(邪田，萧田)。四边(四不等边)形(四不等田)。

对顶梯形(鼓田，腰鼓田，蛇田)。

圆形(圆，圆田)。圆周称为“周”，直径称为“径”。除半径(半直径)外，没有专门的字来表示这个量；在西方也同

样有半直径的用法 [Smith (1), vol. 2, p. 278]。

弓形(弧田,弓田)。“弧”是弓形所包括的那部分圆周,“弦”是底边,“矢”是高。

环形(两圆之间的环形空隙)(环田)。

体积[①]

立方体(立方)。

具有两个正方形面的平行六面体(方堡壔)。

没有正方形面的平行六面体(仓,方窖)。

稜锥(阳马[②],方锥)。

正方稜台(方亭,窖)。

长方稜台(窖,曲池,盘池,刍童,冥谷)。

稜柱(堑堵),即截稜与底边同长、底边与侧面边成直角的楔形体。

具有长方底及两斜侧面的楔形体(刍甍)。

具有梯形底及两斜侧面的楔形体(羡除)。

四面的楔形体(鳖臑)。

① 奇怪的是,在古代数学著作中,似乎没有一个专门的字来表示与面积有别的体积。近代用的术语是体积。在答案和计算中,立方这个形容词是省略的。当然,体积也有标准的度量单位,例如《九章算术·粟米章》中就用到了。

② 这个奇异的名称似乎是从太阳光通过小方形孔进入黑暗的建筑物后光束散开的形状得出的。后来它用在建筑术中(参看《营造法式》卷五第六页正面)。

第二类平头楔形体(城,垣,沟,堑,隄,渠,墙)。这种图形对古代工程师来说可能是最重要的。城、垣和墙这些名称使人想起城墙应该按这种形状来建造。隄指的是堤和坝。沟、渠和堑都是指人工开凿的运河和渠道,包括城壕在内。

圆柱体(圆仓,圆堡壔,圆窖,圆囷)。和上面一样,这里第二个名称使我们想起堡垒,而第一个和第四个则使我们想到谷仓。

圆锥体(圆锥,委粟,聚粟)。

平截头圆锥体(圆亭,圆翯,圆箭)。

球体(立圆,丸)。球的截面称为丘田(邱田)、丸田和宛田。

公元三世纪,《九章算术》的注释者刘徽,是这种"经验"立体几何学的最伟大的解释者之一。例如他观察到,一个第一类楔形体(堑堵)可以分解为一个阳马和一个鳖臑,而一个第二类楔形体(羡除)可以分解为一个堑堵和两个鳖臑。他说,长方棱台中间是一个长方柱体,每一边有一个堑堵,每一角有一个阳马。通过这些简单的方法,他能够得到体积的公式。

显然,在牵涉到圆的计算中要用到π的数值。

只有在这种情形下，《九章算术》的公式是近似的。因此，现在我们必须转而讨论中国人求 π 值的问题。

(4) π（圆周率）的值

历史学家们都十分注意古代数学家为了获得圆周和直径之比（即圆周率）的近似值所作的努力，这可能是因为 π 值的日益精确可作为各个时代的数学才能的量度。三上义夫[Mikami (1)]有两章、李俨(1)有好几节专门讨论这个问题，此外，还有许多论文谈到这个问题①，其中值得一读的有茅以昇(1)，Mikami (19)，张永立(1)。

虽然有证据表明②，古埃及和古巴比伦已经得到如像3.1604和3.125那样的值，但在各文明古国中最普通的做法是简单地把比值取作3。我们在两部伟大的汉代算书(《周髀》和《九章》)中可

① 史密斯[D. E. Smith (4)]的专题论文，我们没有机会拜读。

② 参看 Gow (1), p. 127; Smith (1) vol. 2, p. 270; Neugebauer (9), pp. 46, 53。

看到这一点,在《周礼·考工记》[①]中也是这样。这个粗糙的近似值沿用了几个世纪。追求较为精密的数值的最初迹象是刘歆在公元1年到5年间为王莽制造的标准量器嘉量斛，这是一件极富有考古学意义的物品,目前仍然保存在北京[Ferguson (3)]。这个量器实际上是在青铜圆柱体中挖出一个立方形的空腔。铭文[②]写道:

> 本标准嘉量斛成方形,每边一尺长,外表呈圆形。方形的每一个角离圆周九厘五毫。圆的面积等于一百六十二平方寸,高一尺,所以整个体积等于一千六百二十立方寸。
>
> 〈律嘉量斛，内方尺而圆其外。庣旁九厘五毫。幂一百六十二寸,深一尺,积一千六百二十寸。〉

钱宝琮(1)由此看出,刘歆一定是用3.154作为π的值,但没有关于他如何得到这个结果的记载。

寻求更为精确的数字的第一个明显的行动,是张衡在公元130年前后所作的努力[③]。根据《后

① 参看 Biot (1), vol. 2, p. 469。

② 见容庚(2),卷三(印本),第一页正反面。

③ 他的重要传记见孙文青(2, 3, 4);李光璧和赖家度(1)。

汉书·张衡传》，他“网络天地而算之”[1]，他的 π 值可能记在他的佚著《算罔论》中。我们之所以能知道他所得到的值，仅仅是由于《九章算术》的注里曾提到它[2]。这个值是 3.1622 (即 $\sqrt{10}$)。后来《开元占经》(718 年)[3]谈到圆周率的时候，用更大的分数 $\frac{92}{29}$ 来表示[4]。公元三世纪，三国时期吴国的数学家兼天文学家王蕃重新算过这个值，得到 $\frac{142}{45}$ 或 3.1555，这大约是在公元 255 年左右。但是，和他同时代而在北魏的刘徽，工作做得更为出色。刘徽的方法是作一个正多边形内接于圆，并

---

① 《后汉书》卷八十九第二页正面。参看本书第五卷第 106 页。

② 《九章算术·少广章》。

③ 《开元占经》卷一第二十五页反面和第二十六页正面。

④ 这个分数只见于唐本中。根据《九章算术注》张衡实际上是用该书所说的经验公式，来比较立方体和它的内接圆柱以及内接球的体积，虽然他已意识到这些公式是很粗糙的。他使用了某些方法(可能是用秤称)，得到表式 $\frac{V(\text{内接球})}{V(\text{立方体})}=\sqrt{\frac{25}{64}}=\frac{5}{8}$。可见，他一定认为 $\pi=\sqrt{\frac{16\times 5}{8}}=\sqrt{10}$。

根据每个半弓形所形成的直角三角形的性质来计算周长。他从最简单的正六边形开始，并由正192边形的面积得到一个粗糙的值$\frac{157}{50}$或3.14[①]。不过他还算出[②]两个值，一个较小的值$3.14\frac{64}{625}$和一个较大的值$3.14\frac{169}{625}$，正确的数字在这两个值之间。其中较大的值（3.142704）比公元前250年前后阿基米得用正96边形求得的著名分数$\frac{22}{7}$（3.1428）稍好一些[③]。后来在另一个地方[④]，刘徽又继续争取具有更高精密度的结果，他用他的方法继续演算到3072边形，并且得到他的最佳值——一个相当于3.14159的分数。他知道，如果有

① 参看《九章算术·方田注》。

② 参看《九章算术·方田注》。

③ 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 169; B. & M., p. 407。常常有人猜想这是从西方传到东方的，但我们对此表示怀疑。希腊人所用的方法除去一个内接正多边形以外，还有一个外切正多边形，并且也不是计算面积。计算面积要牵涉到分数逼近的知识，而这是当时的希腊人所不具有的。阿基米得所证明的是：真实数值必定在$\frac{223}{71}$与$\frac{22}{7}$之间。

④ 参看《九章算术·方田注》。

必要，他还可以继续计算下去。这个数字比托勒密在公元 150 年前后所采用的值①更好。

可见,在这个时期,中国人不仅赶上了希腊人,并且在公元五世纪祖冲之和他的儿子祖暅之② 的计算中又出现了跃进,从而使他们领先了一千年。祖冲之 (430—501 年)③ 是当时 (刘宋与南齐) 最卓越的数学家、天文学家和工程师,他给了两个 π 值④,一个是约率⑤,与阿基米得的相同,另一个是 $\frac{355}{113}$ 或3.1415929203的密率。后一个值直到十六世纪末[安东尼宗 (Anthoniszoon) 的时代]一直是举世无双的。然而祖冲之仍意识到他的数字还不够精确，他求出了更进一步的近似值⑥———个“盈

① 即 3.141666, 参看 Ptolemy (Halma ed.), VI, 7; Heath (6), vol. 1, p. 233; Smith (1), vol. 2, p. 308。

② 严敦杰 (5) 有他的传记。

③ 周清澍(1)有他的传记。

④ 《隋书》卷十六《律历志》。见严敦杰(8)。

⑤ 在他的时代,约率是通用的,如天文学家何承天(460 年著称)也用约率。其他数学家,如皮延宗(445 年著称),也探讨过这个问题,但没有留下他们的结果。

⑥ 《隋书》卷十六《律历志》;参看钱宝琮 (1),第 57, 58 页。“密率”的分数是一个连分数逼近数,因此是一个非凡的成就。

数”3.1415927和一个“朒数”3.1415926，真正的比值在这两者之间。1593年维叶特（Vieta，他肯定是不知道他的前驱者的）所给出的数字正好处在这两个界限的正当中[①]。

上述计算无疑包含在祖冲之的《缀术》中，但这部著作早已失传[②]。我们对他和他的儿子(他可能参加该书的著作或编辑)的了解，主要来自长孙无忌等于公元656年以前修的《隋书·律历志》，以及《南史》和《南齐书》的传记部分[③]。唐代李淳风曾

---

① 公元1833年，纳林（Narrien）把郭守敬提到无可复加的地位，但严重地错评了中国人在求π值方面的工作。他［Narrien (1), p. 350］写道：“在这个古老的民族中，纯粹科学一直处于低劣的状态。传教士们发现，在十三世纪郭守敬称雄以前，他们认为圆径与圆周之比正好是1比3。……直到他们受到欧洲人的指导以前，没有前进一步。……”纳林是受到宋君荣［Gaubil (1), p. 115］的贻误，而塞迪约［Sédillot (2), p. 642］和其他一些著作则使这个荒唐的错误广为流传。而这些著作正好就是权威休厄尔（Whewell）用来作为依据的。

② 我们甚至不知道《缀术》这个书名的确切意义。公元十一世纪沈括(《梦溪笔谈》)曾暗示它与历法计算有关(参看本书第四卷第531页。在唐代，《缀术》仍用作科举考试的经典，它虽然写得很好，但被认为最难读的数学著作(《新唐书》卷四十四第二页正面)。参看 des Rotours (2), pp. 140, 154。

③ 参看李俨(10)。

提到祖冲之的圆周率并且赞扬了它[1]。公元1300年前后，《革象新书》的怪僻的作者赵友钦[2]重复了这个问题的研究，把内接正多边形陆续增加到16384边，证实祖冲之的数值是十分精密的。但自此以后，它便被遗忘了，正如傅路德［Goodrich (4)］所指出的，在康熙时代，中国人完全依赖传教士南怀仁、汤若望等人的方法，直到这个所谓"赤水遗珍"后来重新被发现为止。在十八世纪中期，王元启、钱塘等人依旧采用$\sqrt{10}$的圆周率。

再说一下世界各地平行发展的情况。与祖冲之和祖暅之同时代的圣使满足于3.1416[3]，一个世纪以后的梵藏则采用3.162[4]。在欧洲，与沈括同属十一世纪的列日的弗兰科(Franco of Liège)[5]得出一个很可怜的数值3.24。但在十五世纪中期，卡希算出小数十六位[6]，1600年前后，阿德里亚人

① 参看《九章算术·方田注》。

② 三上义夫［Mikami (1)］一直把赵友钦误译作 Chang Yu-Chin。

③ 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 409; Karpinski (3)。

④ 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 474。

⑤ 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 757。

⑥ 这是我们在前面第196页已提到过的。

安东尼宗得到一个与祖冲之相同的结果[①]。最后在十七世纪，范瑟朗(van Ceulen)把它算到第35位；而在1853年，香克斯(William Shanks)把它算到第707位[②]。1882年，林德曼(Lindemann)第一个证明了π的超越性，从而指出只用圆规和直尺经过有限次作图是不可能变圆为方的。在中国人的贡献当中，三世纪及五世纪刘徽和祖冲之的工作是很突出的。

(5) 圆锥曲线

中国的立体几何学就其性质而言是非论证的，它的发展是出于测量的实际需要，并且从来没有超出这些实际需要太远。在中国，从未产生过像佩尔加蒙的阿波罗尼乌斯(Apollonius of Pergamon，公元前220年著称)和他的圆锥曲线巨著

---

① 参看 Smith (1), vol. 2, pp. 255, 310。

② 中国和日本的数学家在十九世纪也参与了这些级数的发展工作，详见 Mikami (1), Smith & Mikami (1)。现在已经知道，香克斯数字的后一百位是错误的。目前已能用电子计算机算到10000位左右。

那样的人和书[①]。对椭圆、抛物线与双曲线的研究，一直到公元十七世纪才开始[②]。但在东亚，有一些关于曲线图形的几何问题，当时已得到孜孜不倦的研究，特别是关于相切圆的一些问题：有多少和多大的圆能内接于设定的图形，如半圆、扇形及椭圆等(图73)。史密斯[③]只举出日本人的例子，但他说，这是从中国人那里继承下来的；史密斯和三上义夫[Smith & Mikami(1)]曾用整整一章来叙述这些问题。这种问题与微积分的起源有一些关系(见后面第313页)。

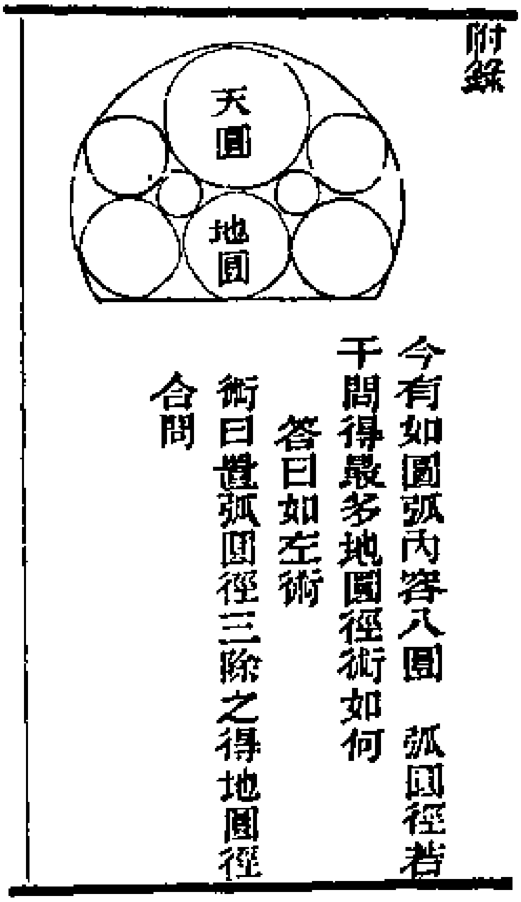


图73　一个容圆的问题，采自加悦傅一郎(Kaetsu Denichiro)的《算法圆理括囊》(1851年)

---

① 参考诺伊格鲍尔[Neugebauer (3)]关于这一数学分支如何出自日晷指针的观察的观点(本书第四卷第317页)。

② 参看李俨(16)，(17)，(21)，第三集，第519页起。

③ 参看 Smith (1), vol. 2, p. 536。

希腊人对于多面体的兴趣在中国从未出现过。希腊的几何学有三个著名的问题，其中有两个是三等分任意角和倍立方的问题，对这两个问题，中国人也从来没有接触到[1]。

(6) 杨辉和《几何原本》的传入

我们不能无条件地作出结论说（像我们在前面第212页已见到的），中国几何学一直是纯经验的、没有证明的。毕达哥拉斯定理的中国证法就确实是一个证明。后来汉代著作的注释者（如刘徽和赵君卿等人）所经常使用的语言表明，他们是用颜色来区别他们所要比较的各种面积和图形的。例如，“青出朱入相补”[2]便是这样的说法。我们前面提到过刘徽在公元263年用相似（直角或非直角）三角形进行测量的方法——《海岛算经》（前面第66页）。这种重差法在他以前的汉代肯定已经有人用过，因为《周髀算经》在提到标竿时已

---

① 化圆为方（即其中第三个著名的问题）在某种意义上是求π值问题的另一种提法。

② 《九章算术·勾股注》。

有“望远”的说法；公元一世纪末前后，张衡在他的《灵宪》中也讲到“重用勾股”。刘徽以后有一系列著名的测量家，其中值得一提的有六世纪的信都芳，七世纪的李淳风，十世纪的夏翱和十一世纪的韩公廉①。

但在十三世纪，有些人开始对测量科学所依据的、基本上是经验的方法感到十分不满。杨辉在他的两部著作《续古摘奇算法》和《算法通变本末》②(1275 年前后)中，强烈地批评李淳风和刘益满足于利用已有的方法、而不去寻找它们的理论根据(源)或原理(旨)③。他说：“古人以题易名，若非释名，则无以知其源”(古人的方法在用于不同的问题上时，具有不同的名称，因此，如果不作专门的解释，就无法说出它们的理论根据)。”④ 这是

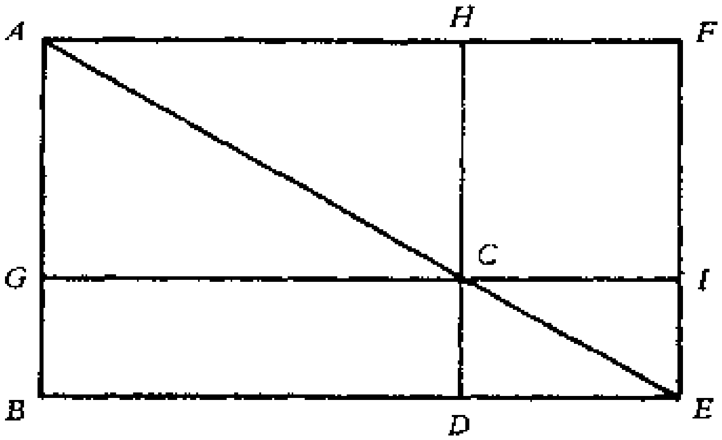
① 韩公廉作为钟表工程师，在历史上占有更重要的地位(参见本书第二十七章第八节)。

② 这两个书名的意义分别是“解释数的奇异性质的古代数学方法的延续”和“互变量数学的来龙去脉”。

③ 姑且不论这两个字的意思是否一致，总之应该记得，它们都是公元前三世纪的名家用来代表“一般概念”的术语。但是，《公孙龙子》是否曾为杨辉所借鉴，我则不得而知(参看本书第二卷第十一章第三节)。

④ 参看李俨(4)，第一集，第 39，54 页。

一个十分新颖的姿态。杨辉曾为下述命题进行了理论证明：如果把任意设定的平行四边形分为四个，则在去掉对角线所通过的那两个平行四边形后，所余的两个平行四边形相等。这和《几何原本》第一卷第四十三个命题一样，不过，像《几何原本》第二卷第二个定义那样，杨辉只取直角的情形。在附图中 AB 为勾，BE 为股，AE 为弦，CD 为余勾，CI 为余股。他证明了长方形 BC（“勾中容横”）和长方形 CF（“股中容直”）的面积相等（“二积皆同”）。然后把这种证法推广到测量上所用的两个相似直角三角形上去，这时，他不得不提到一个较大和一个较小的余勾。



假如这种证明能够得到推广的话，中国人大概就已经把他们的独立的演绎几何学发展起来了。无论如何，在十三世纪末宋、元战争期间，有

些中国人的思想（如果我们可以通过杨辉来判断的话）已经为接受欧几里得的体系做好准备了。因此，当时由于中国人和阿拉伯人的接触（这已于前面第108页提到过），可能已有人把《几何原本》译成了中文。严敦杰(7)和别的人①已注意到，《元秘书监志》中关于穆斯林著作的一章说过②，大致在杨辉那个时代，官方天文工作者曾研究某些有用的西方著作，其中包括兀忽烈的的《四擘算法段数》十五册，这部书于1273年收入皇家书库。由于作者名字的第二个字在当时大概读作“khu”，所以，“兀忽烈的”可能是欧几里得这个姓名的另一种音译③。曾经有人认为，“四擘”这两个字是阿拉伯语“原本”④的音译。全书的册数也似乎是可疑

① 参看李俨(2)，第149页；(18)。

② 《元秘书监志》卷七，此书成于十四世纪中期。

③ 书名中的“段”字表示“命题”。

④ 但是，有一些别的可能性似乎更可信一些。邓洛普先生提出了如下设想。Elements（原本）这个词，菲赫里斯特（Fihrist）译为 Usūl al-Handasah [Steinschneider(3), p. 82]，花拉子密（al-Khwārizmī, van Vloten ed., p. 202）则译为 al-Ustuqusāt，这是希腊文 Stoikheia 的典型的误写。但在阿拉伯文中，欧几里得几何学又称为 Kitāb Uqlīdis fī al-Hisabī，即“欧几里得算书”［Houtsma

的[①]。严敦杰认为,这里的传播者是纳西尔·丁·土西[②](Nasir al-Din al-Tūsī, 参看第一卷第485页),他是在旭烈兀汗统治下波斯著名的马拉加天文台的奠基者。这些证据不能绝对地表明上面所讨论的这部书是《几何原本》的中文译本,虽然看起来似乎是这样[③]。无论如何,这部书并没有产生什么

(1), vol. 1, p. 135]。这个书名的最后一个词可能就是"四擘"这个译名的来源。有人注意到,在中国转录本中,阿拉伯文所有格的尾缀 -i 经常是保留下来的,像在后面(第四卷第 476 页)将看到的那样,halaq-i 译作"哈剌吉"。另一种可能性是:"四擘"是从把希腊文的《几何原本》译成阿拉伯文的译者的姓名得到的,具体地说,就是从 Thābit ibn-Qurrah (826—901 年)这个姓名得到的,因为 Thābit ibn-Qurrah 有时叫做 al-Harrānī,但有时又叫做 al-Sābī 或沙皮人。参看 Sarton (1), vol. 1, p. 599。

① 正如德理贤[1)][d'Elia (4)]所指出,欧几里得《原本》的任何一种阿拉伯译本是否会多于十三册是十分可疑的,因为一直到文艺复兴时才增辑了最后两册[第十四册是公元前 190 年希普西克勒斯(Hypsicles)的著作,第十五册是公元六世纪伊西多(Isidore)的一个学生的著作]。参看 Sarton (1), vol. 1, p. 154。

② 参看 Mieli (1), pp. 150 ff.。

③ 至少我们是这样看的。但是德理贤 [d'Elia (4)] 提出,由于这个书名出现在 195 种"司天台实用回回书籍目录"中,所以原文可能仍是阿拉伯文,而只译出书名。萨顿 [Sarton (1), vol. 3, p. 1530] 曾描述过这类著作的一个抄本,其他的抄本至今可能仍然存在。德理贤认为,演绎几何学知识在中国传播得这么迟缓这一事实,无论如何不支持中译《原本》存在的可能性,否则就难以解释了。我们认为,即使皇家天文台搞了一个译本,也可能由于它与二千年的中国数学传统背道而驰而引不起广泛的兴趣。

1) 在第一卷译作德利亚。——译者

显而易见的影响，在后来的若干世纪内，几何测量学家如十六世纪唐顺之、周述学等，仍然十分自然地追随唐代及唐以前他们的先辈的方法。

利玛窦和徐光启译《几何原本》前六卷的事，我们已在前面（第115页）讲过了，余下的九卷是伟烈亚力和李善兰在1857年译成中文的，仍用十七世纪的老书名《几何原本》。1865年，著名的官僚曾国藩发行了全书完整的校订版。慕阿德[Moule (1)]和德理贤[d' Elia (4)]有曾国藩序和利玛窦、徐光启序的颇有风趣的西译文。陈寅恪(2)和赫师慎[van Hée (4)]曾介绍过满文译本。

(7) 座标几何学

这里必须略为谈一谈解析几何学。解析几何学的发展包括三个主要步骤：(1) 座标系统的发明；(2) 对几何学与代数学之间一一对应关系的认识；(3) 函数 $y=f(x)$ 的座标图示法。前两个步骤发生在文艺复兴以前，在中国也早就迈出了这两步。

在土地利用问题上应用座标的思想当然是很古老的，埃及人表示区域的象形文字是一个方格，而中文则用“井”字表示井周围的田（后来表示井）。伊巴谷[1)]（Hipparchus，公元前140年）是最早用经纬度[①]（μῆκος 和 πλάτος）标出天球上和地而上的点的位置的人之一（即使他不能算是第一个）。在他以前，埃拉托色奈斯（Eratosthenes，公元前284年）曾在他的地理学中规定了子午圈和纬度圈[②]。在托勒密时代以后，当定量制图学在西方完全失传时，它在中国却开始繁荣起来。正如我们在第二十二章第四节讨论地理学时将要看到的那样，这大致是公元二世纪的事，基础是张衡和裴秀奠定的；从此以后，网格子作图法在中国从未失传。

座标的另一种表现方式是数学史家们很少注意到的，这就是表格系统的发展。我们在前面（第二卷第十三章第六节）谈到过《前汉书》有一些奇异的图表。公元120年前后，班固和他的妹妹班

① 参看 B. & M., pp. 534, 544。

② 参看 B. & M., p. 477。

1）伊巴谷在第一卷译作依派邱斯。——译者

昭为这部名著提供了八个编年表①。在其中最值得注意的一个表里，他们把约2000个传说人物和历史人物的名字，按照他们自己规定的九个品德等级排列在矩形网格中。这个表至今仍保留在这部断代史的卷二十里。从某种意义上说，在这个表中，时间是一个轴，而品德是另一个轴。因为传说中的文化英雄都得到很高的评价，所以，如果把表中的点联起来，就形成一条下降的曲线。这种座标系统远比"棋盘"座标古老，尽管后者常被称之为最早的座标系②。

在前面另一处（第一卷第74页）我们曾谈到汉字读音的反切体系，它利用一种系统来标明各个字的声和韵，这种系统虽然起源于公元三世纪，但到公元七世纪初陆法言的《切韵》中才达到完

① 参看卜德［Bodde（5）］的有趣的分析。事实上，在史书中列表的体裁是司马迁在约2000年前首创的。《史记》卷十三至二十二都是年表或月表，但这些表中只有时间轴是定量的；另一个轴是诸侯国的国别，各诸侯国中的事件必须按国别记载。

② 关于棋盘，我们不必把第二十六章第九节所要说的话提前拿到这里来讲。近代形式的棋似乎是印度人七世纪的发明，但它的某些根源与中国占卜用的栻有关。

善。我们还提到过，在公元十一世纪或十二世纪左右，由于语言的变迁，这部字典已不能再使用下去，因此在司马光的《切韵指掌图》中[①]，汉字被排成一般称为“韵表”（见本书第一卷图1）的座标造表系统。正如我们已指出过的那样，在后来若干世纪内，许多其他综合性著作都仿效这种系统。

当然，中国很早就象巴比伦那样，已有数字表存在[②]。我们已经看到[③]，凡在书名中有“立成”一词的就是指这种数字表；“立成”就是“立即成功”，其意义与“计算便览”相同。《九宫行碁立成》就是这种用法的一个早期例子，其中的表是王琛摘录李业兴在公元548年所造历法中的天文资料编成的[④]。类似的表在以后各断代史的历法志中都经常出现。

从发展算盘（前面第167页）的某些早期想法中透露出一个特别明显的事实——算盘实质上是

① 参看董同和(1)。

② 楔形文的“数表”见 Neugebauer (9), pp. 29 ff.。

③ 见前面第19，79页。

④ 《旧唐书》卷四十七花页反面；参看本书第五卷第120页。

一种座标系统。当然，它比希腊人处理各种曲线所用的直角座标轴要差得多。史密斯认为[①]，梅内赫穆斯（Menaechmus，公元前350年）可能已经利用了方程 $y^2 = px$ 所表示的抛物线的性质，而阿波罗尼乌斯(公元前250年)则已完全意识到座标轴的用途[②]。在中世纪的欧洲，有许多在笛卡儿以前作出的函数图解；这些图解的说明已经出版[③]。到了十四世纪，多莱斯姆(Nicholas d' Oresme)[④]向前迈出了重要的一步，公元1370年前后，他在《论纬度》(*Tractatus de Latitudinibus Formarum*)和《论同异》(*Tractatus de Uniformitate et Difformitate intensionum*)这两部书中用了"经度"和"纬度"两词(意义相当于笛卡儿的纵座标和横座标)，并且用曲线把函数表示出来。

但是，史密斯[⑤]把最早认识到几何关系式与代数关系式的同一性的功劳归于九世纪伟大的花

① 参看 Smith (1), vol. 2, p. 317。

② 参看 Heath (2)。

③ 参看 Günther (1); Funkhouser (1); Lattin (1)。

④ 参看 Sarton (1), vol. 3, p. 1486。

⑤ 参看 Smith (1), vol. 2, p. 320。

拉子密[①]之类的阿拉伯数学家，这样做是否正确，是值得怀疑的。中国自从有了数学以来，就一直是用一般化的代数形式来表示几何命题，并且尽管他们也利用几何图形（例如公元三世纪的《海岛算经》），但研究办法则全然是代数的。欧洲比较晚才得到这种认识；斐波那契（1220年）是第一个认识到把代数学同几何学联系起来有何等价值的杰出数学家。中国人所遇到的困难，是他们没有一种足够发达的曲线几何学可以与代数学相联系。世界上第一部代数几何学教科书[②]是给他耳第（Marino Ghetaldi）1630年的著作。在这个时期，解析几何学的基本概念已在费尔玛与笛卡儿的思想中发展起来了。笛卡儿的《几何学》（*La Géométrie*）出现于1637年，现代科学中通用的图示法都由此开始。莱布尼茨提供了我们现在所说的“座标”、

① 人们确实有理由问道：阿拉伯的数学在这方面难道不可能是受到中国的影响吗？从这种观点出发研究一下花拉子密的原始著作是值得的。花拉子密是在842年到847年由哈利发派到可萨去的使臣［见 Dunlop (1), p. 190］，而穿过可萨有几条中国通往西方的商路（参看本书第五卷的附录）。

② 这个术语在这里的意义当然是与它现代的学术意义不同的。

"横座标"和"纵座标"的名称。这种方法是从方程到几何图形的推理，而中国人则总是把几何图形变为方程来讨论。

(8) 三角学

近代三角函数的理论是在文艺复兴以后发展起来的，因此，关于古代中国数学中的三角学① 并没有很多可谈的。和所有文明古国一样，在中国，直角三角形的性质早先是作为与用晷表进行的天文测量有关的项目而得到研究的，因此，从某种意义上说，《周髀算经》已认识到直角三角形各边之比的重要性。但是，最重要的步骤是希腊人采取的。有理由认为，萨摩斯的阿里斯塔库斯（Aristarchus，公元前260年前后）曾应用了相当于角的正切的比率，而伊巴谷（公元前140年前后）则完成了球面三角形的图解法 [Braunmühl (1)]。然而，球面三角学的主要进展② 是亚历山大里亚城的梅内劳

① 即三角面术。

② 即三角弧面术。

(Menelaus) 在公元100年前后通过他的《球面学》(*Spherics*)[①]实现的,他首先创造了著名的"六种数量的法则",其中包括正弦。托勒密(公元150年前后)则推广了伊巴谷首创的通弦表。

随后印度人使三角学换上了近代的形式。在公元400年以后不久，正弦和正矢的概念第一次出现在《泡利萨历数全书》(*Pauliśa Siddhānta*)[②]中。圣使(公元510年前后)第一个给正弦起了个专门名字，并制订了一个每度正弦表。与圣使同时代的彘日在《五大历数全书》(*Pañca Siddhāntikā*，公元505年前后)中，提出了既包括正弦、又包括余弦的公式(如果使用近代术语的话)。印度人的工作为阿拉伯人所继承，并由他们传到欧洲。例如,巴塔尼(Ibn Jābir ibn Sinān al-Battānī, 858—929年)[③]就经常应用正弦，认识到它优于希腊人的通弦，并提出了一些隐含着正切和余切的概念。阿布耳-瓦发·布兹贾尼(Abū'l-Wafā'

① 西译文见 Krause (1)。

② 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 387。

③ 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 602; Mieli (1), p. 83。

al-Būzjānī, 940—998 年)[①] 则引入了正割与余割。第一次使平面三角学以一门独立的科学的姿态出现的著作是纳西尔·丁·图西 (Nasīr al-Dīn al-Tūsī,1201—1274 年)的《锐角扇形之书》(*Kitāb al-Shakl al-Qattā'*)[②]。这部书出现在蒙古人统治下的波斯;在欧洲,在1533年玉山若干(Regiomontanus, J.) 的《三角学》(*De Triangulis*) 问世以前,没有著作可与它媲美。阿拉伯三角学传到欧洲的情况在许多数学史中都有叙述[③]。

与此同时,中国也已有一些进步[④]; 前面提到过的十一世纪沈括关于弧矢方面的著作就是一例。由于直角三角形的各边已有专门的术语,中国人似乎并不感到有必要为角函数起专门的名称。在平面三角学的实际应用中, 正弦用勾/弦, 正切

① 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 666; Mieli (1), p. 108。

② 参看 Sarton (1), vol. 2, p. 1003。Mafātih al-'Ulūm, p. 207。

③ 例如 Smith (1), vol. 2, pp. 609 ff.。

④ 我们后面将谈到这样一种可能性:一种早期的三角学曾从印度传到隋唐时代的中国,但没有生根(后面第 329 页和本书第四卷第 75 页)。公元 718 年《开元占经》(卷一〇四)中有一个译成中文的正弦表[参看 Yabuuchi (1)]。

用勾/股，正割用弦/股来表示就够了。前面已经提到的重差法就是三角函数的一种经验性的替代物。

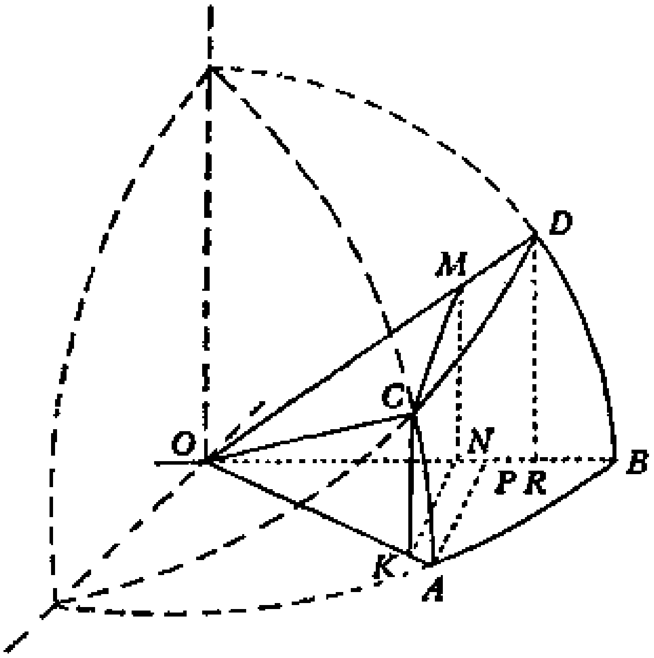


图 74　说明郭守敬(1276年)的球面三角学的图。图中 AB 是赤道，CD 是黄道

但是，在纳西尔·丁·土西的时代，正如郭守敬的著作所表明的那样，中国人开始渴望改进他们的历法和天文计算。告析[Gauchet (7)]已细致地研究过郭守敬的球面"三角学"①。最不幸的是郭守敬自己的著作一本也没有流传下来②，但他的方法可以通过前面所提到的著作而复原③。图 74 就是他所作的最重要的图。这是一个由赤道、黄道以及两个子午

① 我们把这个词加上引号，是因为这种"三角学"不使用角函数的名称。

② 正如告析所说，除非它们像宋代代数学家的著作那样，存放在某个已被遗忘的书库中。

③ 见前面第 106 页关于主要数学著作的介绍。

圈(其中一个通过夏至点)组成的、以四边形为底的四棱球锥。图中 AB 是赤道，CD 是黄道，CA 和 DB 是两个子午圈的弧，O 是天球的中心，D 是夏至点。$CMNK$ 是郭守敬为进行计算而作的矩形。线段 AP 显然是 AB 弧的正弦，DR 是 DB 弧的正弦[①]，它们分别平行于 KN 和 MN。通过这种方法，他能够得到度率(即与黄道度数相对应的赤道度数)、积差(即与已知黄道弧相对应的弦的值)和差率(黄道弧相差1°时所对应的弦差)[②]。这整个方法被描述为“勾股弧矢方圆斜直所容”。图75是郭守敬在他的计算中肯定

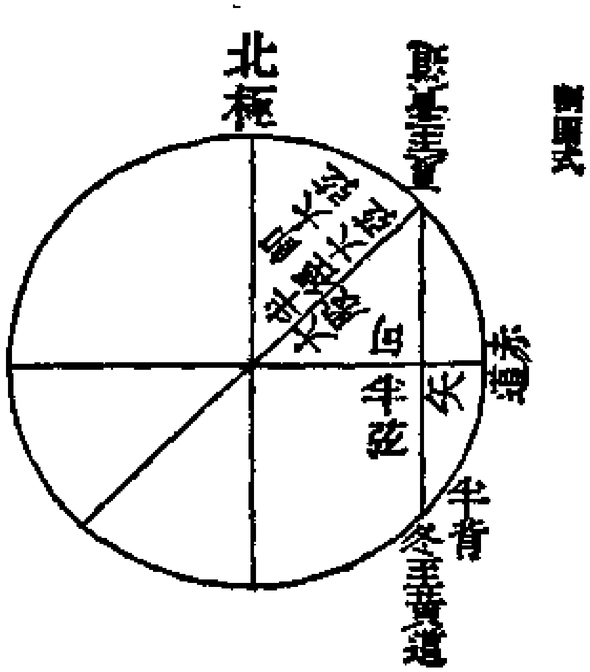


图 75　说明某些球面三角问题的图，采自邢云路的《古今律历考》(1600 年) 卷七十

① 半径取为 1。

② 出自《元史》的这些量的表，包含在《图书集成 · 历法典》卷三十五至三十七。

用过的一种图形。这个图采自邢云路的《古今律历考》(1600年)。

在中国朝廷里郭守敬谅必认识一些波斯天文学家，但他们对他的影响(如果有影响的话)有多大，则是很难说的。李俨认为①他手头已有一份粗略的正弦表，但告析却怀疑这一点。不仅如此，告析还根据阮元的主张，宣称沈括的著作已经为郭守敬提供了一切必要的东西，使他在天文测定和计算方面做得比中国过去所做过的都要精密得多②。不过也有可能，郭守敬所用的三角函数表和方法不是以汉文的形式、面是以蒙古文的形式保存下来了。无论如何，芭拉诺夫斯卡娅 [Baranovskaia(1)]新近对公元1712年在和林流行的蒙古文抄本《论座标》的有意义的研究，说明了这种可能性是存在的。这个抄本载有完善的函数表以及

---

① 参看李俨(4)，第三集，第381页；(21)，第三集，第237页。

② 这具体表现在1281年的《授时历》中。鉴于印度人和阿拉伯人对球面三角学的贡献要大得多，即使不提梅内劳(Menelaus)，富路特 [Goodrich (1) p. 177] 说郭守敬"发见球面三角学"的话也是太过头了。三角学并不是中国人对世界的一项重要贡献。但告析的观点已为钱宝琮(7)新近的研究所证实。

北纬 44° 的球面三角计算。

在郭守敬以后，有一段空白时期，直到 1607 年徐光启和利玛窦才写出第一部中文的近代三角学——《测量法义》。1631 年，徐光启增添了一部《测量异同》，他在这一著作中指出，在古代三角几何的勾股弦方法中已经隐含着角函数（各边的比率）的新名称了[①]。

(9) 难题和玩具

由于没有更合适的地方，我们就在这里把其他数学问题和玩具带过一笔。很久以来，欧洲人一直倾向于把许多这类玩具叫做“中国玩具”，但其中真正来源于东亚的究竟有多少，他们根本就不清楚。也许，欧洲人倾向于把他们难以理解的国家的称号加在难以解释的事物之上。这个问题在数学史的旁支中已有专门的研究，这种研究大概不是没有价值的；这方面可以取劳斯·鲍尔［Rouse

---

① 关于三角学传入中国以及它后来在那里的发展，参看李俨(4)，第三集，第 323 页；(21)，第三集，第 191 页。

Ball(2)]的著作为起点，通过蒙蒂克拉(Montucla)和奥扎南(Ozanam)的著作追溯上去。有许多这类测智力的玩具都牵涉到数个数学分支，并且与各种各样具体事物发生关系。

例如，拓扑学上的“中国九连环①之谜”(它可能是从算盘演变出来的)，最初见于卡但(Cardan)的著作(1550年)②，后来华立斯(John Wallis, 1685年)③为它提供了详细的数学说明。格罗斯(Gros)在十九世纪应用二进位记数法④给它以最优美的数学解答。本世纪初，这种玩具在中国普通称为“连环圈”，但它的起源是不十分清楚的⑤(见图76)。另一种几何玩具是一套有多种排列的木板(一块方形，一块菱形和五块大小不同的三角

① 几个环按一定的方式挂在一条铜片上，最尽头那个环可以随意从铜片上取下或挂上，而其他的环只有当邻近的环处在一定的位置时才能取下或挂上。参看 Rouse Ball (2), p. 305; Ahrens (1)。

② 参看 *De Subtilitate*, bk, xv, 2 (Sponius edn., III, 587)。

③ 参看 *De Algebra Tractatus* (*Opera*, II, p. 472)。

④ 参看本书第二卷第十三章第七节。

⑤ 参看本书第二卷第十一章第四节关于名家的诡辩那段文字。

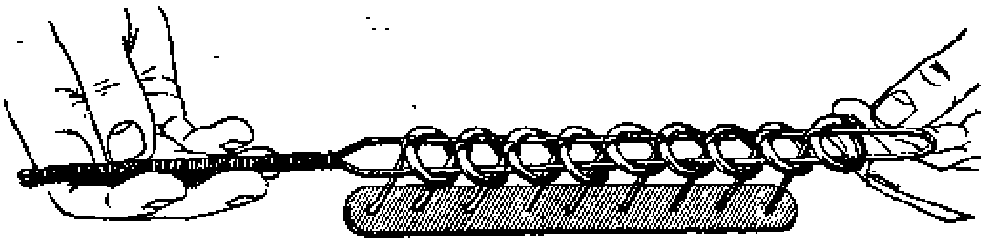


图 76 九连环之谜[布赖恩·哈兰(Brian Harland)先生在兰州得到的样品图]

形)①,据说它是"东方最古老的消遣品"之一。中国人称之为"七巧图",欧洲人则称之为"唐人图"。这与几何剖分、静态对策、变位镶嵌等有关②,也与多少世纪以来中国建筑师用在窗格子上③的丰富的几何图案有关。另一个像连环圈一样与拓扑学有关而广泛流传的技巧是摺纸术,杜甫有一首著名的诗曾提到过它④。

---

① 参看 Rouse Ball (2), p. 113。亦可参看前面第 96 页关于三国时期注释者的方法那段话。

② 剑桥大学图书馆藏有这方面的一些小册子,其中有的包含十九世纪初桑下客所作的序。

③ 参看 Dye (1)。这些格子的花样曾引起数学家们的兴趣。例如,威尔(Hermann Weyl)曾在这些格子花样中找到二维空间中桁架所可能有的十七种本质不同的对称形式的例子。参看 Weyl (1), pp. 103 ff.。

④ 瓦卡是认识到这方面的科学意义的唯一西方数学家。因为他的著作[Vacca (7)]由此引出许多迷人的问题,如皮诺-施瓦兹(Peano Schwarz)面、纽结论及可看作理想领结的二维形式的正多边形,所以近代拓扑学家从折纸术的起源和发展很可能找到有趣的研究题材。

九、代　数

前面我们已经说过，在讨论早期的代数学史之前，必须先弄清楚代数学这个术语的涵义。比方说，如果我们所指的是解如 $ax^2+bx+c=0$ 这类用符号表示的方程的技巧，那末，代数学是十六世纪才发展起来的。如果我们认为对符号可以不必要求达到这样简练的程度，那末，代数学的发展至少可以上溯到公元三世纪。如果纯几何解法也算数，那末，它在公元前三世纪就已开始。如果我们把现在可用代数方法求解的问题统统归入代数学，那末，它在公元前二千纪就已经产生了①。从我们所能追溯的年代（大约公元前二世纪）起，代数学在中国数学中一直是占优势的，但它并不属于任何一个上面所说的范畴②。实际上，它是一

① 史密斯 [Smith (1), vol. 2, p. 378] 就是这样看的。除标准的数学史外，有价值的代数学史论著还有 Zeuthen (1); Thureau-Dangin (2)。

② 参看 Wang Ling (2), vol. 1, pp. 286 ff.。

种"修辞的"[①]和位置的代数学，符号(按照一般的理解)的使用是比较少也比较迟的。换句话说，这种代数学用大量抽象的单音字来表示一般化的量和运算[②]。如果说这些字还不能算是数学符号，那末，它们也已经不是通常意义下的文字了。在演算过程中，筹算盘上的数字是按照它们所代表的量的类别(未知数、幂等)而占有一定的位置的。这样，一种稳固的、划一的数学图式体系就建立起来了[③]。但是，由于这种方程的形式总是受到具体问题的牵掣，因此，就无法发展出一般的方程理论来。然而，这种用数学图式进行思考的倾向，终于从筹算盘发展出一种完备的位置记法（在所施行的范围内），因而就不需要使用我们的大多数基本符号。不幸的是，虽然这种成就是如此辉煌，它却带来了不可能进一步发展的后果。

① 这是内塞尔曼（Nesselmann, 1842 年）给完全用文字写出的代数学所起的名称。

② 王铃等的著作中有一个很好的例子，见 Wang Ling & Needham, (1), p. 377。

③ 关于中国代数学与哲学的关系，参看本书第二卷第十三章第六、七两节。

正如中国人从很早开始就利用代数学来攻克几何问题那样，希腊人用纯几何方法解决了许多比较困难的代数问题。欧几里得在解与方程 $x^2+ax=b^2$ 等价的问题时，实质上用的是把几何上的方形补足而无视负根的办法①。但希腊代数学的发展较晚，而西方代数学一直到亚历山大里亚城的丢番都的《算术》(*Arithmetica*)问世以后，才开始有某种符号并独立存在。丢番都著称于公元250年至275年之间，与刘徽同一时代。有过这样一种提法②：丢番都具有萨马特人的血统，他的代数学是伊朗人和中国人的影响的产物。但诺伊格鲍尔和其他学者③最近的调查研究证明，巴比伦代数学比过去所了解到的更为先进，它包括了三次和四次方程的问题。即使在那些从楔形文字的原话看来问题的基础显然属于几何学的地方，也仍然有强烈的代数学意味，因为运算过程经常没有任何可能的几何解释④。由于巴比伦代数学非常

① 参看 Euclid, bk II, prop. 2。一个世纪以前，通常给《几何原本》每一个命题附上代数公式的注释，例如波茨(Potts)的版本。

② 例如参看 Mazaheri (2)。

③ 参看 Archibald (1)。

④ 这与几何学占优势的埃及数学相反［Gandz (4)］。

古老，人们不禁要提出这样一个问题：巴比伦的代数学是否曾经像种子那样散播开去，一方面为印度和中国的代数学①、另一方面为希腊的发展②奠定基础？

在中世纪初期西方科学衰退的时候，丢番都时代的代数学被遗忘了，因此，当伟大的阿拉伯科学运动兴起时，阿拉伯的代数学无疑受惠于印度，或许在较小的程度上也受惠于中国。阿拉伯最著名的是花拉子密（813—850年著称）③，我们现在的 Algebra（代数）这个名称就是从他的著作《归位和抵消的计算》（*Hisāb al-Jabr W'al-Muqābalah*）④中得来的。书名中 al-Jabr 是"归位"⑤，al-

---

① 我们已见到过一个与占星术有关的例子，在那里，巴比伦体系与中国体系之间似乎有某些看得出的联系（本书第二卷第十四章第一节）。

② 我们也已看到（第十四章第一节）巴比伦文化传入希腊化世界中去以后所产生的另一些成果。

③ 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 563。除了这部最简洁可靠的参考书外，我们很乐意提起迪蒙特（Dumont）的一篇简短而有吸引力的关于花拉子密的文章。

④ 英译本有 Rosen (1), Karpinski (1)（译自切斯特的罗伯特的拉丁文本）。参看 Winter & Arafat (1)。

⑤ 因此就出现了一桩奇怪的事：西班牙摩尔族语的动词 jabara 演变为西班牙语 algebrista，其意义是"接骨"。

Muqābalah 是“抵消”。例如，如果有一个式子

$$bx + 2q = x^2 + bx - q,$$

则经过“归位”(al-jahr)后为

$$bx + 2q + q = x^2 + bx,$$

而“抵消”(al-mūqabalah)后得

$$3q = x^2。$$

可见，前一过程含有负量移项的意思，而后一过程则有正量相消以及方程两边各自简化的意思。在中国数学中，没有严格与这些过程相应的术语，因为他们进行代数运算是完全不用等号(=)，并且各项是排成表格化的行列的①。但是，在方程两边消掉 bx 可以说是相当于《九章算术》所提到的“同名相除”，同样，$-q$ 移项成为 $+q$ 相当于“异名相益”②。把几个项加起来进行简化的过程，李冶称之为“并入”，而相减的简化则称为“相消”。

人们常常忘记欧洲代数学的符号系统是发展

① 在十三世纪以前，所有中国式的“方程”暗中都是以“$= + n$”结尾的，n 是常数项。后来在宋代，秦九韶倡导一种相当于“$=0$”的做法，这时常数项成为 $-n$ 与其余各项写在一起。

② 《九章算术・方程章》。这些用语实际上是指处理联立方程的办法。

得非常缓慢的①。“加”(plus)和“减”(minus)这两个字起初都是在“试位法”中使用的②，后者是在十三世纪，而前者则到十五世纪才开始。近代的+号与−号最早出现在1489年的一本算术书中，乘号×直到1600年左右才开始发展起来，除号÷则晚至十七世纪。活动于十六世纪最后三十年的伟大法国数学家维叶特(François Viète)是用字母代表数的主要创始人③。因此，在明代以前，欧洲代数学还没有自己的符号系统。欧洲符号发展的过程恰恰出现在中国古代代数方法处在低潮的时候；耶稣会传教士把欧洲代数学介绍过去时，他们带去的不是由来已久的东西，而是至少在技术上比较新的东西。在所有符号当中，最重要的大概是使等式成为可能的等号=。在巴比伦和埃及曾用过各种记号来表示相等，但最先得到公认的是丢番都的记法 *esti* (ἐστί) 和 *isos* (ισος)，简写为 *is* (ισ́) 和 i^s (ι^σ)。在中世纪，用来表示相

① 史密斯 [Smith (1), vol. 2, pp. 395 ff.] 对此有很好的说明。

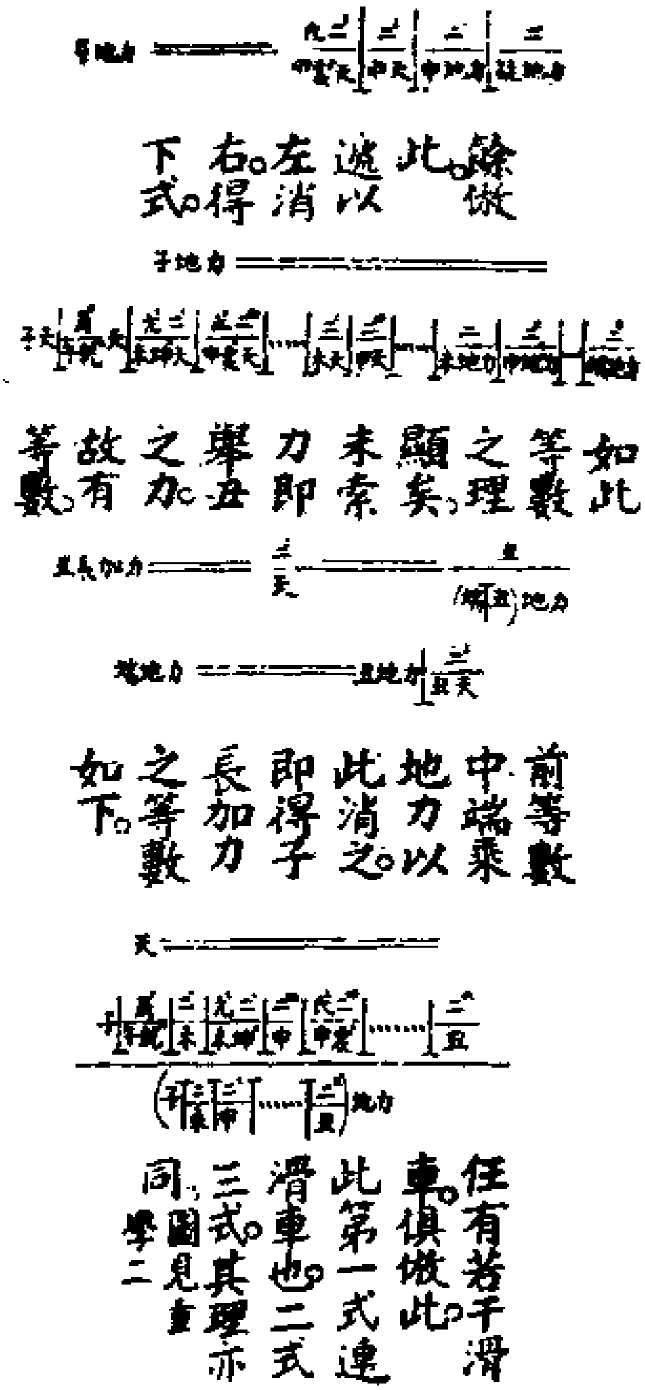
② 见后面第264页。

③ 参看 Smith (1), vol. 1, p. 311。

等的记号有过很大的混乱，近代的＝号在雷科德(Recorde)的《智慧的磨刀石》(*Whetstone of Witte*, 1557 年）问世以前一直未出现过；雷科德曾清楚地说，他选择两条等长的平行线作为等号，因为它们再相等不过了。但这个等号直到十八世纪才得到普遍采用。在雷科德的著作和这个时期的其他著作中，＝号两条线的长度在展开计算时常常被画得很长，这种做法在中国一直保留到相当晚的年代(图77表示 1889 年一部物理学著作中的一页算草)。这个事实反映出，中国代数学由于未能创造出一个适于书写现代形式的方程的符号，它脱离文艺复兴以后的发展有多远。中国代数学也从来没有表示指数和幂次的符号；不管是 x^2 还是 x^3，它们的量值完全取决于它们在中国人所用的“方阵”表上所处的位置。我们现在的整数指数也很晚才出现，在笛卡儿 (1637 年) 以前，使用的是许多其他形式，例如以 xxx 表示 x^3。

(1) 联立一次方程组

在汉代的《九章算术》(约公元前一世纪) 中，



餘儆此遞以左消右得下式
如此等數之理顯矣未索力即舉丑之力故有等數
前等數中端乘地力以此消之即得子長加力之等數如下
任有若干滑車俱儆此此第一式連滑車也二式三式其理亦同圖見重學二

图 77　一部中国物理学著作中所用的流行于十六世纪的长等号（采自叶跃元等的《中西算学大成》）

联立一次方程是写得明明白白的，而希腊人，甚至连丢番都，在这方面都不如巴比伦早期学者那样成功。中国人的办法是把算筹放在表上不同的方格中，以表示不同未知数的系数和常数项。《九章算术·方程章》有许多问题是求解

$$ax+by=c,\quad a'x+b'y=c'$$

这个类型的方程的。这是一个排列系数、交叉相乘、以及相加或相减的问题。例如，方程

$$x+2y+3z=26,$$
$$2x+3y+z=34,$$
$$3x+2y+z=39,$$

1	2	3	上禾秉数
2	3	2	中禾秉数
3	1	1	下禾秉数
26	34	39	

被排成如上所示的表，顶上一行表示 x 项（上禾秉数），第二行表示 y 项（中禾秉数），第三行表示 z 项（下禾秉数），第四行是常数项。一般的做法是：在上述两个方程的情形下，第一个方程用 a' 乘，第二个方程用 a 乘，相减后得到

$$y=\frac{ca'-c'a}{ba'-b'a}。$$

这种方法称为“直除法”。它流行于许多后来的著

作中[①]。刘徽在他的《九章算术注》中，对于某些问题已能避免用第一个未知数项的系数交叉相乘、而用重新排列和组合这些方程的办法消去 x。这当然牵涉到正负号的变换，可想而知，这是通过改变筹算盘上算筹的颜色(从黑到赤或从赤到黑)来表示的[②]。

在汉代与三国时期，解联立一次方程组的方法从未脱离具体的问题；一直到宋代的杨辉[③]，才对一般解法作出说明。他把各个方程依次称为"甲行"、"乙行"等等，把第一个未知数的系数称为"首位"，而把具有多于两个未知数的方程组称为"行繁者"。

《唐阙史》里有一个故事[④]表明，代数学的这个分支在公元855年前后曾被用来考试小官吏。

① 例如，五世纪的《张邱建算经》和七世纪刘孝孙的《九章细草》。

② 在两个问题中，他首先消去常数项，然后用代入法消去未知数。

③ 我们已经看到，他力求得到谨严的几何证明。

④ 这个故事甚至连眼光锐利的三上义夫和钱宝琮也似乎没有注意到。李俨[(1)，第85页]曾提到杨损的问题，但我们一直到发现这一段并把它译出以后，才注意到这一点。

故事说：

杨损(一位高級官员)[1] 在选用和提拔行政官吏方面是很有名的，他不受私人的影响，也不凭自己个人的喜恶来办事，而总是要听取舆论对这些官吏的功过所作的评议，并把能够得到的各种批评意见加以权衡。即使是对于地位卑贱的办事员和小官吏[2]，他也同样应用这个原则。

有一次，有两个办事员需要提升。这两个办事员的职位相同，在政府里工作的时间也同样长，他们甚至得到了同样的赞扬，并且在他们个人档案中的评语也完全相同。负责这项工作的中级官吏对他们的提升问题感到十分伤脑筋，便去请示他的上司杨损。杨损把这个问题好好考虑了一番，然后说："一个办事员的最大优点之一是要计算得快。现在就让这两个候补人员都来听我出题。哪一个先得出正确的答案，他就应该得到提升。我

① 参看《新唐书》卷一七四和《旧唐书》卷一七六的列传。

② 这种说法相当明显地表明，数学家在社会上的地位是很低的。参看后面第 339 页讨论社会因素那一节。

的问题是：有人在树林中散步，无意中听到几个盗贼在讨论怎样分他们偷来的布匹好。他们说，如果每人分6匹，就会余下5匹；如果每人分7匹，则会短少8匹。试问：这里一共有几个盗贼？布匹的总数又是多少？”这个问题由另一个低级办事员传下去了。杨损让两个候补人员在大厅的石阶上用算筹进行计算。不久，其中就有一人确实得出了正确的答案，他被提升了。对于这一决定，官吏们都没有任何不平或批评的意见。①

〈青州杨尚书损，……政令颇肃。郡人戎校缺，必采于舆论而升陟之。缕及细胥贱卒，率用斯道。……一日，……有吏两人，众推合授。较其岁月、职次、功绩、违犯无少差异者。从事掾不能决，请裁于长。长或臆断，谁曰无私。杨公俛首久之，曰，余得之矣。乃谓曰：“为吏之最，孰先于书算耶。姑听吾言：有夕道于丛林间者，聆群跖评窃贿之数。且曰，人六匹则长五匹，人七匹则短八匹，不知几人复几匹。”顾主砚小吏著于纸，令俯阶筹之。且曰：“先达者胜。”少顷，一吏果以状先。遂授良阙。侪类则眙

① 《唐阙史》卷二第二十四页反面，由作者译成英文。

伏而退。〉

(2) 矩阵和行列式

中国人用筹算盘中的算筹表示联立一次方程未知项系数的方法，自然地导致了简单的消去法的发现。算筹的排列方式正好就是数字在矩阵里的排列方式。因此，中国数学在早期已经发展了像简化行列式时所用的那种各列各行相减的概念。但在日本学者把这种思想吸收过去以前，行列式概念一直未曾取得独立的形式。关孝和 (Seki Kowa)① 是十七世纪日本最大的数学家，他在1683年写了一部叫做《解伏题之法》② 的著作，在这部著作中，对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述③。由于他的工作无疑是在1683年以前做的，又由于欧洲第一次提出行列式的是1693年莱布尼茨的著作④，所以，提出行列式的荣

① 关孝和的较好的读法是 Seki Takakusu。

② 意思是"解行列式问题的方法"。

③ 参看 Smith (1), vol. 2, p. 475; Smith & Mikami (1), p. 124; Hayashi (1); 加藤平左卫门 (1)。

④ 参看 Muir (1); Lecat (1)。

誉应该归于关孝和。关孝和思想的产生多半是受惠于中国的而非西方的影响①。关于这个发现，正如史密斯所说的，唯一令人惊奇之处是它没有出现在更早的年代，比方说没有为宋代的代数学家们所阐明。

(3) 假设法

简单的一次方程在古代比在有了一套良好的符号制度以后要麻烦得多。史密斯说②，世界竟曾经为一个型如 $ax+b=0$ 的方程所困惑过，这似乎是不可思议的，但是古代数学家为解这种方程，却确实曾求助于一种比较烦琐的方法，这种方法后来在欧洲称为“试位法”。这个方法的主要形式是所谓“两次假设”。就上述方程而言，它可以解释如下：设 g_1 和 g_2 是 x 值的两个猜测数，而 f_1 和 f_2 是误差，即 ag_1+b 和 ag_2+b。

① 小堀宪博士（私人通讯）极为赞同这种看法。史密斯等 [Smith & Mikami (1), pp. 132 ff.] 曾对西洋影响的可能渠道作了一番有趣的研究，这些渠道一直是非常隐晦的。

② 参看 D. E. Smith (1), vol. 2, p. 437。

如果猜测数是正确的，那末，误差应该等于 0。于是

$$ag_1 + b = f_1, \tag{1}$$

$$ag_2 + b = f_2, \tag{2}$$

因此 $$a(g_1 - g_2) = f_1 - f_2。\tag{3}$$

由 (1) 得 $$ag_1g_2 + bg_2 = f_1g_2,$$

由 (2) 得 $$ag_1g_2 + bg_1 = f_2g_1,$$

因而 $$b(g_2 - g_1) = f_1g_2 - f_2g_1。\tag{4}$$

用 (3) 除 (4) 得 $-\dfrac{b}{a} = \dfrac{f_1g_2 - f_2g_1}{f_1 - f_2}$。

但因为 $$-\frac{b}{a} = x,$$

所以 x 便可求出了。

这个"试位法"无疑是由阿拉伯数学家传到欧洲的，它出现在花拉子密（825 年）、库斯塔·伊本、卢卡·巴勒巴基（Qustā ibn Lūqa al-Baalbakī，卒于 922 年）[①]以及几个后来的作者的著作中。阿拉伯语称这个方法为 *hisāb al-khatā'ain*，由此又产生了各种各样的叫法，例如 *elchataym*（斐波那

① 参看 Sarton (1), vol. 1, p. 602; Hitti (1), p. 315; 后一作者是黎巴嫩的一个信奉基督教的阿拉伯人。

契，十三世纪），*el cataym*（帕乔利，十五世纪），*Regola Helcataym*（塔塔格利亚，十六世纪），*Regole del Cattaino*（帕格纳尼，十六世纪）等等[1]。这个方法可能起源于中国，因为正如钱宝琮[2]所指出[张荫麟(1)也赞同这一看法]，这个方法的确是中国的"盈不足"术，它实际上是公元前一世纪《九章算术》第七章的章名[3]。刘徽称它为"朓朒"

---

① 从这些名称演变出 Cathay（Khitāi，即震旦或中国）一词，以及阿拉伯语中有一些事物（见本书第三十章讨论火药的部分）如此命名的事实，对于某些人一直是一种诱惑［参看钱宝琮(3);张荫麟(3),第 306 页］。由于 Khatā'ain 的意思只能是"两次假设"(说明见 *Mafātīh al-'Ulum*, p. 201），这种类似性似乎只是表面的。这一点是邓洛普（D. M. Dunlop）先生帮助指出的。此外，既然花拉子密在九世纪已经知道和使用了这个方法，所以即使有这种传播，也不会像钱宝琮所设想的那样发生在西辽国（1124—1211 年）那样晚的年代。我们后面(第四卷第 693 页)将看到，另一个中国历史学家也把西辽（哈喇契丹，Qara-Khitāi）看作是知识从东方传到西方的媒介。尽管这对当前的问题不适用，但值得加以注意。

② 参看钱宝琮(3),(1),第 36 页。

③ 关于这一点曾有过一些混乱，因为三上义夫［Mikami (1), p. 16］只考查了这一章的前八个问题。他解释说，在所有的问题中都设有一个太大的数和一个不足的数，并且能用一般联立一次方程来求解。史密斯［Smith (1), vol. 2, p. 433］只不过是抄袭了他这种说法罢了。但是，第九到二十题则是盈和不足都需要假定，就像试位法中的猜测数那样。

术，这两个字都是出自月球的运动，第一个字意指残月的末次出现，第二个字则指新月的初次出现。在说明有关问题的解法时①，常用"假令"②二字表示第一个假设值 g_1（不论是盈或不足）的选定，而用"令之"二字表示第二个假设值 g_2（不论是盈或不足）③的选定。古埃及④和古印度⑤似乎也已有某种类似于试位法的求解办法。盈和不足的概念在哲学上是十分重要的⑥，它推动了所有的古代

① 第七章主要处理一次方程的问题，但也有三个问题要用到二次方程或高次方程。对于这些问题，作者也用同样的方法处理，这可能是由于没有觉察到它们的答案只能是近似的。

② 这是一个惯用语，但是，由于单独一个"假"字确实有"虚幻"的意思，所以，外国人一个字一个字地翻译，也很容易得出这个惯用语的含意。

③ 在《九章算术》的其他地方（第三章和第五章），这个方法常用于简化算术级数和几何级数的问题，以便使它们变成简单的比例。

④ 参看 Cajori (2), p. 13。见后面第 326 页。

⑤ 参看 Datta & Singh (1), vol. 2, p. 37。这是巴克沙里 (Bakhshāli) 的手抄本，现在估计它的年代不早于公元十世纪。《九章算术》第七章中（特别是十五、十六和十八题）与梵藏（628 年）著作中的应用题之间有显著的类似之处 [见 Colebrooke (1), p. 289]，与大雄（九世纪）著作中的应用题也相似[见 Datta & Singh (1), vol. 1, p. 205]。

⑥ 参看本书第二卷第十三、十六、十八章中谈到新儒学派（理学学派）的段落。

数学，也推动了希腊的生物学[1]。

(4) 不定分析和不定方程

在介绍中国数学文献的时候，我们已经几次提到了不定分析的问题。假定有 n 个方程，它们所包含的变数多于 n 个，那末，这里可以有无限多组解答。当然，在某些场合下，问题的性质可以是只需要求这些解当中的正整数解。至少从四世纪开始，不定分析就一直是中国人在数学上的一大兴趣，当时，《孙子算经》已有如下的算题[2]：

> 我们有一些东西，但却不知道它们的精确数目。如果用三作为单位来计数它们，就会剩下两个；如果用五作为单位来计数，就会剩下三个；如果用七作为单位来计数，就会剩下两个。问这些东西到底是多少个？
>
> 〈今有物不知数。三三数之剩二，五五数之剩三，七七数之剩二。问物几何？〉

孙子确定了"用数"70，21和15（它们各为5×7，

① 参看 d' Arcy Thompson (1)。

② 《孙子算经》卷下第二十六题。

3×7 和 3×5 的倍数)，当它们分别用 3，5 和 7 除时都剩下 1。总和 $2\times70+3\times21+2\times15=233$ 就是问题的一个解答，再从中减去可以减的 $3\times5\times7$ 的最大倍数，就得到最小的答数 23[1]。这是孙子所提出的仅有的解。写成现代形式时，这可表示为

$$N \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3), \equiv 3(\mathrm{mod}\ 5), \equiv 2(\mathrm{mod}\ 7)。$$

不定分析一直引起数学史家的重视；伟烈亚力 [Wylie (4)] 曾用几页的篇幅专门叙述它；近代关于这个问题的最出色的论述是李俨[2]和钱宝琮[3]的著作。

在历史上，不定分析被称为"大衍术"，这是从《易经》[4]中一个难解的陈述句"大衍之数五十"得来的[5]。公元八世纪头十年一行在他的《大衍历

① 参看 Dickson (1), vol. 2, p. 57。

② 参看李俨 (4)，第一集，第 61 页；(21)，第一集，第 122 页。

③ 参看钱宝琮 (2)，第 45 页起。

④ 《易经·系辞传》上卷九。见本书第二卷第十三章第七节。

⑤ 采用这个术语的理由是够清楚的。在《易经》所描述的古典占卜术中[参看 R. Wilhelm (2), vol. 1, pp. 236, 280; Baynes

书》中大概就曾应用过不定分析①。

在我们现在所看到的原文中，没有写明他的计算详情②，只写出答案 96961740 年，这是他所寻求的从上元③开始到开元十二年（724 年）所经过的年数。他的问题用现代形式表示时是：

$$1110343\,y \equiv 44820 \pmod{60 \times 3040},$$
$$\equiv 49107 \pmod{89773}^{④}。$$

---

tr., pp. 334, 392]，先从 50 根蓍草中拿走一根，然后把剩下的 49 根分成任意的两堆，象征阴和阳。因此，十分自然，惯用辗转相除法寻求一数的余数的数学家们必定会记得这一点。占卜时，依次把每堆蓍草四根四根地计数，把剩下来的拿开，便得到其他“余数”。因此，在中国，不定分析即使并不真正是从卜筮古法演变出来的，也是同这种古法有关联的。可以想见，他们可能在某个时候改用算筹来代替蓍草。秦九韶（《数书九章》卷一第一页正面起）曾用数学的形式为《易经》的方法作了一个经典的注释。伟烈亚力［Wylie (4)］翻译了这个问题和它的说明；亦可参看赵然凝 (1)。

① 张敦仁 (2) 也这样认为，他是这方面造诣最深的学者之一。

② 《旧唐书》卷三十四；《新唐书》卷二十八上、下。

③ 即前一次冬至正好交在既是十一月初一又是甲子日的子时的那一天。参看 Chatley (16)，亦可参看本书第四卷第 562 页。

④ 这些数字中的第一个数（“策实”）表示回归年日数的假

五个世纪以后，秦九韶在他的《数书九章》中对这个问题作了完整的解释①，这正是伟烈亚力之所以能够理解它的原故。在上面的孙子问题中，数字 3，5 和 7 称为“定母”，它们的最小公倍数 105称为“衍母”，用 3，5，7 除 105 所得到的商 35，21，15 称为“衍数”，通过分析而得到的数字 2，1，1 称为“乘率”。计算过程实质上就是求这些数。

秦九韶《数书九章》卷一第二题是历法计算，而卷三的那些问题(特别是第三题)最接近于一行的方法。虽然所用的术语不同，但凭借其中所提供的线索，我们可以了解到一行的方法②。卷三第

分数中的分子，第三个数(“爻数”)是通常的甲子一周，第六个数(“揲法”)表示朔望月日数的假分数中的分子，第四个数(“通法”)是这两个假分数的分母。第二个数表示公元 724 年的冬至与前个甲子日子时之间的日数的假分数中的分子；第五个数（“归余之卦”）是这个分数与表示公元 724 年的冬至离十一月初一的日数的假分数之和的分子。虽然上面列出的算式在形式上是正确的，但一行似乎不会拿这些未经任何简化的大数来进行计算。后来秦九韶在解类似的问题中，通过一系列中间步骤把这些数字化小。但所用的不定分析方法是大抵相同的。

① 《数书九章》卷一和卷二。亦可参看 Mikami (1), pp. 65 ff.。

② 参看王铃［Wang Ling (5)］的专门研究。

一题算气(从冬至日到癸亥日的天数)，第二题算闰(从十一月起到闰月所隔的月数)。卷三第四题和卷四第一题研究恒星的周年运动、周日运动和行星运动的不均匀性。卷一和卷二的其他问题涉及公共事业的问题，例如筑堤、仓库、谷仓、军队的活动等等①。接下去是讨论雨量和雪量的问题，不在大衍术之列②。

伟烈亚力的解释在欧洲是通过俾纳次基(Biernatzki)的译本而流传的，但由于译本中有某些疏忽，致使康托(Cantor)怀疑中国人的方法的正确性。然而，马提森[Matthiessen (1)]曾为这个方法进行过辩护，他指出，这个方法与高斯的公式是一致的。假定 $m = m_1 m_2 \cdots m_k$，这里 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 是两两互质的，又假定

$$a_i \equiv 0 \left(\bmod \frac{m}{m_i}\right),\quad a_i \equiv 1 \ (\bmod m_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, k),$$

则 $x = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \cdots + a_k r_k$ 是

$$x \equiv r_i (\bmod m_i) \quad (i = 1, 2, \cdots, k)$$

① 赫师慎[van Hée (3)]有卷一第三题和卷二第三题的翻译和解释。

② 联系到当时应用雨量筒的事实，这些问题是很有意思的。见本书第四卷第 725 页。

的一个解。秦九韶的著作还研究了模数 m_i 非互质的情形①。方法如下：选定正整数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$，使它们两两互质，即每一个 μ_i 能除尽对应的 m_i，且 $\mu_1, \mu, \cdots, \mu_k$ 的最小公倍数等于 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 的最小公倍数。这样，

$$(\mu):\quad x \equiv r_1(\bmod \mu_1), \equiv r_2(\bmod \mu_2), \cdots, \equiv r_k(\bmod \mu_k)$$

的每一个解 x 同时满足

$$(m):\quad x = r_1(\bmod m_1), \equiv r_2(\bmod m_2), \cdots, \equiv r_k(\bmod m_k)。$$

因此，把上面的方法应用到 (μ) 上去，就可以解出 (m) 来。但是，只有在每一个 $r_i - r_j$ 之差都能为对应的模数 m_i 和 m_j 的最大公约数除尽时，这种做法才是正确的。在中文原著中没有提到这种必要条件，但在秦九韶所举的例子中，这个条件是得到满足的。

---

① 马提森 [Matthiesen (2, 4, 5)] 的著作非常紊乱，把秦九韶的第一个问题说成是一行提出的，并推测它与筑堤工人的数目有关，而不是与《易经》占卜术相关联。这些错误为迪克森 [Dickson (1), vol. 2, p. 57] 丝毫不差地重犯了。马勒 (K. Mahler) 教授提出批评并积极合作，才使这个问题得到澄清。

秦九韶的第一个问题是用前面提到过的术语叙述的(其他问题也一样),意思是

$$x \equiv 1(\bmod 1),\ \equiv 1(\bmod 2),\ \equiv 1(\bmod 3),\ \equiv 1(\bmod 4)。$$

分别取 1, 2, 3, 4 的两两互质的因数 1, 1, 3, 4,则 $1\times1\times3\times4$ (或 12) 是 1, 2, 3, 4 的最小公倍数。因此 $k_1=1$, $k_2=1$, $k_3=1$, $k_4=3$ 满足同余式 $\frac{12}{1}k_1\equiv 1(\bmod 1)$, $\frac{12}{1}k_2\equiv 1(\bmod 1)$, $\frac{12}{3}k_3\equiv 1(\bmod 3)$, $\frac{12}{4}k_4\equiv 1(\bmod 4)$。因此,最小正数解由下式给出:

$$x\equiv 1\times1\times\frac{12}{1}+1\times1\times\frac{12}{1}+3\times1\times\frac{12}{3}+1\times3\times\frac{12}{4}-9\times12(\bmod 12)。$$

在中国数学中,不定问题的最普通的形式是"百鸡问题",这个问题最早出现在475年前后①。六世纪的甄鸾、七世纪的李淳风和十一世纪的谢察微是这样叙述的:"今有鸡翁一,值钱五;鸡母一,值钱三;鸡雏三,值钱一。凡百钱买鸡百只。问

① 《张邱建算经》卷下最后一题。

鸡翁、母、雏各几何。"[①] 赫师慎 [van Hée (3)] 对讨论这类问题[②]的各段原文作了详细的分析。张邱建是用不定方程(但表达得不完全)解他的问题的,但其他学者发现可用较简单的方法找到解答,并且也这样做了。在清代[骆腾风(1)]以前,始终没有对这个著名的问题作过分析。

不定分析后来被称为"大衍求一术","求一"指的是计算过程的最后一步[③]。但是在宋元时代它还有一些其他名称——"鬼谷算"(大概是因为与传说的哲学家鬼谷子有某些关系),"隔墙算"或"剪管术"。有一些通俗的叫法则把它同军事扯在一起,例如"秦王暗点兵"[④]等。

中国人的"大衍求一术"的程序类似于印度数

---

① 完全相同的问题也在埃及代数学家阿布-卡米勒·米斯里 (Abū-Kāmil al-Miṣrī, 900 年)的著作中出现。参看 Suter (2); Mieli (1), p. 108。

② 三上义夫 [Mikami (1), p. 32] 讨论了另一个例子。

③ 参看《梦溪笔谈》卷十八第九则,亦可参看胡道静(1),第 594 页。

④ 或称"韩信点兵"(韩信为汉代的名将),参看《算法统宗》卷五第二十一页反面那一节。

学[1]中的"粉碎法"(Kuttaka 或 Cuttaca),它最早出现在老圣使 (The elder Āryabhata, 生于 476 年)的著作中。这个名称是从乘数 p 的"粉碎"得来的,意思是:如果 n_1, n_2, n_3 是给定的数,则 $pn_1 + n_2$ 应为 n_3 所整除。

奇怪的是,丢番都的代数学中涉及这个题目的部分所研究的,几乎全部是不定二次方程,但在中国却没有这方面的研究。不定问题在欧洲早在九世纪就已为人们所熟悉,以后又变成流行的测智力题。由于这些问题通常与青年男女聚餐时支付饮料的费用有关[2],因此对它们的解释便被称为"妇女法则"(Regula Coecis)或"姑娘法则"(Regula Virginum)或"土豆法则"(Regular Potatorum)。与秦九韶同时代但年龄较大的皮萨诺(Leonardo Pisano)在他的《算盘书》(*Liber Abaci*, 1202 年)[3]中讨论过余数问题。

---

① 参看 Datta & Singh (1), vol. 2, pp. 87 ff.; Dickson (1), vol. 2, pp. 41 ff.。马提森 [Matthiessen (3)] 认为两者很不相同,但他的论点未能令人信服。

② 参看 Smith (1), vol. 2, p. 586。

③ 参看 Dickson (1), vol. 2, p. 59。

不定分析的问题往往与混合比例或与合金中各种成分的混合这类问题联系在一起。关于数学与化学互相接触的这一事实，史密斯[1] 作过有趣的讨论(因为在近代以前,这两方面太少接触了)。与不定分析问题有关的主要中国著作是1593年的《算法统宗》[2],不过其中的问题相当简单。但是《九章算术》[3] 在很久以前就讨论过油与漆的混合了。

(5) 二次方程和有限差分法

在中国数学中早就开始使用二次方程了,《九章算术》中就有一个问题是通过求相当于 $x^2+ax=b$ 的二次方程的正根来求解的[4]。有时,为了避免解二次方程,往往把它转化为一次方程的形式,

---

① 参看 Smith (1), vol. 2, pp. 588 ff.。

② 《算法统宗》卷二第三十六页正反面 [E. Biot (5), p. 205]。

③ 《九章算术·盈不足章》第十五题。

④ 参看前面第 57 页。

再把所得到的结果的平方根作为解答①，这是古巴比伦数学家早就使用过的一种方法②。高至三次的特殊数字高次方程在这部汉代著作中也已出现③。在五世纪的《张邱建算经》④中发现的另一个方程（象通常那样，是用文字写出的），相当于 $x^2 + cx = c^2 - 36\frac{a}{b}$。到了宋代，代数学家的方程已相当于下面⑤的形式：$x^2 - ax = b$。赫师慎曾就这些二次方程写了一篇专题论文［van Hée (1)］，但他的解释大多以十八世纪的数学家李锐的主要有关著作《开方说》为根据。告析［Gauchet (6)］也曾以罗士琳的工作为基础，对《九章算术》的方程作了类似的研究。

在与二次式有关的方法当中，最有趣的一个

---

① 例如《九章算术·勾股章》。王铃［Wang Ling (2), vol. 2, pp. 133 ff.］曾叙述了涉及选择不同未知数的办法。

② 参看 Neugebauer (9), p. 40。

③ 如果我们可以把对一个给定的数开立方解释为三次方程的特殊情形的话。

④ 《张邱建算经》卷下第九题；参看卷中第二十二题。

⑤ 参看 Mikami (1), pp. 87, 109; Smith (1), vol. 2, p. 448。

是求天体运动公式中的任意常数的方法。它与现在的所谓有限差分法是相同的。这种“招差法”可以追溯到什么时候，目前还不十分清楚，但李淳风在造《麟德历》(665年)[①]时肯定已经应用过它了。钱宝琮[②]指出，宋代和清代认为“招差法”事实上就是祖冲之首创的《缀术》(因为缀字的意义是“穿针引线”)这种意见是可取的；但是，钱宝琮的说法没有真凭实据[③]。招差法在刘焯的《皇极历》(604年)中似乎曾引用过。当时所用的方程是 $Ax+Bx^2=C$[④]，这个方法今天仍在应用，并已按照需要推广到任意高次方程中去。牛顿对这种方法也很感

① 我们之所以注意到这个问题，是由于魏莱博士曾就它提出了质疑(1949年7月)。我们感谢费希尔先生帮助我们了解李淳风的这项工作。现在我们已有李俨 [Li Nien (1)] 关于中古时代中国数学内插公式的专门研究可资参考。

② 参看钱宝琮(1)，第57，63，147页。

③ 参看前面第77页。问题在于，关于这部失传的著作，还有一些没有揭开的谜。

④ 萨顿 [Sarton (1), vol. 1, p. 494] 所给出的方程比三上义夫 [Mikami (1), p. 104] 更正确。三上义夫对这个问题的整个叙述，写得不必要地费解，不像李俨 [(1)，第179页]那样清楚，不过后者自然是用中文写的。在解释上，两者也有某些差别。

兴趣，并曾应用过它。

李淳风的目的是想描述（因而大概也是想预测）太阳角运动的不规则性。他生在笛卡儿之前一千年；如果他生在笛卡儿之后的话，他肯定会用座标把这种运动作图，画出与他的方程相一致的曲线。x 是一个观测量——太阳位置的逐次观测之间的日数或更精密的时间间隔。C 也是一个观测量——在两次观测之间太阳移动的度数。当时的要点在于求两个任意常数 A 和 B。所用的方法是相当近代化的；一切现代的自然科学都有各种各样带有任意常数的方程，使它们能够满足某些经验曲线。推导过程如下。由于各次得到的数据是

$$Ax + Bx^2 = C,$$

$$Ax_1 + Bx_1^2 = C_1,$$

$$Ax_2 + Bx_2^2 = C_2,\quad \text{等等}$$

所以，

$$A(x_2 - x_1) + B(x_2^2 - x_1^2) = C_2 - C_1,$$

$$A + B(x_2 + x_1) = \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1},$$

$$A + B(x_3 + x_2) = \frac{C_3 - C_2}{x_3 - x_2}。$$

相减以消去 A，得

$$B(x_3 - x_1) = \frac{C_3 - C_2}{x_3 - x_2} - \frac{C_2 - C_1}{x_2 - x_1}。$$

B 就是一个数值解。用类似的方法也能得到 A①。我们现在可以了解这个方法所用的术语的涵义是什么了。"平差"(或"泙差")是在每次观测中所看到的经验观测的微差。而"定差"是任意常数。一般说来，观测次数越多，计算中所用的幂次越高，常数的确定就越精确，因而就有可能作出较好的预测。

李淳风的方法既不包含在他对古代数学书籍所作的大量注释中，也不在据说是他编纂的三、四部类占星术著作中，而是见于《隋书·律历志》②。在那里，李淳风讨论了刘焯先前的工作。《旧唐书》③的编者以及《开元占经》的作者都"因为数字

① 如果所用的方程多于两个，就会得到 A 和 B 的几个可能值。假设平均值已被选定，这就成了平差计算(*Ausgleichungsrechnung*)中的一个早期问题。对中古时代中国天文学家所用的有限差分法进行充分研究是非常必要的。

② 《隋书》卷十八第三页正面；在《图书集成·历法典》卷九汇考九第十页反面和卷十，也部分转载了这个方法。

③ 《新唐书》也是这样做的。

太大”[1],而略去了他的方法。

1281年,郭守敬由于在他的《授时历》计算中引用了高次方程,似乎已得到了较大的精确度。第三个任意常数被称为“立差”,这是很恰当的,因为“立”字是代表立体图形的第三维和三次方根(开立方)。告析[Gauchet (7)]指出,在《明史》中,郭守敬的历法工作被说成后来历法的基础[2],《明史》的作者抱怨说(1739年),招差法曾经一度不为人们所理解。事实上,既然十七世纪的中国数学家能够在不熟悉十三世纪的术语的情况下[3],辨认出这些方法与耶稣会传教士所传授的那些相类似,那末,这个方法应该一直是相当清楚的。人们可以再一次说,正是由于中国数学在十五、十六世纪衰落了,十七世纪耶稣会传教士的贡献才显得如此新颖和进步。

招差法与朱世杰1303年的《四元玉鉴》中为了对某种级数求和而使用的方法有关。中国的这

① 参看钱宝琮(2),第47页。

② 《明史》卷三十三第六页正面。

③ 关于这一点,告析曾从《畴人传》卷三十中引用了一段很引人注目的叙述。参看 Mikami (1), p. 120。

种方法似乎是显著地领先的，因为欧洲直到十七、十八世纪才采用并充分掌握这种方法。尼科勒(François Nicole, 1717年)和布鲁克·泰勒(Brook Taylor, 1716年)的名字与这个方法特别紧密地联系在一起。

(6) 三次方程和高次方程

虽然郭守敬在十三世纪末使用过三次方程，但最早考虑过它们的，是六百多年以前比李淳风更早的王孝通。不过，王孝通的工作大多数只限于三次数字方程①，这种方程是我们下面将要讨论的另一个课题。在西方，在希腊和后来阿拉伯的数学家当中，三次方程与圆锥曲线的知识是紧密地联系着的②，因此，这些知识在中国没有得到发展是不足为奇的。直到十六世纪卡但(Cardan)和塔塔格利亚之间发生著名的论战的时期，欧洲才得到真正的进步③。1658年，胡德(Hudde)应用

① 只包含正数项。参看前面第80页。

② 参看 Smith (1), vol. 2, p. 456。

③ 参看 Smith (1), vol. 2, p. 460。

了笛卡儿的符号，并把这个问题化为近代的形态。

中国在宋代就已讨论过四次到九次的数字方程。贾宪大约于1200年开始研究特殊形式的四次方程。至于非数字的四次方程，那末，在刚刚提到的几个十六世纪意大利代数学家之前，不管在什么地方，都没有人取得更多的成功。在欧洲，非数字的高次方程一直到十九世纪才得到充分的论述。

(7) 高次数字方程

就我们所知，解高次数字方程求根的近似值的做法是在中国开始的，它一直被称为最有代表性的中国数学贡献。人们早就知道，这种方法在宋代代数学家的著作中已有了很大的发展，但是，如果我们十分细致地去了解汉代《九章算术》的原文[①]，就有可能证明，这种方法的精髓在这部可能是公元前一世纪的著作中就已存在了。三上义夫[②]最先发现，甚至连这种方法的最早的形式，

---

① 参看 Wang & Needham (1)。

② 参看 Mikami (1), p. 25; (6), p. 180。

也已经类似于十九世纪初期的方法了。1802 年，一个意大利科学协会为了改进高次数字方程的解法，曾颁发了一枚金质奖章，这枚奖章为鲁菲尼(Paolo Ruffini) 所获得。1819 年，霍纳完全独立地发展了一个相同的方法，不过，他们[①] 没有一个人知道，在十三世纪以及更早时期(指它的特殊情形)中国人就已熟悉它了。当然，鲁菲尼与霍纳对这个问题的论述是深奥复杂的，它包含初等代数，还包含高等分析。他们的方法曾经得到广泛采用，并且至今还在普通的代数学教科书中出现。

在《九章算术》的问题当中，有一个是求立方根的[②]，它可以写作 $x^3 = 1860867$；另一个是包含

1	8	6	0	8	6	7	实
							法
							中
						1	借算

① 关于鲁菲尼和霍纳的发现的说明见 Cajori (2), p. 271。参看 de Morgan (1)。

② 见《九章算术 · 少广章》。

有平方项与一次项的①，可写为 $x^2+34x=71000$。自然，这些方程当时不是这样写，而是用算筹安放在算盘上来表示的②。在上面的表中，最上面一列应该放置所求根的解，第二列（“实”）是运算前的常数项，第三列（“法”，后来在运算中称为“定法”）是为了放置运算各个阶段所得到的数字，第四列（“中”）是给在中间阶段得到的另一数字准备的，第五列（借算）是运算前 x^3 的系数。运算过程开始时要把借算列中的1变为 10^6（令 $x=100x_1$），所以

$$1000000x_1^3-1860867=0。$$

此后，原文不很明确地使用了商议的“议”字，它大概是指根的第一个数字 a（譬如1）的选择。然后把 a 放入顶上一列适当的位置上。接着要进行一套运算，把算盘上的数字变为相当于霍纳变换方程的形式：

$$1000x_2^3+30000x_2^2+300000x_2-860867=0。$$

① 见《九章算术·勾股章》。

② 虽然在详细叙述汉代人用筹算盘所进行的计算时，总是带有推测的成分，但我们可以遵循已知的宋代运算办法来重新确定汉代的做法。在附图中所采用的是近代的数字，应该指出，用算筹表示时，零应该用一个空位来代替。

这里的 $x_2 = 10(x_1 - a)$。用这个变换方程再"议"一次，并把解的第二个数字安置进去。重复同样的过程(略有变更)①，可以求得第三个数字。到此，《九章算术》的方法便算结束了。在这个特殊的例子中，解答是 123。但是，三世纪的刘徽指出，如果有必要，这个过程可以继续进行到小数②(我们应该这样说)。《九章算术》的作者本身似乎就已把开平方根的过程进行到某一个小数位③。

在后来的数学著作中都能找到这种开方法④，尽管术语有些改变，步骤也稍有变动，但总的说来并没有什么改进⑤。高于三次的数字方程最早出

---

① 即把乘 3 的步骤改为一系列的加法。从这方面来看，这个方法尤其可说是霍纳方法的前身。

② 在刘徽的《九章算术注》中(卷四第十四页正面)，他把根的小数部分称为"微数"。李淳风又加注说："开之不尽者，折下如前"(如果开方不能用整数开尽的话，那末，可以像先前那样减小位值而继续开下去)参看前面第 187 页。

③ 参看前面第 143 页。

④ 如《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《张邱建算经》等和宋初刘益的"带从开方"法。

⑤ 因此，梵藏(七世纪)采用《孙子算经》的方法而不采用《九章算术》的方法 [Colebrooke (1), p. 280]，确是一件憾事。参看后面第 324 页。

现在1247年前后秦九韶的著作中①，他非常明确地处理了如下方程：

$$-x^4+763200x^2-40642560000=0$$ ②。

关于宋代代数学家(包括朱世杰在内)对高次数字方程的处理办法，李俨③和三上义夫(11)已有详尽的说明。固定的术语可以从下列的表中见到，从根据

$$ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g=0,$$
$$-ax^6-bx^5-cx^4-dx^3-ex^2-fx-g=0$$

这类方程编成的下表中，可以看出在李冶著作中出现的那样一些固定化了的术语的涵义。

$+ax^6$	隅，隅法，常法④	$-ax^6$	益隅，虚隅，虚法，虚常法
$+bx^5$	第四廉	$-bx^5$	第四益廉
$+cx^4$	第三廉	$-cx^4$	第三益廉
$+dx^3$	第二廉	$-dx^3$	第二益廉
$+ex^2$	第一廉	$-ex^2$	第一益廉

① 如果贾宪真的生活在1100年前后，那末，也许最早是出现在他的《黄帝九章细草》中。不过，他仅提到过特例 $x^4=a$。

② 说明见 Mikami (1), p. 74。

③ 参看李俨(4)，第三集，第127页；(21)，第一集，第246页。

④ 当然，这些项只取系数，幂次是由各项在算盘上的位置表示出来的。

$+fx$	从，从方	$-fx$	益从，益方，虚从
$+g$	实，五乘方实	$-g$	实，五乘方实

早期希腊和印度的数学对高次数字方程的解法似乎很少或甚至没有贡献①。在欧洲，关于这个问题的最早值得注意的工作，是斐波那契在十三世纪初进行的。他在1225年给出 $x^3+2x^2+10x=20$ 的一个解，解是用六十进分数（度和分）表示的，非常接近于正确值。史密斯说②："没有一个人知道这个结果是怎样得出的。但是，这类数字方程当时在中国已经解决，并且当时已有可能与东方交往，这些事实便使得人们相信，斐波那契是在他的旅行中学到这种解法的。……"③ 总之，人们不得不注意到，这些方程正是王孝通在中国唐代（七世纪）所解决的那些有代表性的方程，即最高项的系数是1，并且所有各项都是正的（例如上面

① 前面（第195页）提到过的古代印度求小数平方根的方法，似乎正好同中国体系早期的运算相反。

② 参看 Smith (1), vol. 2, p. 472。

③ 后面在谈到钟表机械、纺织工艺、炸药和冶铁术等等的章节中，将举出许多实例来说明，中国人在元代对欧洲有过明显的影响。

写出的方程)。 此后在欧洲的进展应归功于维叶特(1600年)和牛顿(1669年)。考虑到中国数学在这方面长期遥遥领先,可以认为,这种用筹算盘上的列来表示幂次递增的办法特别适合于中国人的目的,所以,甚至到了宋代,还没有人尝试为他们的方程提出一个普遍理论。

(8) 天元术

现在我们要进而讨论宋代代数学家常用的表示数字方程的一般记号系统。 这个系统具有"矩阵"的特征①。朱世杰对它所作的经典介绍牵涉到直角三角形内切圆的问题(图57就是一个这样的图形,它出自《测圆海镜》,人们总是可以在这部书的卷首找到它)。这个问题的四个未知数如下:

斜边(弦)	人	相当于 z
高(股)	地	相当于 y
底(勾)	天	相当于 x

① 赫师慎 [van Hée (9, 12)] 和三上义夫 [Mikami (1), ch. 14] 曾作过详细的解释。当然,前面提到过的所有中国数学史家也都这样做过。

内切圆直径(黄方)　　物①　相当于 u

这个四元② 的"方形"或"矩阵"是像右图那样建立起来的。当中那一格为绝对项（如果有这一项的话)所占领,它被称为"太"(太极的缩写)③,"人"(z 和 z 的幂) 写在"太"的右边;"地"(y 和

	物	
地	太	人
	天	

① 在史密斯 [Smith (1), vol. 2, pp. 392, 393] 的倡导下,史密斯和三上义夫 [Smith & Mikami (1), p. 51] 研究了未知数记号"物"与拉丁记号 *res* 及意大利记号 *Cosa* 之间的相似性。代数学的古名 "Cossic Art" 是从后一个记号演变来的。萨顿 [Sarton (1), vol. 3, p. 701] 则认为,它们不大可能有任何关系。但是,阿拉伯人也把未知数称为 *shai'* [即"物",参看 Gow (1), p. 11]。进一步的研究无疑将揭露这些用法来源于何处和它是怎样传播的。后面(第 324 页)我们将发现一个更为明显的事例,说明中文与梵文关于三率法的专用名词词意相同。

② 朱世杰的书名就是从这个词来的,见前面第 91 页。"元"往往被译为 elements(元素),这常常同物质学说中的五种元素(五行,见第二卷第十三章第三、四节)相混淆,因而是难以容许的。译为 monads (单子)是更坏的译法。"元"的真正意义是在这种位置代数学中排列未知数各次幂的系数的四个方向的出发点。见下页的图。

③ 由于我们已发现宋代新儒学哲学家也使用这个专门术语(见本书第二卷第十六章第四节),因此,应该特别注意它的用法。数学家们大概是按现在的概念应用它,因为绝对项是起点 $(+a = ax^0)$ 或 x 的正幂与负幂之间的分界点。

y 的幂)写在"太"的左边；"天"(x 和 x 的幂)写在"太"的下面；"物"(u 和 u 的幂)写在"太"的上面。从"太"沿任何一条直线向外延伸，第一个格用来记一次项(例如 $10x$)，共有四元。向外第二格是二次项，第三格是三次项，第四格是四次项，如此可以无限地推下去。从"太"向外沿对角线方向计算的第一格用来记 xy 或 xz 这样的相乘项。但由于有四个未知数，这样的相乘项可以有六种；因此在中格"太"的旁边也必须插入小号数码。下面的左图说明 $x+y+z+u$ 的记法，中图是更为复杂的代数式

	元	
元	太	元
	元	

$$x^2+y^2+z^2+u^2+2xy+2xz+2xu+2yu+2yz+2zu$$

的记法。必须想到，由于要解的方程一般是联立的，所以需要同时应用几个算盘。我们这部篇幅

	1	
1	太	1
	1	

		1		
	2	0	2	
1	0	$_2$太^2	0	1
	2	0	2	
		1		

2	−8	28	太
0	−1	6	−2
0	0	0	−1

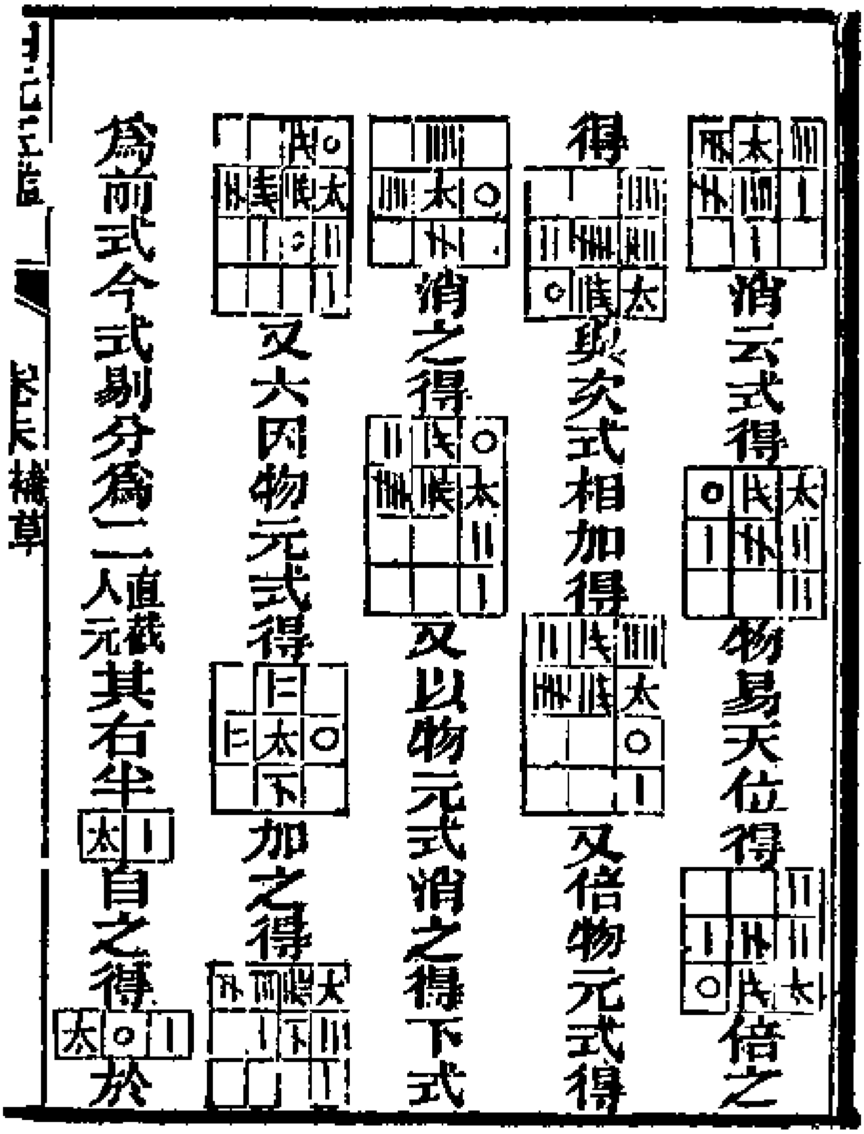


图 78 朱世杰《四元玉鉴》(1303 年)丁取忠校刊本的一页，其中有一些天元术代数表示法的“矩阵”。右边第一行中间的图形与上页右下图所示的例子相似，它所表示的是代数式

$$xy^2 - 120y - 2xy + 2x^2 + 2x$$

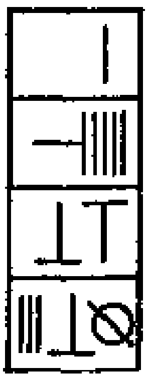
有限的书需要讨论很多其他题目，因而不可能对一个问题的计算作出详尽的说明。关于这些，读者可参考赫师慎的著作 [van Hée (12)] 及其他提到过的著作。不过，粗略地看一看在解四元方程的实际过程中一个算盘上某一角的数字，可能是有益的。前面 292 页的右下图表示如下表式：

$$2y^3 - 8y^2 - xy^2 + 28y + 6yx - x^2 - 2x_{\circ}$$

应该记住，负号是通过在指定格子里的算筹数码上加一条斜线来表示的。零总是意味着，它所占据的格子所对应的项在代数式中不出现。

在宋代代数学家的著作中，正像其中留存至今的书所显示的那样，在正文中从来没有这样的图形，只有一些是近代编者插入的(图 78 中就有一些)，但它们当然是按原有的叙述画出的。然而，我们找到了只考虑一个未知数的较简单的天元术代数学计算过程，数字排列在印刷页竖写的行中，并且通常只写出一个“太”字或“元”字，因为只要其中有一列被确定下来，就能立即看出其他列表示什么。因此，方程

元

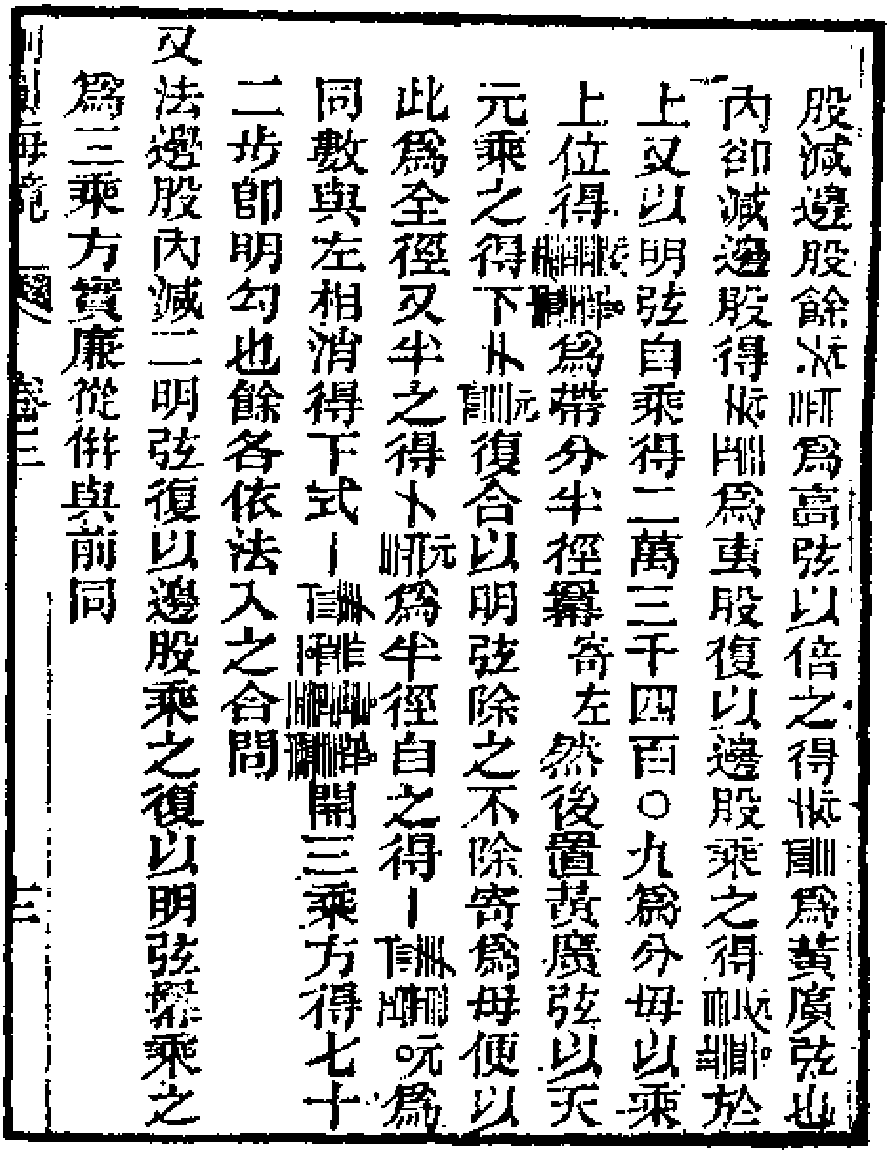


$$x^3 + 15x^2 + 66x - 360 = 0$$

可表示成上页的图。图 79 采自《测圆海镜》，它表明在原文中方程是怎样排列的。这种排列方法，好象是从可以掌握四个未知数的矩阵中分离出一条单轴那样，但是，如果这条轴延续到“太”(常数项)以下，就有可能处理负幂 (x^{-2}, x^{-3} 等)①，这是李冶所使用的方法②。

正如我们在叙述历代文献时已提到的（前面第 90 页起)，有许多证据表明，在李冶和秦九韶的时代之前，代数学就已在蓬勃发展了。我们可以有把握地说，它在十二世纪就已处在发展之中。最早的方法十分自然地包含从古代算盘演变来的分栏排列(如上面所指出的)。我们刚刚看到的《测圆海镜》的记号体系，它的合理的鼻祖大概出在《九章算术》的除法之中③。《益古演段》所使用的顺序相反的体系（它的常数项在最顶上)④，则与《九章算术》的开方过程相似。李冶在《敬斋古今黈》中告诉我们⑤，他曾发现一部讨论这种方法的

① x^{-1} 称为“元除太”，x^{-2} 称为“元再除太”，余者依此类推。
② 参看李俨 (1)，第 142 页。
③ 参看前面第 142 页。
④ 参看前面第 97 页。
⑤ 参看《敬斋古今黈》卷三。



股減邊股餘為高弦以倍之得為黃廣弦也
內卻減邊股得為車股復以邊股乘之得於
上又以明弦自乘得二萬三千四百○九為分母以乘
上位得為帶分半徑冪寄左然後置黃廣弦以天
元乘之得下復合以明弦除之不除寄為母便以
此為全徑又半之得為半徑自之得為
同數與左相消得下式三乘方得七十
二步即明勾也餘各依法入之合問
又法邊股內減二明弦復以邊股乘之復以明弦乘之
為三乘方實廉從併與前同

测圆海镜 卷三

图 79 李冶 1248 年的《测圆海镜》中天元术代数学“矩阵”表示法的单轴。请注意其中算筹数字的拼合形式、零号、负号和固定在一次项位置的“元”字。例如，在从右边算起第五行里可看到代数式 $-2x^2+654x$

(佚名)数学著作(这似乎是他年轻时的事,一定是在1200年以前)。为了区别"上下层数",这部著作用了十九个专门名词。这种方法大概只处理一个变数,中"层"的"人"字必定是常数项,常数项上面的第九层必定须对应于 $x^9$①,而常数项下而的第九层(鬼)则对应于x^{-9}。但是关于这部书,现在连书名也不知道②。

(9) 二项式定理和"巴斯噶三角形"

很明显,宋代代数学家在解高次数字方程时,需要用到二项式定理。对于任意整数 n 来说,二项式 $(x+a)^n$ 的展开在于在展开式中找出中间项的系数。例如,

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

就是他们处理过的一种表式。用近代术语表达时,

---

① 这一层的名字"仙"使我们想到,这种代数学思潮的起源(像汉代著作《数术记遗》一样),不是与道家无关的。

② 在李冶的同一著作中还提到,他的一个前辈彭泽由于"置天元在下"(大概是在"太"之下)而背离了古代的做法;按照李冶的办法,x 的正幂的位置应该处在"太"之上。

二项式的一般展开式是

$$(x+a)^n=x^n+{}_nC_1x^{n-1}a+{}_nC_2x^{n-2}a^2+\cdots+{}_nC_na^n,$$

最末一项是常数项。从这个表式不难得到一个二项式系数表，对于任何给定的 n 值，都可以从表中读出在级数中各中间幂的系数，这里 ${}_nC_0$ 是最高次幂的系数，以下各项是依次递降各幂的系数，直至常数项。

n	${}_nC_0$	${}_nC_1$	${}_nC_2$	${}_nC_3$	等等
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
等等					

由于巴斯噶的《算术三角形专论》(*Traité du Triangle Arithmétique*) 是在他死后于1665年出版的，因此，欧洲从十七世纪以来就把这种阵列称为"巴斯噶三角形"。事实上，这种阵列第一次是出现在阿皮亚尼斯 (Apianus) 的《算术》(*Arithméti-que*, 1527年)一书的封面上①，比巴斯噶要早一个多世纪，并且在十六世纪就已相当广泛地流传开

① 史密斯 [Smith (1), vol. 2, p. 509] 也加以复制，他把他自己的复制称为"第一次印刷"，这同他先前提到朱世杰的话自相矛盾。

了[①]。但是，如果阿皮亚尼斯、吴脱德(Oughtred)、施蒂费尔(Stifel)和巴斯噶能够看到朱世杰的《四元玉鉴》(1303年)，他们肯定会大喫一惊。图80中复制了《四元玉鉴》中的二项式系数三角形，它被称为"古法七乘方图"。$n-1$乘积相当于x^n；$n-1$乘隅相当于a^n，三角形底行的"廉"分别代表相继各项[②]。

朱世杰说这个三角形是古法，这一事实说明，二项式定理最晚在十二世纪初期就已为人们所知[③]。仅有的另一个文献是1100年前后波斯的乌马·卡亚米(Umar al-Khayyāmī)[④]所说的一段

① 当然，这个问题更早就已为阿拉伯学者(例如1425年的贾姆希德·卡希)研究过，参看 Rosenfeld & Yushkevitch (1), pp. 59 ff., 387 ff.。他在这方面的工作在一个多世纪以前已通过泰特勒 [Tytler (1)] 为西方所了解。

② 朱世杰以后，这个三角形又由某些后来的中国著作重新复制过，例如在吴信民(1450年)的著作和1593年的《算法统宗》中。

③ $n=2$的情形当然已为欧几里得(《几何原本》第二卷第四个命题)所重视，而《九章算术》在开立方的方法中则包含了$n=3$的情形。把这个方法推广到三次以上是特别重要的一步，因为它把代数学从三维空间几何学的桎梏下解放出来了。

④ 他的姓名一般写作 Omar Khayyam [Sarton (1), vol. 1, p. 759]。

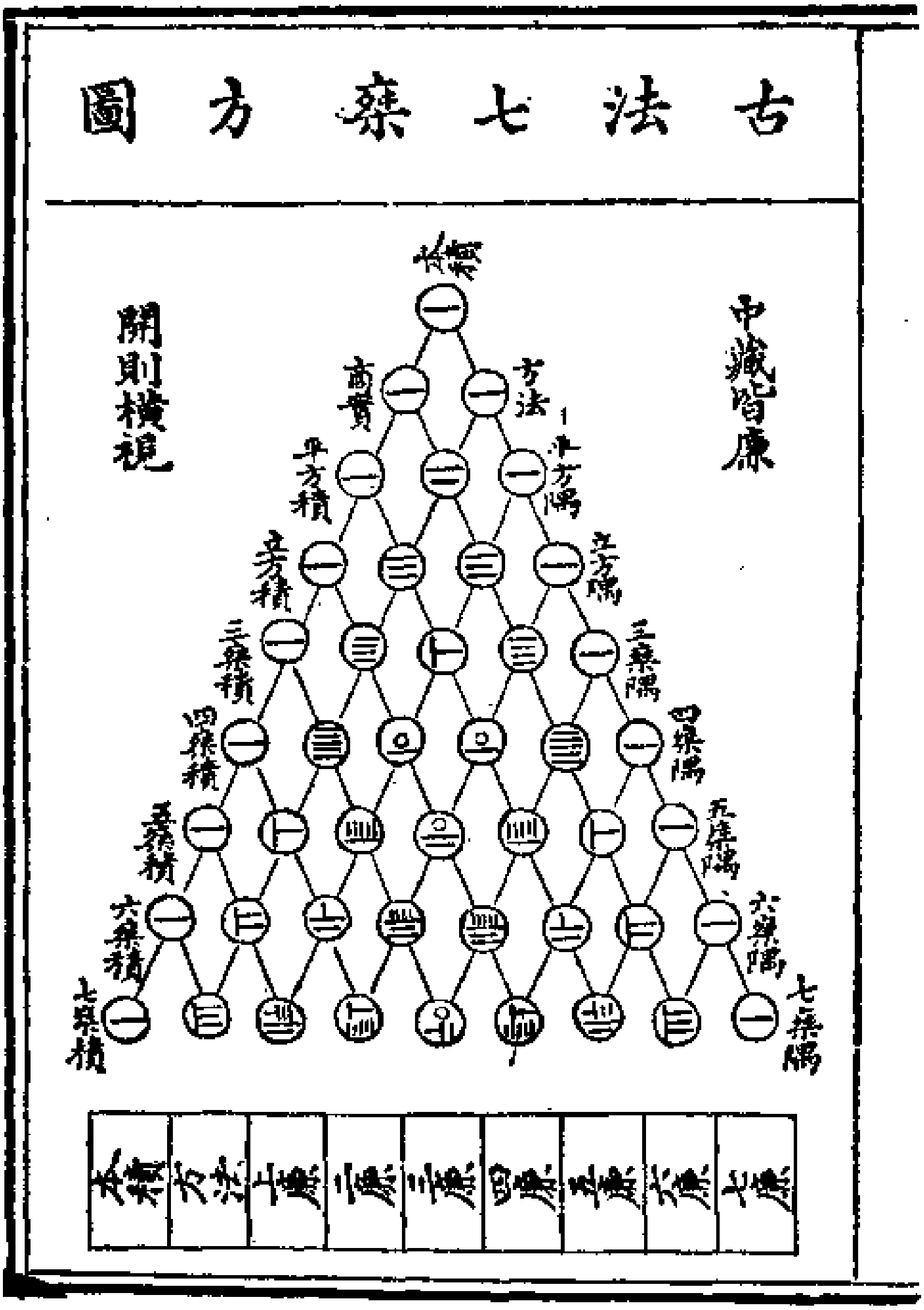
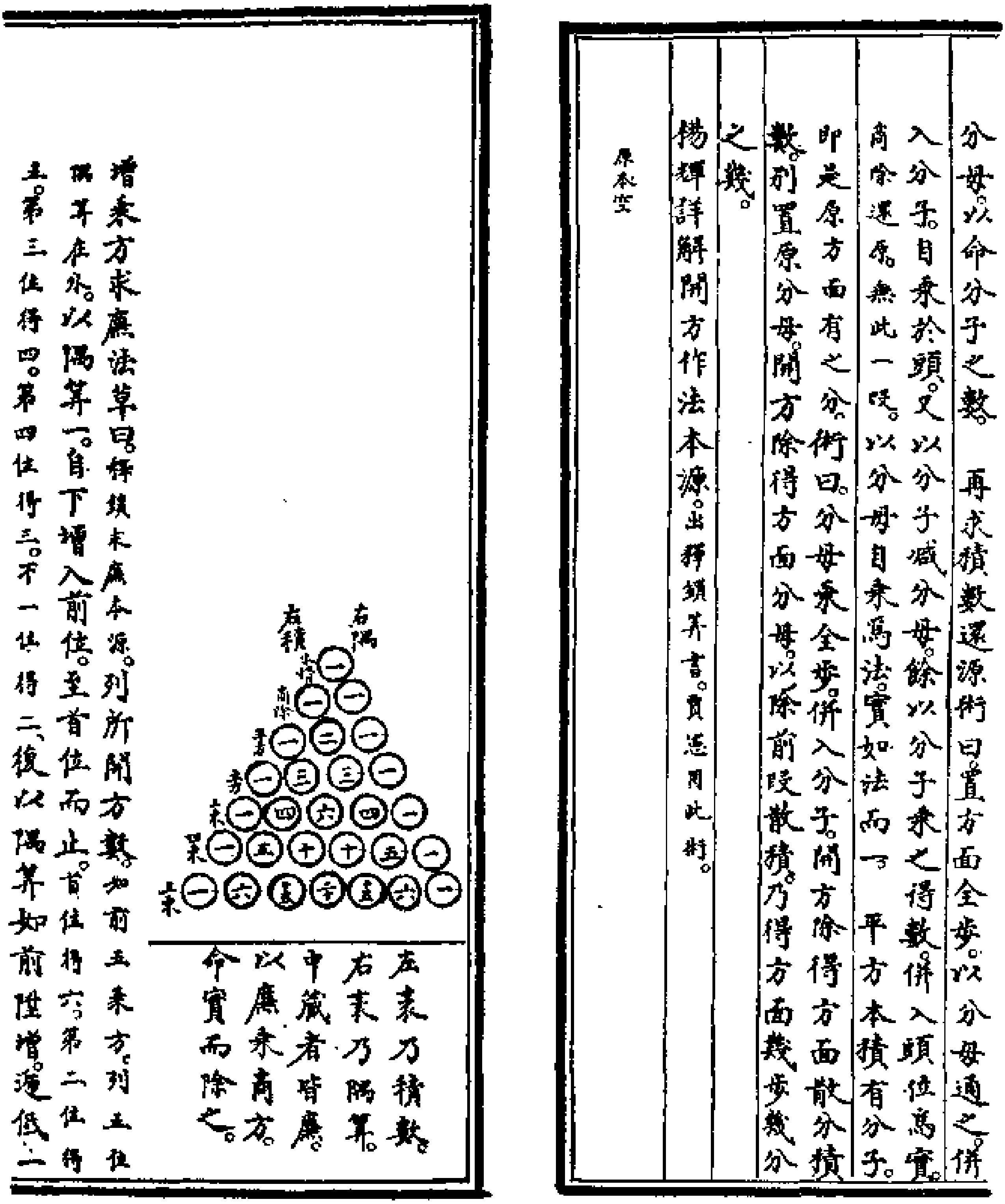


图 80　1303 年载于朱世杰《四元玉鉴》卷首的“巴斯噶三角形”，它被命名为“古法七乘方图”，图中将二项式各系数排列成表，一直排列六次幂

话，他说，他能够用他发现的一种不依赖于几何图形的法则，求出各个数的四次、五次、六次以至更高次方根，并说这个问题的解释记载在另一部书中，但是，这部书并没有存留下来①。在中国，虽然这个三角形的现存的最早复制图是在杨辉的《详解九章算法》中，但我们从该书得知它老早就已存在了。贾宪在1100年前后就曾解释过它。贾宪所用的方法称为"立成释锁"，它可能是在另一个数学家刘汝谐的《如积释锁》一书（已失传）中最先叙述的。刘汝谐与贾宪似乎是同时代的人（见图81）。

这里出现一个很有趣的问题。我们注意到，在图80中，算筹数字是横过来排列的，因此可以想到，三角形的底边原先是竖立在左边的。这样，

① 这段话的西译文见 F. Woepcke (1), p. 13, 翻印品见 Winter & Arafat (1), p. 34; Luckey (4), p. 218, 参看史密斯 [Smith (1), vol. 2, p. 508] 的评论。卡亚米关于这个问题的描述是十分清楚的，他认为他的方法出自早期印度数学家所叙述的二项之和的平方和立方的系数 [例如梵藏628年的叙述，见 Colebrooke (2), p. 279]。类似的系数也出现在《孙子算经》（三或四世纪）卷中及《九章算术·少广章》；参看 Wang & Needham (1), pp. 350, 356, 390。



分母以命分子之數。再求積數還源術曰置方面全步。以分母通之。併入分子。自乘於頭。又以分子減分母。餘以分子乘之得數。併入頭位爲實。商除還原。無此一段。以分母自乘爲法。實如法而一。平方本積有分子。即是原方面有之分。術曰。分母乘全步。併入分子。開方除得方面散分積數。列置原分母。開方除得方面分母。以除前段散積。乃得方面幾步幾分之數。

楊輝詳解開方作法本源。出釋鎖算書。賈憲用此術。

原本空

增乘方求廉法草曰。釋鎖求廉本源。列所開方數。如前五乘方。列五位隅筭在外。以隅筭一。自下增入前位。至首位而止。首位得六。第二位得五。第三位得四。第四位得三。下一位得二。復以隅筭如前陞增。遞低一

左袤乃積數。右袤乃隅筭。中藏者皆廉。以廉乘商方。命實而除之。

图 81 中国现存最古的“巴斯噶三角形”的形象，采自《永乐大典》手抄本(1407年)卷一六三四四(剑桥大学图书馆藏)。正如右起第七行的文字所指出，它是杨辉在 1261 年从一部更早的著作《释锁算书》搬到他的《详解九章算法纂类》中去的。原文并说，这种三角形曾为贾宪(1100 年前后著称)所使用过

未知数的幂就应该放在算盘中各横列上，正如我们已经知道的(从《九章算术》)，这是古代(汉代)开平方或开立方的惯例。这里我们又能看到，从古代的算盘到宋代的代数学记法是合理地一脉相承的。这里的格网是从古代的横列自然地发展起来的。因此，系数三角形起源于中国的说法似乎是比较现实一些。卡亚米的工作是从印度的传统中得来的，而印度的传统本身似乎在更早的时候就受到中国开方术的影响①。

① 在卡亚米以前的阿拉伯数学家可能已经熟悉某些二项式系数，例如，阿布尔-瓦发·布兹贾尼(940—998年)曾写了一本书，书名就暗示当时已有开三次、四次和七次方根的知识[参看 F. Woepcke (2), p. 253, Luckey (4)]。阿布·巴克尔·卡拉吉(Abū Bakr al- Karajī, 1019—1029年著称)也知道三次和四次的二项式系数[参看 Luckey (3, 5), Levi Della Vida (1)]。卡亚米像与他同时代的贾宪那样，曾把资料加以系统化。辛格[Singh (2)]提出，印度也有极为古老的巴斯噶三角形。虽然十世纪的注释家哈拉尤达(Halāyudha)从平伽拉的《昌达苏多罗》(*Chandaḥ-sūtra*, VIII, 23，公元前200年)的一节，推出一种类似的数字横表(*Meru-prastāra*)，但它仅仅是一些诗韵的组合，与二项式系数没有关系[参看 Luckey (4), p. 219]。

(10) 级数

刚才讨论过的问题离级数的一般问题并不远。希腊的数学家曾研究过算术级数、几何级数和调和级数，这些级数在印度和阿拉伯的著作中也可以找到。最早讨论过算术级数的可能是古埃及的阿美斯纸草。中国数学从一开始也对级数表现出一些兴趣[①]，它的迹象最早是出现在《周髀》中。《九章算术》第三章（衰分）有许多涉及级数的问题，例如五等官分鹿的问题。这是一个算术级数，我们可以把它写成

$$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)+(a+4d)=5,$$

这里 a 是最低等官员的所得，d 是相邻两等官员所得之差。书中只给出一个解，即 a 和 d 都等于 $\frac{1}{3}$。在汉代和三国时期，有几个关于女织工的产量问题，可见当时对纺织品的生产已有浓厚的兴趣。

① 参看李俨(11)；(4)，第三集，第 197 页起；(21)，第一集，第 315 页起。在这些著作中，对这个问题作了详细的讨论。赫师慎也有一篇短文 [van Hée (16)]。

《九章算术》和《孙子算经》都有这样一个算题："今有女子善织，日自倍，五日织五尺，问日织几何?"这里的级数是[1] $a+ar+ar^2+ar^3+ar^4=5$，$r=2$，答案是 $a=\frac{1}{10}+\frac{19}{310}$，即 $\frac{5}{31}$。这是一个几何级数[2]。

五世纪末，张邱建在他的《算经》中，已把解题方法加以一定程度的一般化。他有一个关于织工的纺织速率逐日增加的问题[3]：$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+$ 到 n 项 $=S$。根据原著(当然是用文字写出的)，$d=\frac{(2S/n)-2a}{n-1}$。其中还有一个递减级数："今有女子不善织，日减功迟。初日织五尺，末日织一尺，今三十日织讫，问织几何?"给出的答案是 $S=\frac{n}{2}(a+z)$，此处 z 是末项。为了这些纺

① 参看李俨(4)，第三集，第 215 页。

② 必须注意到，《九章》的数学家们常常用试位法(参看前面第 264 页)和三率法来解他们的级数问题，因此便把级数分成一些独立的比例式。他们没有导出分别求 d，r 或 a 的新公式。因此，这些问题的出现不能证明，汉代人对数学的这一分支曾有所贡献，尽管从三上义夫，李俨和其他数学史家的讨论很容易得到这种印象。

③ 《张邱建算经》卷上第二十二题。

织问题，张邱建应用如下的术语。级数的首项 a 称为"初日织数"；末项 z 为"末日织数"；项数 n 为"织讫日数"，和 S 为"织数"，公差 d 为"日益"。这些公式是中国最早的算术级数公式。

应该记住，根据《前汉书》的记载，271 根算筹可以配成六觚[①]。这不仅是一个形数的例子，并且也是一个算术级数的例子。在十三世纪末朱世杰对级数作精心分析时，这个例子对他大概是很有启发的[②]。朱世杰的《四元玉鉴》以相当先进的水平对高阶级数进行了讨论[③]。他把一束箭束成各种横断面，例如圆的或方的；他还把球垛成各种形状的垛，例如茭草垛、三角垛、圆锥垛等。他假设

$$r^{|p|}=r(r+1)\cdots(r+p-1),$$

并设 r 和 p 是正整数，从而得到一些相当于

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}=\frac{n^{|p+1|}}{1^{|p+1|}}$$

---

① 参看前面第 154 页。

② 当然，必须记得，宋代对级数的讨论，是从沈括 1078 年前后的隙积术（《梦溪笔谈》卷十八）开始的；在隙积术中，他考虑了在平头楔形体中有空隙的累棋、层坛及酒家积罂等。沈括的工作后来为秦九韶和杨辉所发展。参看后面第 316 页。

③ 《四元玉鉴》卷中第六页正面起，参看李俨（21），第一集，第 339 页起。

和

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{r^{|p|}}{1^{|p|}}\frac{(n+1-r)^{|q|}}{1^{|q|}}=\sum_{r=1}^{n}\frac{r^{|p+q|}}{1^{|p+q|}}$$

的关系式和许多具有类似性质的其他级数，但是，他没有给出任何理论证明。

此外，虽然元代和明代有一些数学家仍继续解决这方面的问题，但在耶稣会传教士来华以前，中国在探讨级数方面没有什么进步。

(11) 排列和组合

鉴于中国数学记法具有一般矩阵的性质，有人会想到棋盘问题是从中国传到欧洲的，当然，鉴于印度创造了现代形式的棋子，也会有人认为是从印度传去的。有些棋盘问题牵涉到级数，另一些则牵涉到排列、组合和概率。欧洲中世纪的一个著名的问题是关于在棋盘上放谷粒的问题：在第一个方格里放一粒，第二个方格放两粒，第三个方格放四粒，照这样按几何级数一直放下去，问从理论上说，总共可以放多少谷粒？答案是：总数等于 $2^{64}-1$。

另一个著名的问题是瓦卡[Vacca (2)]曾经讨论过的，它与八世纪唐代僧一行的名字有关。沈括在《梦溪笔谈》中写道[①]：

据讲故事的人说，僧一行有一次计算了可能摆出的棋局的总数[②]，并且发现他能够丝毫没有遗漏地计算出来。我再三思考了这件事，最后得出结论说，这是很容易办到的。不过，这时所牵涉到的数字不能用一般使用的数字名称来表达。在这里，我主要只提一提计算中需要用到的大数。用两路和四个棋子，可以摆出81种不同的可能棋局。用三路和九个棋子，总数是19683。用四路和十六个棋子，总数是43046721。用五路和二十五

① 《梦溪笔谈》卷十八第七则，由作者译成英文；参看钱宝琮(1)，第102页；胡道静(1)，第二卷，第590页。

② 这里说的大概是围棊。这种棊当然与西方玩的棋不同，并且至少可追溯到公元三世纪(《畴人传》卷一)。参看 Culin (1), p. 868，在这里可以看到，近代的围棊盘有十九路。沈括提到，最古的棊盘，有十七路，格子共有289个点，共用150个白棋子和150个黑棋子。因此，"棋局"指的是各点为白子、黑子所占或无子的局面。在游戏开始时，棋盘是空的。亦可参看 Volpicelli (1); H. A. Giles (6)。

个棋子，总数是847288609443。……到七路以上，总数就大得无法用现有的数字名称来表达了。当361个棋子全部用上时，总数达到 10000^{52} 的数量级。

〈小说：唐僧一行曾算綦局都数，凡若干局尽之。予尝思之，此固易耳。但数多，非世间名数可能言之。今略举大数。凡方二路，用四子，可变八十一局。方三路，用九子，可变一万九千六百八十三局。方四路，用十六子，可变四千三百四万六千七百二十一局。方五路，用二十五子，可变八千四百七十二亿八千八百六十万九千四百四十三局。方六路，用三十六子，可变十五兆九十四万六千三百五十二亿九千六百九十九万九千一百二十一局。方七路以上，数多无名可记。尽三百六十一路，大约连书万字五十二。…〉

沈括接着又解释一行的方法说，他们能够计算出在棋盘上出现的一切可能的变换和移动的数目①。看来，“上驱”、“搭因”、“重因”等就是这些计

① 即 10^{208}。在沈括的进一步解释中，出现了表式 3^{361}（相当于 10^{172}），这是正确的答案。也许他的第一个数字应该校正为 10000^{42}。我们还在很早的《前汉书》（卷二十一上第二页正面）发现表式 3^{12}，这是颇有意义的。

算的名称[①]。

一提到中国对排列和组合的研究，人们立即就会想到前面在第十三章第七节中已详细讨论过的《易经》和其中的八卦及六十四卦[②]。我们大概可以想到，它曾引导人们去对一切可能的排列进行某些数学研究，并且，如果说这种研究的结果不能明显地看到的话，那末也有理由认为，它们是被某些教派(大概是道教)当作秘传的教义保藏起来了。在这一方面，公元190年的《数术记遗》(见前面第63页)及其无可怀疑的道教背景是值得注意的。在这部书中提到几种与占卜有明显关系的计算方法，例如"八卦算"和"龟算"，这里的卦是按不同的方法在八个方位上排列起来的[③]，而"把头算"

① 《梦溪笔谈》卷十八第九则。温特(H. J. Winter)博士告诉我们，在同一世纪，比鲁尼也讨论过一些类似的问题。参看Rouse Ball (2), pp. 161 ff.;关于阿拉伯人在这方面的兴趣，尤可参看 Weidemann (10)。这大概是在九世纪末由亚库比(al-ya'qūbī)开始的。参看胡道静(1)，第二卷，第594页。

② 不止一个观察家(例如三上义夫)注意到这样一个事实：《易经》的六十四卦是由长短画组成的，因此有理由认为它可能与算筹有一些关系。参看前面第269页。

③ 因为这里的叙述提到某种"针"，所以，这部书包含了有关指南针的一个重要证据，我们将在第二十六章第九节磁学部分再回头来讨论它。

可能与骰子的投掷有关①。在前面(第167页)讨论算盘的起源时，我们有机会描述《数术记遗》中提到过的几种计算工具，其中的珠子(有时是不同颜色的)是放在记数的或刻度的坐标上的。如果这些工具仅仅是为了记数，那末，它们的价值就不太大了，因为数学家们在应用算筹方面已经十分熟练。因此，我们可以设想，它们的真正用途是研究排列和组合。例如，当我们在太乙算中看到板上记有数字9183时，那末，我们似乎有理由假定，这种算具有助于回答"从9183能组合出多少个不同的数来"这样一个问题。可以假定，第一、第三、第八和第九道的珠是可以交换的。同样，三才算可能是企图回答一些这样的问题："如果九个字母当中三个是a，三个是b，三个是c，那末，它们一共有多少种排列方法？"而八卦的问题，则和"八个人围着一张圆桌坐，共有多少种不同坐法"这个问题相类似。

① 参看三上义夫(1)，第57页；Culin (2)。文王课占卜法至今在中国仍有人会用，占卜时要抛起六个硬币，每个硬币的两面有不同的图画(类似于正反面)。文王课的解释可以在占卜书中查到。我们后面将看到这种实践是如何与磁罗盘的历史相联系的。

这里，必须提起十一世纪邵雍所作的《易经》六十四卦的排列。关于邵雍的著作，我们在前面(第二卷第十三章第七节)已经讲过。莱布尼茨认为这种排列不是别的，而是把从1到64这些数字用二进位记法写出来(见第二卷第十三章第七节)。六十四卦也启发了一个日本封建领主藤原通宪，他在公元1157年前后写成一部日本早期数学著作《计子算》，虽然这部著作已经失传，但后人知道，其中包含有六十四卦组合的数学研究①。

我相信，如果有一个汉学家兼通数学，那末，通过对隐晦难解的中国中世纪占卜术著作的探索，他在这方面是会大有收获的。秦九韶在公元1247年的《数书九章》的自序中说，数学学派有三十余家，其中有的是建立在讨论太一壬甲(算卦)三式的著作的基础上的，但他们都是属于内算(秘传的数学)。在他们留下的大量著作中能不能发现一些对排列组合理论有价值的早期贡献，这是一个值得进一步研究的问题。鉴于欧洲在外士拉

① 参看 Smith & Mikami (1), p. 17。亦可参看前面第137页。

(Abrabam ben Ezra, 1140年)① 以前，印度在巴斯卡拉 (Bhāskara, 1150年) 以前，在这方面的发现极端贫乏，因此，这种研究是很有意义的。直到十五世纪末帕乔利的时代，排列和组合的问题才有了真正的进步，关于它的第一部著作——贝努意 (J. Bernoulli) 的《猜度术》(*Ars Conjectandi*)——直到1713年才问世。

(12) 微积分

史密斯②曾说过，通常所说的微积分，它的发展有四个主要步骤。第一步在于用穷竭法从可公度的量过渡到不可公度的量，这在希腊是早在公元前五世纪就已为安提丰 (Antiphon) 发现了③，而在中国则大约到公元三世纪才发现。早期探求π的真值的人在用多边形内接于圆时，总是力图竭

① 参看 Sarton (1), vol. 2, p. 187。

② 参看 Smith (1), vol. 2, pp. 676 ff.。

③ 这件事只有亚里士多德在叙述中提到过 [Heiberg (1), p. 5; Sarton (1), vol. 1, p. 93]。参看 Van der Waerden (3), p. 131。

尽这时形成的剩余面积。第二个普遍的步骤是无穷小的方法,这个方法在十七世纪开普勒(Kepler)和卡瓦列里(Cavalieri)的著作中已开始受到重视,并在牛顿和莱布尼茨的著作中得到应用。第三个步骤是牛顿的流数;第四个步骤是极限,这也要归功于牛顿[①]。

在希腊人当中最接近积分的是阿基米得(公元前225年)求抛物线弓形面积的工作,他在抛物线与其内接最大三角形之间的每一空间中,又内接一个新的三角形,这个新的三角形和剩余空间同底同高。这样无限次重复进行下去,最后的三角形便非常之小了。他的方法实际上是无限级数求和的最早的例子。很容易看出,这同原子理论和几何点的"原子"定义(见前面第203页)有着密切的思想联系。公元前三世纪初,亚里士多德学派有个不知名的人写了一部《论线不可分》(*De Lineis Insecabilibus*)来反对这些思想。这些思想在停滞状态中持续了很久,所以,十二世纪初法国犹太人

① 关于这个问题,可参看布瓦耶的优秀著作[Boyer(1)]。亦可参看 Sergescu (1); Struik (1)。

本·巴奇莱（*ben Barzillai*）才会写道：“曾经有人说过，在世界上除矩形外是没有形的，因为每一个三角形或矩形都是由小到无法察觉的细微矩形组成的。”因此，我们应该料想到，由于原子学说对于中国人的思想是陌生的，微积分似乎不会在中国扎根①。但是，正如我们马上就要看到的那样，这种料想并没有完全应验。不过我们在这里必须首先简单谈谈西方微积分的发展史。

1609年前后，开普勒对于椭圆的扇形面（以焦点为顶点）极感兴趣；他假设行星在相等的运行时间内，必须扫过相等的扇形面积，并认为立体好象是由无穷多的小锥体或薄圆盘所组成的，它们的总和就是所求的答案。这引导卡瓦列里去发展他的“不可再分量”方法②。长度、面积和体积都可以用对无限多不可再分量或无穷小量求和的方法得到，许多数学家——费玛、罗贝瓦尔(Roberval)、瓦里斯（Wallis）、巴罗（Barrow）等——都曾沿这条道路向前推进。直到这个时候，处理方法一直

① 当然，原子说是发源于印度的，因此，中世纪的印度数学家具有把零看作无穷小的倾向是不足为奇的。

② 参看 *Geometria Indivisibilibus*, 1635 年。

是属于静态的。但牛顿和莱布尼茨从根本上奠定了新的基础，他们不是考虑许多微小的"原子"，而是考虑力学上点的运动。这样，牛顿想到，一条曲线是一个流动着的点描画出来的，他把流动点在无限短时间内所经过的无限短路程称为流动量的微分①。

人们马上会说，中国人和日本人的思想在耶稣会传教士来华、从而引起全世界科学的合流之前，决不会获得这种动力学的概念。然而，值得注意的是，他们有一些关于无穷小、穷竭法和积分的概念的基础。在上述法国的犹太学者说那些话之前不到一个世纪，沈括在《梦溪笔谈》②中提到了"造微之术"，由此看来，他肯定已有一些几乎完全同600年后卡瓦列里的无穷小求和相当的思想。在体积方面沈括讲到"隙积"，也就是需要用穷竭法去精确估计的剩余空间。在面积方面，他

① 当然，在这里，我们不能详谈牛顿和莱布尼茨的追随者之间在微积分的发明权问题上的著名争论；总的说来，牛顿似乎有一定的优先权，而莱布尼茨则充分地引入了今天所用的符号。

② 《梦溪笔谈》卷十八第四则，参看胡道静（1），第574页起。

讲到“割会之术”。关于前者，他讨论了在累棊、层坛或酒罂之间的“刻缺”和“虚隙”①。他肯定已经知道，分割成的单元愈小，用穷竭法所能求出的任何给定的体积或面积就愈精确。刘徽用增加内接多边形的边数求 π 的方法就已含有这种思想。因此，沈括也应用刘徽用过的“再割”这个术语。近代中国数学家在微积分中采用的名词微分和积分是一个有趣的巧合，他们可能不知道，这些词已为十一世纪的中国思想家所采用，并且在概念上是大致相同的。此外，我们也已经看到，从中国哲学的萌芽时代起，累点成线以及累线成面的思想在墨子的定义（前面第201页）中就已出现，连续概念和无限分割概念也已为名家——惠施②（公元前四世纪初）的朋友们——清楚地表达出来了。然而，这些议论被历史的迷雾掩盖了好几百年，直到我们这个时代才又得到人们的重视。

关于在给定体积内将许多小单元累积起来的问题，直到十六世纪仍继续引起中国数学家的注

① 他的著作中有关级数的部分已在前面第306页提到过。

② 《庄子》卷三十三，参看本书第二卷第十一章第三节。

意，例如，周述学在他 1558 年的《神道大编历宗算会》(现在是一本罕见的书)中，给出在角锥内把球累成十层的图解说明。图 82 是从锥顶看下来的角锥。不过，在级数方面，周述学没有任何特殊的进展。

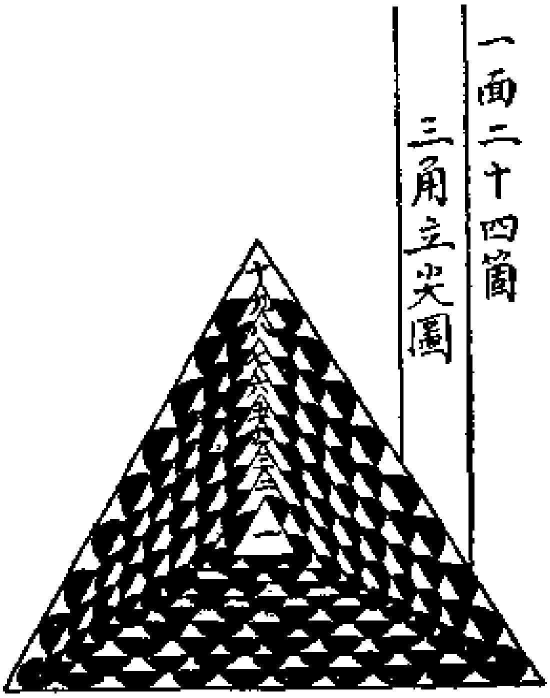


图 82 累积问题。从锥顶往下看的用小球累成的角锥（采自周述学 1558 年的《神道大编历宗算会》）

在十七世纪，日本数学家写了同卡瓦列里的著作十分相似的大量著作。村松茂青(Muramatsu Kudayū Mosei，卒于 1683 年)把一个球割成许多平行的平面或等高的扇形片，把每一薄片看成某一圆柱的截面，从面求得球体积的近似值。野泽定长 (Nozawa Teichō, 1664 年前后) 用更薄的薄片把它推进了一步。泽口一之 (Sawaguchi Kazuyuki, 1670 年前后)在他的著作《古今算法记》中给出一个图解(见图 83)，说明通过对薄矩形的粗糙积分可测出圆面积的近似值。这种处理方法

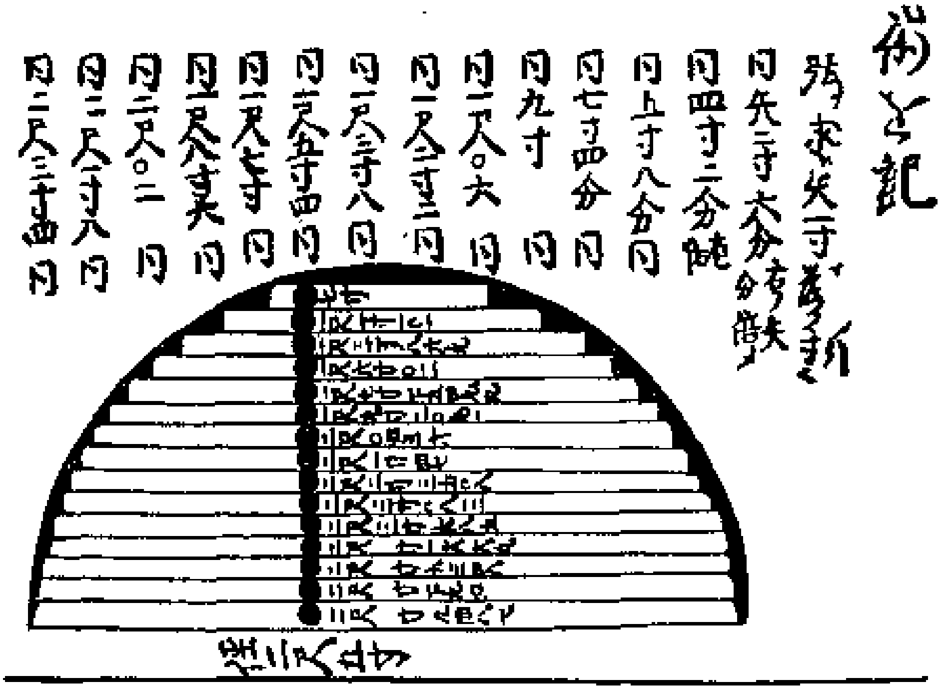


图 83　通过对薄矩形积分来测定圆面积的方法，采自持永丰次（Mochinaga Toyotsugu）和大桥宅清（Ōhashi Takusei）的《改算记纲目》（1687 年），它出自泽口一之的《古今算法记》（1670 年前后）

可在若干同时代的著作中找到。

曾经有人认为，这种穷竭法起源于中国，但到目前为止，还不可能在中国数学著作中指出这种方法的任何实例。不过，我们可以复制出宋代（可能是十一世纪）一部道家著作《修真太极混元图》①中的一个图（图84），这部书据说是萧道存著

① 《道藏》洞真部灵图类。

的，其中包含一套具有某些佛教影响的难解的图形。图84表明一个内含三个矩形(按十二倍增加的三级福地）的圆。十分可能，这恰恰就是道家和新儒学家所发展的、用内接矩形求圆面积的穷竭法的一个思想萌芽①。

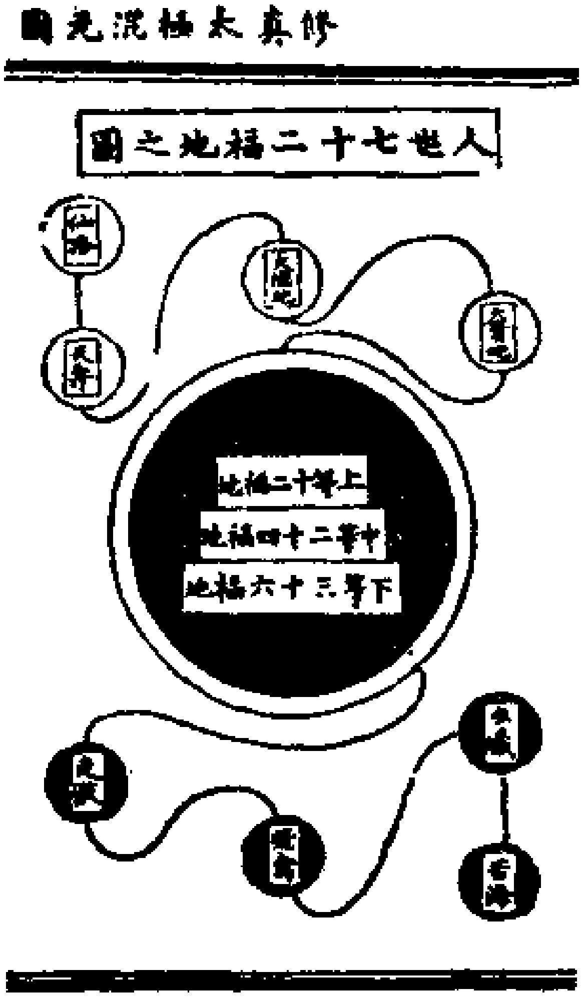


图84 内接于圆的矩形(采自萧道存的《修真太极混元图》，十一世纪前后)

沈括的问题实质上同近代物理学家和结晶学家的所谓“堆积”有关②。《显微术》(*Micrographia*) 的作者罗伯特·胡克可能是把堆积理论应用于结晶研究的第一个人(1665年)③。面在十一世纪，

① 在这里可以看到，在密积思想与一滴水内有无限个世界这种典型的佛教偏见之间，可能存在着精神上的联系(参见本书第二卷第十五章第五节)。

② 参看 Rouse Ball (2), p. 148。

③ 参看 Andrade (1)。

沈括对于在以平面为界的空间内堆积球状物的问题，已作过类似的考虑。虽然我们看不清楚这种文化交流的渠道，但无可怀疑的是，从十七世纪开始，堆积问题已成为日本数学家热心探讨的问题之一。史密斯和三上义夫[Smith & Mikami(1)]的调查得到了许许多多的实例，说明日本数学家曾把一些较小的圆密接于一个大圆或弓形内，把一些较小的球密接于大球或锥体内①，等等。关孝和(1642—1708年)解决了泽口一之的三个相切的内接圆问题(1670年)，建部贤雄(Takebe Kenkō, 1664—1739年)在计算圆弧扇形面积的阿基米得近似值时利用了无穷级数②，从面在某种程度上重复了前一代欧洲的卡瓦列里所做过的工作。安岛道圆(Ajima Chokuyen, 1739—1798年)解决了马尔法蒂(Malfatti)关于内接于三角形的三个互切圆的问题。所有这些研究都是在“圆理”这个名称下出现的，其中有些研究者对这些问题的考虑，

① 这个数学分支称为“容题”和“容术”。

② 他的著作的名称是《不休缀术》，其中“缀术”二字和五世纪祖冲之的佚著(见前面第77页)的名称相同，看来他可能读过祖冲之的这部著作。

已经非常类似于在欧洲发展起来的微分和积分计算法了①。但是可以肯定,其中有些是从外国传入的,因为耶稣会传教士杜德美(Pierre Jartoux)在1701年曾把许多无穷级数的公式带到中国,这件事刺激了许多中国人去进行研究工作,例如,满族数学家明安图撰写了《割圆密率捷法》,它是在1774年作者死后出版的。一部类似的著作是董祐诚的有价值的《割圆连比例图解》(1819年)②。在十七、十八世纪,日本人受欧洲影响比中国人更少,他们的著作是自发的,但究竟自发到什么程度,则是一个有关历史上的交流的难题③。实质上,所有土生土长的中国著作和日本著作都停留在静态分析的水平上,只有牛顿和莱布尼茨的研究才发展了动态分析方法。

① 参看三上义夫(6, 7, 8), Mikami (18, 21)。

② 李俨[(4),第二集,第129页,(21),第三集,第254页]对这些人及其同伴的著作曾专门作了详细的叙述。

③ 详情可参看三上义夫和史密斯与三上义夫合写的著作,亦可参看三上义夫[Mikami (17)]和哈策[Harzer (1)]的论文。

十、影响和交流

在谈到这个问题时，我们有些犹豫，因为关于在中国数学与旧大陆其他重要文化区的数学之间似乎发生过的接触，把我们收集到的资料放在一起也没有多少。首先，古代美索不达米亚文化在中国的具体影响是有限的，其理由前面已经说过[①]。在中国，除了传统的甲子周期外，几乎看不到六十进位算术的痕迹，也没有表示分数 $\frac{2}{3}$ 的专门符号。此外，中国对分数的处理与古埃及是根本不同的。

但是，当问到有什么数学概念似乎是从中国向南方和西方传播过去的时候，我们却发现有一张相当可观的清单[②]。

(1) 在中国，只用九个数字同位值名称相结合的记数法，早在商代(公元前十四世纪)就已经出现了。在印度，

① 参看前面第180页。

② 参看 Kaye (3); 下面所述的例子有一些(但决不是全部)在三上义夫的著作 [Mikami (1), 三上义夫 (15)] 中也已提到过。

则直到公元六世纪，才放弃了对十的倍数所采用的专门符号①；而在这方面，印度却又比欧洲更为先进，因为在欧洲，关于“印度数码”的最早记载出现在公元976年的西班牙文手抄本中②，并且直到十一世纪才懂得用零。零的最原始的形式，即在筹算盘上留下的空位，在中国可以追溯到战国时代（公元前四世纪）。关于零号的写法，我们在下面还要提到。

（2）公元前一世纪，开平方和开立方在中国就已有了高度发展。公元四世纪孙子开平方的方法③和五世纪张邱建开立方的方法④，同公元630年在梵藏的著作中给出的法则非常相似。中国从贾宪开始所用的求高次方根的方法，似乎曾影响了卡希（十五世纪）。这些先进方法的痕迹后来不久就在欧洲发现。

（3）虽然一般认为三率法⑤是属于印度的，但它在汉

① 参看 Datta & Singh (1), vol. 1, p. 40。

② 例如参看 Smith (1), vol. 2, p. 75。

③ 参看《孙子算经》卷中第八页正面起。

④ 参看《张邱建算经》卷下第三十一页正面起。实际上，对这个方法作详细叙述的是隋代刘孝孙的注释，即使如此，它也是在梵藏之前。但刘孝孙只是把张邱建原文中的一些不明确的东西解释清楚而已，因此，这个方法本身在张邱建的时代肯定已经为人们所了解了。

⑤ 例如参看 Smith (1), vol. 2, pp. 483, 488。

代的《九章算术》中就已出现，早于任何一部梵文古籍。值得注意的是，在汉文和梵文这两种语言中，表示分子的专门术语是相同的——“实”和 *phala* 的意义都是果实①。同样，表示分母的“法”和 *pramāna* 也都表示标准的长度度量单位②。

(4) 所有中世纪印度数学家用竖行表示分数的方法③，与汉代在筹算盘上所用的方法都是相同的。

(5) 最早出现在中国(公元前一世纪)的负数④，在印度直到梵藏的时代(630年)才得到运用。

(6) 在公元三世纪赵君卿的《周髀注》⑤中给出了毕达哥拉斯定理的“弦图”证明，而在公元十二世纪，巴斯卡拉丝毫不差地再次给出这个证明，此外在任何别的地方均未再出现。

(7) 在《九章算术》及刘徽三世纪的注释中出现的几何测量问题，后来在九世纪大雄的著作中再次出现，例如

---

① 参看 Colebrooke (1), p. 283; Wang Ling (2), vol. I, pp. 213 ff.。

② 甚至连与此有关的第三个大家都知道的术语，在这两种语言中也可看作是相同的。因为梵文的 *icchā* (即“希望”或“要求”)对应于汉文的“所求率”。

③ 参看 Colebrooke (1), p. 285。

④ 见前面第200页。

⑤ 见前面第48页。

“折竹”问题[1]以及旅行者在直角三角形斜边上相遇的问题[2]。

(8) 大雄还重复了《九章算术》关于求弓形面积的方法[3]，而《九章算术》中关于锥体[4]和平头角锥[5]的体积公式，则重新出现于许多印度著作中。中国人在弓形和锥体公式方面的错误，恰好也在印度的著述中重现。

(9) 一千多年来，中国数学家一直深刻地认识到代数关系式与几何关系式基本上是一致的，而在别的国家，这种一致性到了九世纪才第一次由波斯数学家花拉子密加以阐明，虽然除了花拉子密曾出使可萨[6]以外，没有其他正式的证据说明他受到中国人的影响，但从逻辑上和地理环境来看，认为有这种影响大概也不是不合理的。

(10) 在汉代《九章算术》中出现的假设法在公元十三世纪以 Regola Elchataym 为名出现在意大利，这个名称说明它是阿拉伯人传播过去的。阿拉伯人可能是从印度学到这种方法的，但中国很可能是它的发源地[7]。

---

① 见《九章算术·勾股章》。
② 见《九章算术·勾股章》。
③ 见《九章算术·方田章》。
④ 见《九章算术·商功章》。
⑤ 见《九章算术·商功章》。
⑥ 参看前面第 241 页。
⑦ 参看《九章算术·盈不足章》。严格地说，这个方法是“双设法”。古埃及人所用的一种方法有时也用这个名称(试位法)，但两者显然是不同的，参看 Cajori (2), p. 13。

(11) 不定分析首先是在《孙子算经》(四世纪)开始的[1],然后才出现在圣使的著作(五世纪末),尤其是梵藏的著作(七世纪)中。代数学这个分支的知识可能是通过阿拉伯人和印度人的介绍传给十四世纪拜占廷僧人阿吉罗斯的。丢番都(三世纪末)所提出的问题和方法则与《孙子算经》颇为不同。

(12) 一个涉及不定方程的问题("百鸡问题")首先出现在公元500年前后的《张邱建算经》[2]中,随后以几乎完全相同的形式在大雄(九世纪)和巴斯卡拉(十二世纪)的著作中出现。

(13) 在唐代(七世纪),王孝通成功地解决了三次数字方程。在宋末(十二和十三世纪),中国代数学家已经特别善于处理高次数字方程[3]。在欧洲,斐波那契(十三世纪)是第一个提出王孝通那类问题的解法的人,有理由认为,他可能是受到东亚来源的影响。

(14) 中国在公元1100年左右就已经知道二项式系数的巴斯噶三角形[4]。大致在同一时期,在波斯,由于接触到印度的开方法,似乎也产生了巴斯噶三角形,而印度

① 见《孙子算经》卷下第十页正面起。

② 见《张邱建算经》卷下第三十七页正面。

③ 参看前面第284页。

④ 参看前面第297页。

开方法本身大半应归功于早期中国的著作。在十六世纪前不久，这种三角形传到欧洲，并在公元 1527 年在那里公开发表。

因此，尽管中国早先几乎“与世隔绝”，并存在一些我们即将探讨的排外的社会因素，但在公元前 250 年到公元 1250 年之间，从中国传出的东西比传入的东西多得多①，看来却是十分可能的事。

只有到了较晚的年代，来自南方或西方的影响才开始成为值得注意的东西，尽管如此，这些影响当时也很少在中国扎下根来②。我们可以指出如下几个事实。

(1) 在隋代和唐代，传入了一些印度的数学和天文学知识，那些书名带有“婆罗门”字样的书籍就是这方面的明证③。印度天文学家瞿昙悉达在他的巨著《开元占经》(729 年前后)中曾叙述印度的历法计算。这些专家带来了三角学的早期形态，但总的说来，他们的影响似乎是

---

① 当然，谨慎小心是必要的，因为我们不知道在印度（从《数经》到婆日之间）是否有一些后来失传的早期著作。

② 在这里，我们只考虑数学本身。在下一章中，我们将举几个例子，说明天文学方面的印度著作在中国曾得到认真的对待。

③ 参看本书第一卷第 274 页和本卷前面第 80 页。

微小的(见前面第 81 页和本书第四卷第 74 页)。

(2) 有理由认为,欧几里得几何学大约在 1275 年通过阿拉伯人第一次传到中国,但没有多少学者对它感兴趣,即使有过一个译本,不久也就失传了[①]。直到近代初期,即在十七世纪,这部著作才对中国人的思想产生影响。

(3) 大约在同一时期(1270 年),中国数学家(特别是郭守敬)似乎已开始应用三角学的方法。这最可能是受到札马鲁丁[②] 等阿拉伯人的影响,但也不能排除与印度发生直接接触的可能性。

(4) 在十四世纪,丁巨最先开始不用位值名称记数。这种做法也可能是从阿拉伯传人的。

(5) 格子乘法[③] 大约于 1590 年出现在中国人的数学著作中,这可能是与葡萄牙人接触的结果。

虽然中国在近代以前完全保持它自己独特的数学风格,虽然印度是中、印两种文化当中较善于接受别人的文化的,但有一个重要的发明似乎是发生在这两个文明古国的边界上,并且很快就同时在这两个国家中传开来。这就是发展了一个特

① 参看前面第 234 页。

② 参看前面第 109 页和第四卷第 475, 476 页。

③ 参看前面第 141 页。

别的书写符号来代替零值(即中国的空位,印度的śūnya),这就是零号。也许我们可以冒昧地把这个符号看作是在汉代筹算盘的空位上摆上了一个印度花环。

然而,这提出了数学秩序的基本表示法——数码的位值——的来源和发展的问题。在这个问题上,中国的地位现已十分清楚,在商代(公元前二千纪后期),记数制度已比远古任何其他文明古国更为先进和更为科学。在各种单位中出现的九个数字,较高的数位(即十位、百位等)是通过位值名称来表现的。这些名称不是数字,而是为了最后在计算时便于把九个数码放到计算用的筹算盘上各栏中它们应处的位置上去。我们所知道的全部秦汉数学中是隐含着这种算板的存在的。任何数位上没有数码就用一个空位来表示,这是十分自然的。《墨经》以及钱币上的铭文证实,这种系统在公元前四世纪前后已经很完善了。

从前而的叙述看来,关于中国的位值法则出自古巴比伦天文学家(公元前二千纪初期)最先应用的位值法则的说法,显然是很可疑的。在古代美索不达米亚流行过许多种记数方法(相加的,相

减的，相乘的)，甚至在数学和天文的楔形文字泥板上，对于小于60的数，也是用六十进位法和其他法则相结合而记出的。而在中国，从商代到汉代及汉以后，数位都是十进制，而不是六十进制。除了一种不重要的情形之外，它是并不同别的法则结合使用的。然而，由于在其他领域中人们已注意到，有一些有力的证据表明，曾经有一些技术和发明是从古代的美索不达米亚传到中国的[1]，我们也许可以把位值概念看作是激起传播[2] 的一个例子，即仅仅是一种思想传播，而不是具体方法的传播。

但是，当我们考虑到印度的发展时，就产生了一种信念，认为印度对位值法则的了解和应用比它在中国出现的年代晚得多。虽然圣使 (499 年) 和他的同时代人彘日 (《五大历数全书》的作者) 无疑曾使用过位值法则，但在《泡利萨历数全书》(*Pauliša Siddhānta*) 的时代，即在五世纪以前，在印度是肯定找不到它的痕迹的。更有意义的是，

---

① 参看本书第二卷第十四章第一节和第四卷第 193 页。

② 参看本书第一卷第 553 页。

印度的位值制是中国的十进位制，而不是古巴比伦的六十进位制。后来，七世纪末在印度支那、八世纪和九世纪在印度本土所刻的碑文，都证实了当时已有用一点和一个空圈表示的两种零号。这一切更加证明了当时对位值已有了充分的了解。我们所考虑的这个时期(公元300—900年)，应当认为大致就是上面所说的许多中国数学方法传播到印度的时期，也是佛教在中国文化区内大为扩展的时期。难道那些出国旅行的和尚不可能用中国的数学去换取印度的形而上学吗？这一段文化接触的历史故事很可能有待于对《高僧传》进行深入钻研而加以发掘。我们只约略地知道它的一些片断，例如前面已经提过的这样一个事实①：公元440年前后，北魏的僧人昙影可能是讲授《九章》数学的一位卓越的教师。

古代西亚字母拼音原则的发现给全世界的语言写法带来了很大的方便。但用它来记录数字却大大地阻碍了算术运算。毫无疑问，这时最容易使人想到的是在运算中使用所有可以利用的字

① 参看前面第63页。

母，而不是限于用九个符号。奇怪的是，忠实于表意原则而不使用字母的文化，反而发展了现在人类普遍使用的十进位制的最早形式，如果没有这种十进位制，就几乎不可能出现我们现在这个统一化的世界了。中国的计算人员和星官为印度人发展只需要九个符号的计算方法开辟了道路。叙利亚主教塞波克特在公元662年说，这九个符号的优点是无法形容的。他还说[①]："假使有人因为自己讲的是希腊语言，就认为他们已达到科学的顶点，那就应当让他们知道这些事物，并且使他们相信，还有别人也同样知道许多事物。"

十一、中国和西方的数学和科学

虽然前面的篇幅已经很长，但我们还必须反映出这样一个事实：从许多方面来看，数学总是自成一门学科，它和整个自然科学具有同等的地位。从中国数学记载得出的结论，为我们提出了

① 本书第一卷第496页已引用过这一段话。从这段话的年代看来，这位主教讲当时只有九个符号这个事实是有意义的，他一定曾与用过空位而不用零号的人接触过。

一些可以称为本书计划中的焦点的问题。在中国古代和中古代，数学与科学的关系究竟是怎样的？在文艺复兴时代的欧洲，当数学与科学在性质上有了全新的结合，并且注定使世界发生变化时，数学发生了什么变化？为什么这种结合不在世界上任何别的地方产生呢？这就是现在要提出的问题。

首先，我们应该正确地、公正地处理问题。文艺复兴以前的数学著作，在成就上是几乎无法同后来取得的丰富而有效的发展相比的。因此，用现代数学的尺度去衡量中国古代数学的贡献就毫无意义了。我们应该假设自己置身于迈出最初几步的那些人的地位，并努力了解这对于他们是何等的困难。从人类的体力劳动和脑力劳动来判断，我们很难说，《九章算术》作者或天元代数学的创始者为他们的成就所付出的精力，不如十九世纪开辟新的数学领域的学者。唯一可行的是在古代中国的数学与其他古代民族——古巴比伦人[1]、古

① 在这方面，由于诺伊格鲍尔［Neugebauer (9)］的工作以及阿奇博尔德［Archibald (1)］的书目提要，已有了很大的进展。也可参考蔡尔德［Childe (8)］的简明论文。

埃及人[1]、印度人[2]和阿拉伯人[3]——的数学之间进行比较。本章的叙述表明，中国的数学也很可以和旧大陆其他中世纪民族在文艺复兴前的成就相比。希腊的数学[4]即使仅就它具有较大的抽象性和系统性(正如在欧几里得的著作中所见到)而论，它的水平也无疑是很高的；但是，正如我们已指出的，印度和中国的数学(它们也许是较直接地建立在巴比伦数学的基础上)的强处，也就是代数

---

① 近来最好的评论仍是阿奇博尔德的评论，其中附有书目。这里还可以补充入道森［Dawson (1)］的简短论文。

② 前面提到过的达塔和史密斯的著作和大多数讨论印度数学的书籍一样，在年代上是不可尽信的，这是由于缺乏一个确定的印度年代表。在这方面，印度数学史家(辛格、古尔贾和其他人)常常同主要的欧洲权威有矛盾；参看 Kaye (3); Clark (2)。但是，即使对于那些不想深入研究它的人，泰勒和科尔勃鲁克所译的巴斯卡拉的《里拉伐第》(*Līlāvatī*)一书的译本(虽然现在已嫌陈旧)，是值得研究的。圣使的著作已由克拉克［Clark (3)］译出。关于印度数学史的最有见识的记述见 Thibaut (2), Renou & Filliozat (1)。

③ 在这方面，主要可参看苏特［Suter (1)］的著作，但在米里［Mieli (1)］的较为广博的著作中可以找到大量材料。

④ 如果我们打算列举这一领域中的大量书目，那就会超出本书的范围，但目前有希思［Heath (3)］所作的出色的汇编可供参考。

学这个分支，却正好是希腊数学的薄弱环节[①]。

“由于它具有较大的抽象性和系统性”——这句话正好就是打开机器的锁匙。是的，系统性的说法无疑是对的，但是抽象性呢——它是否完全有利呢？科学史家们现在已开始怀疑：希腊的科学和数学“偏爱抽象、演绎和纯理论，而忽视具体、经验和应用”，这是不是一种进步[②]。据怀特黑德（Whitehead）说：

> 如果认为希腊人发现了数学的基础，而我们给它增加了高深的部分，这是错误的。更接近实际情况的是相反的说法：希腊人对数学的高深部分感兴趣，但从未发现它的基础。……外尔斯特拉斯（Weierstrass）的极限理论和康托的点集理论，是远比我们近代的算术、近代的正负数理论、近代的函数关系图示法或近代的代数变换概念，更加接近于希腊人的思想模式的。初等数学是近代思想最具有

① 事实上，在算术方面也是这样。参看 Becker & Hofmann (1), p. 119。

② 例如，参看弗雷彻特［Frechet (1)］的有趣的讨论。

> 代表性的创造之一——它的特点是通过直接的途径把理论与实践联系起来了。①

至于中国古代和中古代的数学对于奠定掌握现实世界的比较困难的（因为它是最简单的和最初等的）技术的基础，曾有过多大帮助，我们希望我们在前几节中已经叙述清楚了。在从实践到纯知识领域的飞跃中，中国数学是未曾参与过的②。

因此，在这里我们要对在本章开头（第2页）提到的那些作者的怀疑和动摇提出一些答复。有些博学的观察者已经注意到中国数学的某些特殊的弱点，对于这些弱点，我们现在可以作更充分的判断。三上义夫(1)认为，在古代中国的数学思想

① 采自 Whitehead (7), pp. 132 ff.。法林顿［Farrington (8)］的短论中对这一段话的注释是值得一读的。

② 有趣的是，在逻辑学方面似乎曾出现过相反的过程。当希腊人和印度人很早就仔细地考虑形式逻辑的时候，中国人则一直倾向于发展辩证逻辑（我们在第二卷已多次谈到这一点）。与此相应，在希腊人和印度人发展机械原子论的时候，中国人则发展了有机宇宙的哲学。在这些方面，"西方"是初等的，而中国是高深的。中国人注重具体事物的特殊性格使他们对希腊几何学的抽象性，象对佛教徒的形而上学唯心论那样格格不入，因为后面二者都是脱离实践和经验，脱离具体和实际的。

中，最大的缺点是缺少严格求证的思想，他把这一点(正象一些近代中国学者，如已故的傅斯年所做的那样[1])同形式逻辑不能在中国发展[2]以及(有机的)联想占支配地位联系起来[3]。卡约黎[Cajori(3)]在他的数学符号史中评价天元代数学时提到，无论是它的美满的对称结构，还是它所达到的最大限度，都使人留下深刻的印象。宋代代数学在初期一度突飞猛进以后，并没有迅速扩大成长起来。他把十三世纪以后的停顿归咎于采用了一种缺乏适应能力并且具有束缚性的记法，此外，虽然中国数学在许多方面(例如，很早就重视十进位和用空位表示零)是如此先进，但是中国数学家从未自发地发明任何记录公式的符号方法，在耶稣会传教士入华以前，数学上的陈述主要是用文字写出的。奇怪的是，在一个把代数学钻研到如此深的民族中，方程的形式一直是不明显的，而且没有土生土长的等号(＝)。筹算盘和珠算盘的普遍

① 他在1944年8月13日给作者的一封信中谈到这件事。

② 参看前面第十一章讨论名家的部分和后面第四十九章。

③ 参看前面第十三章讨论符号的相互关系及有关思想的部分。

应用作为一个阻碍因素究竟起了多大的作用，这是一个值得讨论的问题。这些算具当然使得所有的计算不留痕迹，没有留下用以求得答案的中间计算的记录①。但是，似乎很难令人相信，如果更多的现代数学方法得到发展，这种计算工具实际上就不会那么有用了。

谈到社会因素时，很明显的是，在整个中国历史中，数学的重要性主要是在于它与历法有关。在《畴人传》中很难找到一个数学家不受诏参与或帮助他那个时代的历法革新工作。由于历法与古代主要的宇宙信仰有关，所以它的制订是帝王的一个神圣不可侵犯的特权，各诸侯国领受历法意味着对皇帝的忠诚。当叛乱和饥荒发生的时候，一般就认为历法有些不对头，从而要求数学家重修历法②。有人认为，这种偏见不可避免地导致他们

① 参看 Mikami (20)。这可以部分地说明，为什么在古书中普遍地不说明他们的法则的使用方法，这种不足使洛利亚 [Loria (1)] 毫无道理地坚持怀疑说，这些方法都是从某些传到中国的不深不透的希腊著作中抄袭的。

② 例如，汉高祖曾相信，秦王朝的崩溃是由于秦始皇的历法有错误，因此，他便命令张苍负责制订一部新历法(《畴人传》卷二第一页正面)。

只注重具体数字，并阻碍他们去考虑抽象的概念；不管怎样，中国人重视实践和经验的性格总是使他们倾向于向这方面发展。在历法领域中，数学在社会上属于正统的儒家知识的范畴，但有理由认为它也与非正统的道家有关。公元二世纪的徐岳肯定受到过道家的影响；这可从十一世纪那部曾使李冶大受启发的神秘著作中看出；此外，宋代萧道存那张奇怪的图①也说明这一点。可惜，人们一直没有弄清楚，在大炼丹家葛洪与数学家孙子这样的人物（他们很可能是同时代人）之间，有没有发生过任何接触。看来，在文艺复兴以前，这种思想上的联系在任何地方多半是不可能有的②。最后，一个很重要的因素必须从中国人对“自然法则”的态度中去探求。这个问题我们在第二卷末

① 参看前面第 320 页。

② 道家人物隐居在山林中的庙宇里，具有明显的浪漫主义因素。他们虽然忙于炼丹炉的工作，但也激发了诗人的灵感。数学家们则似乎是十分平凡而讲究实际的人，他们只不过是地方官的属员。他们的写作风格是非常缺乏文彩的。和印度的数学知识不同，中国的数学知识很少是用诗写成的。无疑，中国的数学家也有象美丽聪明的丽娜瓦蒂（Lilāvatī）那样的情人，但他并不把她写进书中去。

尾(第十八章)已作过详细的研究；在这里只需重复一下：他们没有造物主(上帝)的观念，因而也没有最高法则制定者的观念[①]，加以他们坚定地认为整个宇宙是一个自给自足的有机组织（道家人物曾用充满卢克莱修精神的高尚诗篇表达过这种信念），这一切就产生一种无所不包的宇宙组织概念，自然规律在其中是没有地位的，因此，只有对于天球上的很少几个规律，用数学去解决才是有益的。

在结束关于二千年来土生土长的中国数学的讨论之前，我们可以很快地回顾一下各个朝代的数学和它的质量。数学成就显著的两个朝代是汉代和宋代。在公元前一世纪落下闳和刘歆的时代，《九章算术》是数学知识的光辉的集成，它支配着中国计算人员一千多年的实践。但是从它的社会根源来看，它与官僚政府组织有密切关系，并且专门致力于统治官员所要解决的（或教导别人去解决的）问题。土地的丈量、谷仓容积、堤坝和河

---

① 科伊雷［Koyré (1), p. 308］有一个很有说服力的说法：牛顿的世界观是建立在宇宙有一个最高的创造者和维护者(即上帝)的信念上的。

渠的修建、税收、兑换率——这些似乎都是最重要的实际问题①。"为数学"而数学的场合极少。这并不意味着中国计算人员对真理不感兴趣，但他们感兴趣的不是希腊人所追求的那种抽象的、系统化的学院式真理。在整个汉代，大多数人民没有受到教育，他们没有机会接触到政府交办、抄录并分散到各个环节的手抄著作。工匠们不管有多么了不起的才能，却总是有一座无形的墙把他们和有文学修养的学者分隔开来，他们只能在这座墙的另一边开花结果。仅仅由于沈括(十一世纪)是一个与众不同的人物，他才能注意到伟大的建筑家喻浩的《木经》②，这部著作大概是喻浩口授一个会写字的人手写下来的。但是，在若干世纪以前，在道教徒和佛教徒的意味深远的启发下，另一些工匠采取了一个决然的步骤打破了这种手抄的局面——他们发明了印刷术③。毫无疑问，印刷术有助于中国数学在宋代第二次开花，这时一批真正伟

① 关于阿拉伯人的类似情况，可参看 Cahen (2)，其中谈到 1035 年前后的一些著作(例如 *Kitāb al-Hāwī*)。

② 参看后面第二十八章第四节。

③ 参看后面第三十二章。

大的数学家——他们不是平民就是较低的官员——突然开辟了一个比传统的官僚偏见广阔得多的领域。这时，知识上的好奇心得到了大大的满足。但是，这个高潮并没有继续下去。在明代理学的反动统治下，儒生们大大倒退了，甚至在祖冲之《缀术》[1]的全部最新抄本上练习书法[2]，而数学又一次被幽禁在地方衙门的后院。当耶稣会传教士走上历史舞台时，甚至没有人能够把中国过去数学上的光辉成就告诉他们。

那末，在欧洲文艺复兴时代究竟发生了什么情况，从而使数学化的自然科学得以兴起？这种情况又为什么不在中国出现呢？如果说，要找出近代科学在某一种文化中得以发展的原因是相当困难的，那末，要找出它在另一种文化中不能发展的原因就更加困难了。但是，研究不发生的原因，却有助于了解发生的原因。事实上，数学与科学的富有成果的结合的问题，只不过是近代科学为什么在欧洲发展起来这整个问题的另一种提法而已。

① 参看前面第77页。

② 值得注意的是，八股文考试制度是在1487年首次推行的，它具有使一切事物丧失生命力的影响。

普莱奇(Pledge)[①]在把伽利略[②](他被认为是把自然科学数学化的核心人物)同达芬奇(Leonard da Vinci)[③]进行对比时,看出了这个问题的要害,他说,尽管达芬奇对自然界有那么深邃的洞察力,并曾经在实验中大放异彩,但由于他缺乏数学知识,他便未能得到进一步的发展。现在达芬奇已不象许多人先前想象的那样,是一个孤立无援的天才;正如齐尔塞尔[Zilsel,(2)]、吉尔[Gille,(3)]和其他人所指出的,他是十五和十六世纪一系列从事实际工作的人当中最突出的一个,这些人包括象伯鲁涅列斯基(Brunelleschi)[④]那样的艺术家、工程师和建筑师,象切利尼(Cellini)[⑤]那样的画家兼冶金学家,象塔塔格利亚(Tartaglia)[⑥]那样的炮手,象巴雷(Ambroise Paré)[⑦]那样的外科医生,在阿格里科拉(Agricola)[⑧]的著作中提到的

① 参看 Pledge (1), p. 15。
② 1564—1642年。
③ 1452—1519年。
④ 1377—1446年。
⑤ 1500—1571年。
⑥ 1500—1557年。
⑦ 1510—1590年。
⑧ 1490—1555年。

矿工，1638年伽利略的《对话》(*Discourse*)中涉及的威尼斯兵工厂的那些造船者，以别林古肖(Biringuccio)①为代表的火药厂主及其他化学技师，还有象罗伯特·诺曼② [Robert Norman，他1581年的《新的吸引力》(*Newe Attractive*)一书大大地推动了吉尔伯特(William Gilbert)的磁学研究工作③]那样的仪器制造者。所有这些人都忙于从事自然现象的研究，其中很多人得到了实验上的数据，从而自然而然地为不可思议地达到数学公式化准备好条件。大致地说，在中国也有一批同他们极为相似的人④，如宋应星⑤(他可以称为中国的阿格里科拉)、建筑师李诫⑥，著名药物学家李时

① 卒于1538年。

② 1590年著称。

③ 参看 Zilsel (3)。

④ 这是十分重要的一点，因为有些人说中国从未产生过伽利略、凡萨里乌斯或笛卡儿，这虽然说对了，但他们通常却忘记了中国曾产生过类似于阿格里科拉、格斯纳(Gesner)和塔塔格利亚的人物。

⑤ 他是《天工开物》的作者，1600—1650年著称。赖家度(1)和薮内清(11)为他写过传记。

⑥ 他是《营造法式》的作者，卒于1110年。

珍[①]、园艺家陈淏子[②]、炮手焦玉[③]等等。不管选的是哪一个领域，都有相似的情形；例如在钟表技术方面（尽管时代不同），德东迪（de Dondi）[④]可与苏颂相比[⑤]。但是，与中国不同，在欧洲有一些影响在起作用，它们不允许科学只发展到这个阶段。有某种东西在暗暗地推动着欧洲，要它把实际知识（即使只是用数量表示出来的经验知识）与数学公式结合起来。

在欧洲，这件事有一部分无疑是与社会的变

① 他是《本草纲目》的作者，1518—1593年。燕羽（5）、李涛（1）、张慧剑（1）为他写过传记。

② 他是《花镜》的作者，1688年著称。

③ 他是《火龙经》的作者，1412年前后著称。

④ 1318—1389年。

⑤ 他是《新仪象法要》的作者，1020—1101年。这部著作是在1092年完成的，其中对当时刚刚建成的大天文钟作了详细的描述。这一创举的历史为我们提供了中古代的中国把数学方法用到工程建筑中的一个最显著的例子（参看后面第二十七章第八节）。关于苏颂的主要工程负责人韩公廉，有记载说，他曾编写出一份关于这个天文钟表的几何学的备忘录。虽然我们在这里发现了数学与技术之间的直接关系，但它仍是为官僚政治服务的，并且在数学与实验科学之间仍然没有实质上的联系。参看本书第四卷第449页。

化有关的，因为这种变化使得有名望的技术人员参加了绅士的行列。加布里埃尔·哈维（Gabriel Harvey）在1593年写道：

> 一个人要是记得数学机械师汉弗莱·科尔（Humphrey Cole）、造船师马修·贝克（Matthew Baker）、建筑师约翰·舒特（John Shute）、航海家罗伯特·诺曼、砲手威廉·伯恩（William Bourne）、药剂师约翰·赫斯特（John Hester）或任何灵巧的有专门经验的人，而却仍然蔑视熟练的工匠或任何聪明勤奋的实际工作者（尽管他们可能没有受过教育或目不识丁），那末，他就是一个自高自大的人。①

吉尔伯特在1600年的磁学论著，是一个学院出身的学者完全依靠个人在实验室中的手工实验和观测写成的第一部印成书的著作。但他仍旧既不使用数学公式，也不用自然定律的术语来进行讲述。和他同时代的培根（Francis Bacon），虽是第一个充分了解到近代科学研究对于人类文化进

① 引自 Taylor (3), p. 161。特别可参看 Taylor (7)。

步的重要性的作者，但他也不甚了解数学即将发挥的重大作用①。

然而，这里所指的并不是中世纪的数学。正如科伊雷［Koyré (1)］在出色地评论牛顿-笛卡儿科学的起源时所说的，数学本身是需要改造的，必须使数学的本质更接近于物理学，服从于运动②，不是从它的“现在”、而是从它的“变化”或“流动”来看问题。微积分学就是这种改造运动的最高成就。在1550年，欧洲的数学并不比阿拉伯人从印度人和中国人继承来的发现更为先进。但在欧洲，紧接着却发生了一系列全新的事情——维叶特(1580年)和雷科德(1557年)终于精心制订了一套令人满意的代数符号，斯特文(Stevin, 1585年)充分估价了十进小数的功用，内皮尔在1614年发明了对数，冈特(Gunter)在1620年创造了计算尺，笛卡儿在1637年建立了座标和解析几何学，1642年出现了第一个加法计算机(巴斯噶)，牛顿

① 关于这两个优秀人物的描述，都引自 Zilsel (2)。

② 关于在伽利略的时代，运动如何占有研究工作的中心地位的问题，可参看科伊雷［Koyré (2, 3)］和奥尔希基［Olschki (2, 3)］的深刻的评述。

（1665年）和莱布尼茨（1684年）完成了微积分。直到现在还没有人充分了解这种发展的内因[①]。经常有人说，以前代数学和几何学曾一度分开发展，前者靠印度人和中国人，后者靠希腊人及其继承者。现在这两者结合起来，把代数方法应用到几何领域中去了，这是在精密科学的前进中所迈出的最大的一步。但是，应该注意到，这里所说的几何学不仅仅是量地术，而是希腊的逻辑演绎几何学。中国人过去也一直是用代数方法来考虑几何问题的，但那是另一回事。

实验数学的方法在伽利略的著作中就几乎已经以完美的形式出现了，并使近代科学技术的各个部门都得到了发展。这种方法的产生给科学史提出一个最重要而且复杂的问题。对于这个问题，虽然我们不能分析得恰如其分，但在这里简略地分析一下还是合适的，因为关于数学和科学为什么正好在文艺复兴时期结合在一起，而在中世纪早期的社会中（象在中国社会中）则如此分离的问

① 关于这个问题的最出色的叙述见 Zeuthen（2）。

题[①]，我们只有通过这种分析才能得到一些了解。如果我们剖析一下伽利略的方法，我们就会发现它是由下列几方面组成的：

(1) 从所要讨论的现象中，选择出几个可用数量表示的特点。

(2) 提出一个包括所观察各量之间的数学关系式(或与此相当的东西)在内的假说。

(3) 从这个假说推出某些能够实际验证的结果。

(4) 观察，然后改变条件，然后再观察——即进行实验；尽可能把测量结果用数值表示出来。

(5) 接受或否定第(2)步所作的假说。

(6) 用已接受的假说作为新的假说的起点，并让新的假说接受考验[②]。

---

① 除了下面所要提到的经典研究外，现在可以利用丁格尔[Dingle (1)]和利利[Lilley (4)]的简短而有价值的评注。有一个中国思想家曾考察过这方面的问题[Lin Chi-Kai (1)]。他是艾贝尔·雷伊(Abel Rey)的学生，虽然在他的头脑中必然常常想到中国的类似情况和问题，但是(可惜得很)，他在论文中却坚决不提。最近大多数讨论科学方法的中文论文也是这样[参看汪敬熙(1)]。

② 到这时，随着信心的增大，已逐渐渗入科学“预言”的成分了。

"新哲学"或"实验哲学"的特征，是在现象中找出一些可以度量的因素，并把数学方法应用到这些量的变化规律中去，这是早已得到承认了的[①]。这样，量的世界就取代了质的世界[②]。但是，提高到抽象则比这种进步还要更深入，因为这时运动已不是根据任何一个具体的运动物体来考虑了[③]。于是，物体的运动不再与物体的其他特征或性质有关，也不能从其他特征或性质推导出来。此外，运动被认为在宇宙中处处都是一样的。这的确是看法中一个根本的改变[④]，因为从某种意义上说，宇宙的"划一化"也就是它的消灭和死亡[⑤]。

---

① 正如怀特黑德 [Whitehead (1), p. 66] 所说的。

② 参看 Koyré (1), p. 296。无论在什么地方，人们都难以接受把时空座标统一应用到宇宙的一切领域的做法。何文彪(1640—1670 年著称）对耶稣会传教士的反对就是一个例证(《畴人传》增订第二版，第 79 页)。

③ 因此，伽利略毫不犹豫地使用了未观察到的或不能观察到的事物的概念，例如，一个完全没有摩擦的平面或一个物体在空虚无物的无穷空间中的运动。参看克龙比 [Crombie (1), p. 305] 的著作和穆迪 [Moody (1)] 及威纳 [Wiener (2)] 关于某些曾启发伽利略的想法的讨论。

④ 关于这方面的问题，特别可参看 Koyré (1, 2, 3, 5)。

⑤ 参看 Koyré (1), p. 295。

空间的几何化——用均匀的、抽象的、维量的欧几里得空间去代替伽利略以前的物理学和天文学中具体的、有所区别的空间连续统——这是把过去的形态学上的宇宙清除掉了[1]。事实上，宇宙不再被认为是有限的、按照一定的等级制度组织起来的、在性质上和实体上有所区别的整体，而是敞开的、不明确的、甚至是无限的，它只是由于简单的基本规律的同一性和普适性才结合成一个整体。例如，只要一旦形成了引力的概念，宇宙间就没有任何地方是引力定律不起作用的。

显然，对于物体朝向某一位置运动的"固有倾向"的否定，只不过是通常破坏物质客体的有机统一性的一个方面。正如丁格尔所说，对于一个具有形状、重量、颜色和运动等细致的属性而又如此

① 这时，时间也变成连续的、没有区别的和均匀的了；这与东西方中世纪思想中那种分离的、一段一段的时间大不相同(参看本书第二卷第十三章第六节)。这一点也反映在历史学家当前有关中国历史编纂法的讨论中。正如范·德斯普伦克尔［Van der Sprenkel (1)］所说的，中国的大多数作者(虽然不是全部)都是用朝代、在位时期和统治时期的分段编年方法来编史的形式工作，他们把各种特殊事件填入一段段分离的时间单元中去。近代史的时间连续性确实是从近代科学的世界观导出的。

明显的统一体，似乎只有那些为若干世纪以来的挫败所激怒而又具有最高创造性的人，才能迈出革命性的一步，他们敢于否定这种统一体，并且敢于主张，一个木球和一个不知由什么物质组成的行星的共同之处，比之同一个球的运动和颜色要多得多。的确，伽利略的革命推翻了中世纪欧洲人所具有的有机的世界观（这种世界观和中国人的有某种程度的共同之处），而代之以一种实质上是机械的世界观，一种适于描述原子的偶然集合的世界观。约翰·多恩 (John Donne)① 曾描写过那些沉浸在传统世界观中的人们这时所体验到的罔然若失、不知所措的心情：

新的哲学对一切都怀疑，
火的元素已被完全吹熄；
太阳消失了，地球沉没了，没有人有才智
　　能指引他到何处去把它寻觅。
人们直率地承认世界已成空虚，
当他们在行星上和在天空中，

① 参看 *Anatomie of the World*, First Anniversary, II. 205—14。

找到了许许多多新的东西……

而那全都是碎块,全无凝聚的踪迹;

一切都只是填补,一切都只是关系……

但是,命运却开了一个戏剧性的玩笑:在牛顿去世时(1727年),莱布尼茨已经播下了一种新的有机世界观的种子,这种新世界观注定最终要替换或改正机械的世界观[①]。这些种子可能有一些是来源于中国的,但那是无法在这里回顾的另一场争论[②]。

所提出的假说必须是数学化的假说(前面第(2)步],这一点是非常重要的。数学是当时可利用的、具有连贯性的逻辑思维当中最大而又最清晰的组成部分。实验所用的逻辑是不一定要用数学形式表达出来的,关于这一点,在从威廉·哈维和凡海尔蒙特(J. B. van Helmont)到贝尔纳(Claude Bernard)的生理学中,无疑已变得显而

---

① 这得到科伊雷的恰如其分的评价。他在其著作[Koyré (1), p. 310]中说,十九世纪科学思想在场这个概念的掩护下取得的进展,实质上是一种反对牛顿思想的发展。

② 参看本书第二卷第十三章第六节、第十六章第六节和第十八章第五节。

易见了，在化学中也是如此。但是，数学化已成为一种典范①。围绕着假说的数学化的起源问题，已经有过很多讨论，这个历史问题至今还远远没有得到解决。伯特[在一部著名的著作 Burtt (1)中]和科伊雷曾用人们把宇宙看作一种数学设计的观点作为例子，强调毕达哥拉斯和柏拉图的影响的顽固性。这种影响是通过菲西诺 (Ficino) 和诺瓦拉 (Novara) 这样一些人流传下来的。数学在天文学中也长期占有重要的地位，并且在这方面，无疑是由于重新发现了象阿基米得这样一些希腊作家，而得到了某些促进。伽利略本人就肯定地说过②：

> 哲学是写在这部永远摆在我们眼前的大书中的——我这里指的是宇宙。但是，我们如果不首先学习用来写它的语言和掌握其中的符号，我们是不能了解它的。这部著作是用数学的语言写成的，

① 力学作为近代科学的起点是占有特殊地位的，因为人们在物理学上的直接经验主要是力学方面的，并且数学在力学量方面的应用也比较简单。参看 Sambursky (1)，p. 234。

② 参看 *Opera*, vol. 4, p. 171。

> 其中的符号就是三角形、圆和其他几何图形。没有这些数学语言和数学符号的帮助，人们就不可能了解它的片言只语，没有它们，人们就会在黑暗的迷宫中徒劳地徘徊。

但是，斯特朗 (E. W. Strong) 曾令人信服地指出，在伽利略以前和在伽利略的时代，数学就已日益得到前面提到过的那些应用技术专家和匠师们的应用了。他们当中的某些人，如塔塔格利亚和斯特文，还属于当时的优秀数学家之列。他们对炮术、造船、水力工程和建筑技术等的兴趣，诱使他们把计量和数学方法充分应用到他们的问题中去。他们都是从事测量和制定方法的人。伟大的文艺复兴的工匠们如果看到伽利略按前面第(3)步将某些运动的简单特例孤立起来，并按第(4)步测量某些量的数值，他们一定会认为这样做是很自然的。事实上，正如怀特黑德所说的[1]，函数的概念当时已经产生了。人们必须看到，一个单一的特定条件有多大的变化，产生的后果也就会有多大的变化。“数学为富于想象的思维提供了条件，

① 参看 Whitehead (1), p. 46.

使科学家们能够用这种思维对自然进行观察。伽利略提出了一些公式,笛卡儿也提出了一些公式,惠更斯 (Huygens) 又提出了一些公式，牛顿还是提出了一些公式。"每一个人都开始画一些曲线来表示各种自然现象之间的关系，并寻求能够切合这些曲线的方程。

也许，最好是把伽利略的革新说成工艺实践与经院理论的结合①。虽然随着这种结合而来的是惊人的结果,但是必须认识到,这种结合无论在哪一方面都不是独一无二的。以前在较低的水平上,已经出现过类似的情况,并且每一次都带来某些新的东西。正如埃利亚德 (Eliade) 所指出的②，在工艺方面对化学的进步有重要帮助的希腊炼金术，是实用的化学技术和神秘的诺斯替教1) 哲学的结合。此外，我们现在也很熟知一个更早的例

① 贝尔纳就经常是这样做的。参看 Bernal (1), pp. 865, 869。

② 参看 Eliade (5), p. 149;其他人也有同样的看法,例如参看 Festugière (1), Sherwood Taylor (2, 3)。

1) 诺斯替教是古代宗教哲学的一派，这个派别力图用波斯、希腊的宗教哲学来说明基督教的教理。——译者

子，即准科学的道家学说是发源于方士和信仰“大道”的隐居哲学家的结合之中①。

那末，如何把技术家和工匠②出于自发的实验，与构成伽利略方法实质的、对明确的假设所作的有意识的实验验证区别开来呢？这个问题是非常重要的，因为中国和欧洲一样，也有很多高明的匠师（也许我们可以这样称呼他们）。用前面的方法来剖析时，可以得出下列几点：

(1) 从所要讨论的现象中，选择出一些特点。

(4) 观察，然后改变条件，然后再观察——即进行实验；尽可能把测量结果用数值表示出来。

(2) 提出初型的假设（例如亚里士多德的四元素说，炼金术家的三要素说，或阴阳五行说）。

(6) 继续观察和实验，但不过分受那些同时出现的假说性的想法所影响。

虽然由于缺乏基本理论，工艺技能只好通过个人的接触和训练一代一代往下传，但靠这种经验方法是有可能累积大量的实际知识的。除了时间和

① 参看本书第二卷第十章第一节。

② 可再参看齐尔塞尔 [Zilsel (2)] 关于这个问题的出色的评论。

空间的不同以外，中国和欧洲所达到的熟练程度是没有多大差别的。没有任何西方人能够超过商、周两代的青铜器铸造者①或比得上唐、宋时代的瓷器制造者②。吉尔伯特在磁学方面所做的有决定性意义的研究工作，它的条件完全是在旧大陆的另一端准备好的。并且，谁也不能说这些技术的处理是非定量的，因为瓷器制造者如果不掌握某种温度控制方法，就决不能重复在光度、胚子和色彩等各方面所达到的效果；如果堪舆家不注意他们的方位度数，也就不可能发现磁偏角③。

伽利略和匠师们的一系列步骤当中的第一步，过去是不引人注目的。但正如某些作者所强调的那样④，为了进行系统的研究而从事物的变化之中把某些特定的现象孤立出来，这种做法使得一切实验都具有高度人为的性质。因此，远在十七世纪那批科学家出现以前，中国和西方中世

① 参看本书第三十章第四节和第三十六章。

② 参看本书第三十五章。

③ 参看本书第二十六章第九节。

④ 参看 Levy (1), pp. 118, 700。较晚近的提法见 Sambursky (1), pp. 233 ff.。

纪的匠师(与希腊人不同)，就已表明他们自己能做到这一点,这个事实本身就是值得注意的。事实上，由于每个制造者和工匠只关心有限的一组技术,所以,他们能够这样做是很自然的。此外,这些人还做了别的事,他们认识到,反复实验对于证实结果是很重要的。希腊的天文学之所以能如此地成功,是因为在天体现象的循环中,自然界提供了这种反复。而中世纪的工匠们(中国人和欧洲人都一样)则需要进行组织,使地球上的现象能反复出现(尽管有一定程度的改变)，这种做法为近代物理学和一切地面上的科学的发展铺平了道路。

但是，从达芬奇在理论上相对地落后这一点可以看出，阻碍前进的因素主要出现在“作出假设”这一步。迪昂 (Duhem)[①] 在叙述达芬奇有关气态物质的某些成就和发明之后指出，在他关于空气和火、烟和蒸气的想法中深深地渗透着中世纪的物理学概念，以致他所作所为似乎是完全难

① 参看 Duhem (1), p. 329。亦可参看 Randall (2), Hart (3)。正如齐尔塞尔 [Zilsel (5)] 所指出,甚至在哥白尼 (Copernicus) 的著作中,也仍然存在许多中世纪的和精灵论的概念。

以理解的。尽管他能画出湿度计、竹蜻蜓或离心泵的草图,但他也能够解释说,一块湿布的湿气具有向火移动的内在倾向，而湿气的较轻的部分会随着这种纯元素(火)直上九霄，因为火有一种携带轻物体上升的准神灵的力量。没有必要对这一点作更多的说明了,但这是很重要的一点,因为它帮助我们了解到，在没有适当的科学理论的情况下能够达到多大的技术成就。因此，它也有助于了解中国的情况，并且断定土生土长的中国科学技术所达到的境界必然是达芬奇式的，而不是伽利略式的。但是，在欧洲真正发生的情况还是难以说清楚的。

历史学家们早就认为，十二世纪中叶是欧洲思想史的转折点。不管是不是由于同伊斯兰世界发生新的接触而受到启发①，总之，在十二、十三世纪，已经出现了一个脱离以人类为中心的象征主义、而对客观世界显示出真正兴趣的巨大的潮

① 无论如何,这个时代正好是巴思城的阿德拉德(Adelard)等重要翻译家生活的时代，阿德拉德的主要译作完成于1142年前后。

流[①]。这个潮流在思想和艺术的各个部门——从哥特式石刻中日益增长的自然主义[②]到神学、祷告文和戏剧中出现的新的现实主义——都留下自己的痕迹。在寻找近代科学的根源时，不能够忽视这个自然主义的运动。

在伽利略以前就已掌握部分伽利略方法的不仅仅是那些高明的匠师。早就有人主张说[③]，在欧洲的经院哲学内部，有一种从事实验的倾向，这种倾向起源于亚里士多德[④]，通过达芬奇传到伽利略。亚里士多德把关于事实的知识同关于事实原因的知识区别开来[⑤]，但关于如何利用实验来确

① 关于这一点，戈茨[Goetz (1)]和林恩·怀特[Lynn White (2)]已作了很有启发性的解释。亦可参看 Raven (1), pp. 40, 58, 其中有类似的说明。

② 可参看贾拉伯特[Jalabert (1)]关于教堂建筑中的柱头的出色著作。

③ 特别是迪昂[Duhem (1)]在他关于达芬奇的前驱者的论文中，更是这样主张。

④ 关于亚里士多德的科学方法，参看 Mckeon (1), W. D. Ross (1); Peck (1, 2)。

⑤ 参看 *Post. Analyt.* 1, 13; 78a22。

定这些知识，他则从未作过任何明确的说明①。十三世纪初，牛津的哲学家开始对深入了解自然现象的可能性感到兴趣，因而更加注意提出假说和对这些假说进行检验的方法。这些思想后来得到帕多瓦（Padua）大学的赞同②，在这个大学里，阿威罗（Averro）学派是很强的，医科的预科课程是逻辑学而不是法律或神学。十四世纪到十六世纪之间在这个大学进行过的许多讨论产生了一种方法论③，这个理论除了具有重要的数学化的因素以外，还表现出与伽利略的最终做法有某些相似之处。经过解剖，这个理论[在帕多瓦称为 *regressus*

---

① 古代希腊所采用的实验方法达到多大的完备程度，是一个有许多争论的问题。毕达哥拉斯学派在声学上、阿基米得在杠杆上、拉姆沙库斯的斯特拉东（Straton）和赫伦（Heron）在气体现象上所进行的系统观察的方法肯定已接近完备，但可能并没有超过那些高明匠师的水平。参看 Heath (6, 8); Brunet & Mieli (1); Farrington (4, 15); 最近的一篇出色的评论见 Sambursky (1), pp. 222, 237。

② 应该记住，伽利略和哈维两人都曾在帕多瓦从事过研究工作和讲学。伽利略曾用该校的专门术语，称他的第（4）步的实验为进一步的“简化”（*resolutio*），参看 Crombie (1), p. 307。

③ 兰达尔［Randall (1)］对此曾作出详细的说明。

(退行)][1]似乎包括如下几点:

(1′) 从所要讨论的全部现象中，选择出那些看来是所有现象所共有的特性(分析[2],“简化”),这时,逐一点査被认为是不必要的,因为可以相信,大自然是均匀的,而抽样是有代表性的。

(2′) 通过对这些特性的主要内容进行推理，归纳出一个特定的原则(同样是“简化”)。

(3′) 从这个假设的原则出发，推导出各种可能的后果(思想中的综合[2]，*Compositio*)。

(4′) 观察同样的或类似的现象，并根据经验 (在很个别的情况下则通过安排好的实验)判明真 (*verificatio*) 伪 (*falsificatio*)。

(5′) 接受或摒弃第 (2′) 步所提出的假设的原则。

可见，如果说那些高明的匠师的实践接近于伽利略方法的后一部分,即实验部分,那末,经院学者们的理论则预示了前一部分,即推理部分。但是，他们对于与经验事实相符是假设的最终考验这一点了解到何种程度，却是很可疑的。 同样，

---

① 参看 Crombie (1), p. 297。

② 这是些最早的术语——希腊几何学家和盖伦 (Galen)都曾使用过它们[参看 Crombie (1), p. 28]。

我们也不清楚他们是不是了解到，在第(4′)步中考察那些原来并不作为所要检验的假说的根据的新现象也是很重要的。此外，他们的进展很少超出他们的假说所处的朴素状态。在这种自然哲学中，林肯郡的格罗塞特斯特（Robert Grosseteste, 1168—1253年）是一个关键人物①，但其中的归纳和演绎二重过程可追溯到盖伦②和希腊的几何学家③。格罗塞特斯特大概是通过阿拉伯人——如博学家金迪（Abū Yūsuf Yáqūb ibn-Ishāq al-Kindī, 卒于873年)④和医学注释家阿利·伊本·里德万（'Alī ibn Ridwān, 998—1061年)⑤——得到这种方法的。尽管格罗塞特斯特也可能认为，除了单纯依靠更多的经验之外，还应该组织一些实验来证实或否定所作出的假说，但这并不能说明他自己是一个实验主义者。无论如何，他对于十三

① 正如克发比在他的杰作［Crombie (1)］中所指出的。

② 参看 Galen (Kühn ed.), vol. 1, p. 305; vol. 8, p. 60; vol. 14, p. 583。盖伦自己肯定也象希洛非勒斯(Herophilus)和爱拉西斯特拉特斯(Erasistratus)那样，曾做过生理学的实验。

③ 参看 Heath (1), pp. 137 ff.; Zeuthen (3), pp. 92 ff.。

④ 参看 Mieli (1), p. 80; Hitti (1), p. 370。

⑤ 参看 Mieli (1), p. 121。

世纪的那些实验科学工作者，包括物理学领域的英国人培根（Roger Bacon，1214—1292年）和布拉德沃丁（Thomas Bradwardine，1290—1349年）、磁学领域的法国人佩雷里努斯（Petrus Peregrinus，1260—1270年著称）、光学领域的波兰人维特洛（Witelo，约1230—1280年）和出色的彩虹理论的建立者、德国弗赖堡的特奥多里克（Theodoric of Freiburg，卒于1311年）[①]，都有一定的影响。奇怪的是，正是在这些人进行着研究工作的时代，中国也是完全可与欧洲相匹敌的科学运动的舞台[②]。但是，从十四世纪初以后，中国呈现出显著

① 在这方面，他被阿拉伯物理学家占先了（参看后面第二十一章第五节和第二十六章第七节），但占先的时间很短［参看Sarton（1），vol. 2，p. 23；vol. 3，p. 141］。由于当时阿拉伯物理学家的著作在拉丁语国家中无法得到，所以，这种同时出现的情况可能是由于二者有共同的来源，即都引用了伊本·海塔姆的著作；参看 Winter（4）。

② 参加这个运动的有突出的数学家秦九韶（1240—1260年著称）和杨辉（1260—1275年著称）、天文学家郭守敬（1231—1316年）、地理学家朱思本（约1270—1337年）、农业和技术的百科全书编纂者王祯（1280—1315年著称）、法医学——一门特殊的实验科学——的创建者宋慈（1240—1250年著称）。这个时期还出现了一些象马哥孛罗（1280年前后在北京）那样的旅行家，但是，这些旅行家不象是非常精通科学的，因而他们所能传播的东西不大可能超出某些工艺（或零碎的工艺）的范围。关于宋代这个科学技术的"黄金时代"的详细情况，可参看本书第二卷第十六章第五节。

的衰退现象，而在欧洲，舌战之风则再度占优势，直到伽利略的时代还是这样。无论如何，就理论科学而论，事情确实是如此，因为在十四世纪后期和十五世纪，军事工程师已大批出现(大部分是德国人)，他们的实际成就预示了伽利略以前那个世纪的高明匠师的成就。这一新局面的开辟者是《军事工艺手册》(*Bellifortis*，开始于1396年)的作者康拉德·凯塞(Konrad Kyeser，1366—1405年以后)，但早在凯塞以前，就已有人指出了这种途径，尤其是达维格伐诺(Guido da Vigevano，1280—1345年以后)①，他在机器和战争机械方面的著作是在弗赖堡的特奥多里克逝世后才二十年就完成了的。在凯塞以后也有许多别的技术专家，他们的灵感肯定有一部分是来自炮术和火药等新技术的启发②；这些人包括德冯塔纳(Giovanni de' Fontana，1410—1420年著称)、胡司战争1)中

① 参看 Sarton (1), vol. 3, p. 846。

② 当时炮术和火药已直接从中国传到欧洲了，参看后面第三十章和第三十四章。

1) 这是十五世纪初捷克人民群众反抗封建主的剥削压迫、特别是反抗德国外族封建主和德国化的教会的统治的战争。这次战争以胡司党人为领导，故称为“胡司战争”。——译者

的佚名工程师(活动于1420—1433年)、梅明根的亚伯拉罕(Abraham of Memmingen, 1422年前后著称)[①]。因此在欧洲,从培根到伽利略,实验主义者是连续不断地出现的。但是,大致在1310年以后,经院哲学就不再有所贡献,在此后三百年间,实用技术已成为时代的主宰[②]。

有人会提出这样的问题:十一、十二世纪的新儒学家[③]所获得的自然知识,在理论化方面是不是不如十三世纪欧洲经院哲学家先进呢[④]? 从许多观察中归纳出一个特定的原则这一步[即前面第(2′)步,第二次"简化"],在新儒学家的思想

① 这些人在后面第二十七、二十八章还要经常提到。关于他们的工作评述和著作,可参看 Sarton (1), vol. 3, pp. 1550 ff.。

② 十四世纪末和十五世纪并不是中国科学技术取得重大成就的时代;十一世纪在中国要比在欧洲重要得多。但是,在十四、十五世纪也不难找出一些杰出的人物,例如,明朝的亲王朱橚(1382—1425年著称)曾主办了一个植物园,并写了一部很有价值的《救荒本草》;天文学家皇甫仲和(1437年著称)造出了同郭守敬的仪器相似的新仪器;云南的穆斯林通译马欢(1400—1430年著称)则是郑和所率领的舰队中的地理学家。

③ 参看本书第二卷第十六章第四节和第十八章第五节。

④ 关于这个问题,格雷厄姆[Graham (1), pp. 192 ff.]曾作过适当的介绍。

中是通过寻求基本的或内在的理来表现的。有人曾对许衡(1209—1281年)说：

> 如果我们能够完全明了(或穷竭)世界上万物的图式，那末，这不就是找到每一种事物之所以成为这种事物的道理了吗？并且，不是还有一条法则[①]是各种事物在同万物共存时所必须遵从的吗？而这不正好就是所谓"理"吗？[②]
>
> 〈穷理至于天下之物，必有所以然之故？与其所当然之则？所谓理也。〉

许衡同意这种说法，并说，这为所使用的专门术语的意义作了很好的说明。宇宙中一切事物的时空关系都是通过普遍存在的理来确定。程伊川(1033—1108年)说："凡理之所在，东便是东，西便是西。"[③] 新儒学家关于同归纳相似的过程有

---

① 关于把"则"这个词理解为"适用于整体中各个部分的法则"的问题，我们在本书第二卷第十八章第六节已作过充分的讨论。

② 《宋元学案》卷九十第二页反面到第三页正面(万有文库本卷二十二第128页)。吴澄(1249—1333年)在《性理精义》卷九第二十九页反面也提出一个十分相似的定义。

③ 《河南程氏遗书》卷二十二上第十四页反面。

一句重要的格言——“致知在格物”[①]——这是出自公元前260年前后的《大学》。对于他们来说，这意味着，对于事物的本性和事物间的关系的突然领悟，就是突然看到理的各种成分“各得其所”。在他们看来，自然界的数也都是顺应宇宙那个大算盘的事先安排的。

对于在多种多样的现象中所表现出的特定自然图式的了解[第(1′)步]，是通过“贯”或“贯通”的方法达到的，这个方法的形象很象是把有孔的铜钱贯串在一条线上。正如程氏兄弟之一所说的那样，“凡人闻一言则滞于一言，一事则滞于一事，不能贯通耳。”[②]（无论什么时候，人们在听到一种说法或一件事时，他们的认识总是只局限于这种说法或这件事，这是很简单的事，因为他们不能够找到各种事物的相互关系。）二程的另一个公式是[③]：

为了完全理解(或穷竭)世界上的各种图

① 参看本书第一卷第104页。亦可参看 Legge (2), p. 222。

② 《河南程氏外书》卷三第二页反面。

③ 《河南程氏遗书》卷二上第二十二页反面，由作者译成英文，借助于 Graham (1)。

式，并没有必要对世界上所有可能的现象的图式一一进行研究。但是，要达到这个目的，也不是仅仅彻底理解其中一个单独的图式就能做到的。最简单的办法是把大量的现象积累起来。在这种情况下，就自然而然地可以看出各种图式了。

〈所务于穷理者，非道须尽穷了天下万物之理，又不道是穷得一理便到，只是要积累多后，自然见去。〉

二程关于专注于一件事或少数几件事不是获得自然知识的办法的信念，从后代中国学者[1]未能重视科学方法这一点来看，是特别有意义的。

有人问程伊川说："为了明白无数的图式，是不是需要对一切事物进行研究，还是只要研究个别事物就可以呢？"伊川回答说："后一种办法是行不通的，如果只研究个别事物，怎么能够理解事物之间的相互关系呢？就是颜回[2]也不敢想只研究一件事物，就能够理

① 当然，我们在这里所想到的是十六世纪初期的王阳明唯心主义学派；参看本书第二卷第十七章第二节。

② 他是孔丘的得意门生。

解一切事物的图式呀。我们所应该做的，是今天研究这件事，明天又研究那件事，——天天研究下去。这样，经过长期的经验积累，事物的相互关系就会突然显露出来了。”①

〈或问格物须物物格之，还只格一物而万理皆知？曰，怎生便会该通。若只格一物便通众理，虽颜子亦不敢如此道。须是今日格一件，明日又格一件，积习既多，然后脱然自有贯通处。〉

同时，内心的推理也不能代替对外在的自然界进行研究。

又有人问程伊川说：“在观察外部的事物和对自身进行探讨时，是不是必须回头在自身之中寻找那些已经在事物中看到了的东西呢？”伊川回答说：“不必这样来处理问题。外部的世界和人们自身，具有一个共同的、大的图式；只要明白了“彼”，“此”也就变得清清楚楚了。这就是内外统一的道理。学者们应该努力去观察和理解整个自然界——在大的方面要了解天的高度和地的厚度，在小的方面

① 《河南程氏遗书》卷十八第五页反面。

则要了解每一件事物为什么会象它所表现出来的那样。

有人又问说："为了扩展知识，你看是不是应该先在'四端'当中寻找世界的图式呢？"① 伊川回答说："在我们自己的性情中去寻找这些图式，当然是最简单、最方便的了；但是，每一株小草和每一棵树木都有它们自己的图式，对它们也必须进行研究。"②

〈问观物察已还因见物反求诸身否？曰，不必如此说。物我一理，缠明彼即晓此，合内外之道也，语其大，至天地之高厚，语其小，至一物之所以然，学者皆当理会。

又问，致知先求之四端，如何？曰，求之性情固是切于身，然一草一木皆有理，须是察。〉

"广泛地认识鸟兽和花木的名称和性质，是了解世界图式的途径之一。"③

---

① 这个典故出自《孟子·公孙丑上》[Legge (3), p. 79]："恻隐之心，仁之端也；羞恶之心，义之端也；辞让之心，礼之端也；是非之心，智之端也。"参看《小学绀珠》卷三第十六页正面。

② 《河南程氏遗书》卷十八第八页反面至第九页正面。

③ 《河南程氏遗书》卷二十五第六页反面。这两段都由作者译成英文，借助于 Graham (1)。这里关于博物学的价值的话出自《论语》。《杨龟山集》卷三第六十六页有相似的一段话。

〈多识于鸟兽草木之名，所以名理也。〉

如果说这还不能算是文艺复兴时期的自然科学，那末，它们相去也不比中世纪欧洲经院哲学的思想离开后者更远。

此外，从原则出发而与演绎相反的过程[即第(3′)步，综合]，似乎也有与之相应的术语，即“推理”或“类推”①。后一术语有时具有“同类相推”的意义。程明道(1032—1085年)曾写道：

一切事物全都有它的对立面，阴就是阳的对立面，善就是恶的对立面。当阳强盛的时候，阴就衰退；而当善增长的时候，恶就消减了。这种道理是可以深远地推广的。②

〈万物莫不有对，一阴一阳，一善一恶，阳长则阴消，善增则恶减，斯理也，推之其远乎。〉

他在别的地方又说：

① “推”是墨家早就用过的一个术语(参看本书第二卷第十一章第二节)，但它的意义已完全改变了。它常常在有科学内容的文字中出现。例如公元19年，王莽“乃令太史推三万六千历纪”[《前汉书》卷九十九下第四页反面；参看 Dubs (2), vol. 3, p. 379]。又如，公元260年前后，王蕃在计算宇宙间的距离时，曾从别的数字推出某些数字(《晋书》卷十一第六页反面)。

② 《河南程氏遗书》卷十一第五页正面。

在研究各种事物以便充分了解它们的图式时，并不存在对世界上的所有事物都要一一加以研究的问题。只要能够充分了解一种事物的图式，对于同类的事物，也就可以作出论断了。[①]

〈格物穷理，非是要尽穷天下之物，但于一事上穷尽，其他可以类推。〉

在程伊川下面几句话中，似乎两种方法[归纳，然后是演绎，即第(2′)，(3′)步]都提到了：

从外部世界学习到事物的图式，并且在内心加以领悟的做法可以叫做“明”。在内心加以领悟、并把它们同外部世界联系起来的做法可以叫做“诚”[②]。可见，“明”和“诚”实际上是一回事。[③]

〈自其外者学之而得于内者谓之明，自其内者得之而兼于外者谓之诚，诚与明一也。〉

① 《河南程氏遗书》卷十五第十一页正面；这两段都由作者译成英文，借助于 Graham (1)。

② 这个术语在本书第二卷第十六章第四节已详细地讨论过了。

③ 《河南程氏遗书》卷二十五第二页正面；这一段话是建立在《中庸》第二十一章的基础上的。

至于谈到用实验来证实或否定所提出的原则,那末,新儒学家并不比经院哲学家高明。但是,原理必须受经验的检验的思想则总是隐隐约约地存在着,在被伦理学和社会学严格控制着的中国环境中,它的表现形式是用知识与实践作对比。这个问题一直争论了几百年,“行易知难”① 这个著名的滥调在各个时代几经反复,有时得到肯定,有时则被推翻或修改②。十七世纪的王船山说③:“知是行之始,行是知之成。”事实上,对于认识论上的问题所能得到的答案,必须是视当时的主流是形而上学唯心主义或唯物主义(就中国思想所允许的程度而论)而异的。前面已经提出过许多这方面的例子,例如,王充(公元一世纪)对《墨经》的批判④;而在现代,中国哲学学派的解答则接受了马

① 这是近代中国孙中山所提出的著名的说法,它曾被用作国立北平中央研究院的题铭。这个格言的反面是最早在《书经·说命篇》(公元四世纪的伪作)中出现的“非知之艰,行之惟艰”[参看 Legge (1), p. 116; Medhurst (1), p. 173],说这句话的是商代一个半属传说的大臣傅说。

② 在西文书刊中过去似乎没有对此问题作过完整的历史研究,但尼维森 [Nivison (1)] 做出了一个有意义的开端。

③ 参看 Fêng Yu-Lan (1), vol. 2, p. 604。

④ 参看本书第二卷第十一章第一节。

克思主义的评论[①]。总之，不管是新儒学家或经院哲学家都没有明确地认识到，在研究自然界时，正确的假说必需经过检验，看它是否与更大范围的经验事实相符。但是，重要的是，在中国，既有许多相当于诺曼和塔塔格利亚的"高明匠师"的代表人物，又有相当于格罗塞特斯特和帕多瓦学者的中古代思想家。

也许，过分把欧洲经院哲学家与新儒学家相提并论是不行的。无论如何，前者并不总是能优先取得我们的好感。但是，有两种奇怪地对立着的说法可以表明，在这两个学派当中，哪一派真正具有更多的科学思想。阿奎纳斯（Thomas Aquinas，1226—1274年）写道："对最高级的事物有一孔之见，远胜于对低等渺小的事物有大量知识。"[②]而程明道（1032—1085年）在论及佛教徒时则说："唯务上达而无下学[③]，然则其上达处，岂有是也？"[④]（既然他们一心想不通过研究

① 例如毛泽东的《实践论》和冯友兰［Fêng Yu-Lan（6）］的有意义的注释。

② 参看 *Summa Theologiae*, Ia, i, 5ad 1。亦可参看 Aristotle, *De Partibus Animalium* I. 5。

③ 这是《论语》中的话［参看 Legge（2），pp. 152, 153］。

④ 《河南程氏遗书》卷十三第一页反面。

低等的事物就去领悟高级的事物，那末，他们对高级事物的领悟又怎能是正确的呢？）

没有比历史的因果关系更困难的问题了。可是，如果我们不想把十六、十七世纪欧洲近代科学的发展看作不可思议的奇迹，我们就必须加以解释，那怕只是尝试地作一些假定性的解释。近代科学的发展不是一种孤立的现象，它是与文艺复兴、宗教改革以及随着商业资本主义的兴起而产生的工业机器生产同时出现的。大概正是这些仅在欧洲同时发生的、突出的社会变化和经济变化，才造成了一种环境，使自然科学终于能够兴起，并超过那些高明匠师——半数学的技术家——的水平①。把所有的质都约化为量，认定在一切现象的后面都存在数学的现实性，宣称在整个宇宙中空间和时间都是统一的——所有这一切，是不是和

① 博克诺［Borkenau（1）］、默顿［R. K. Merton（1）］和赫森［Hessen（1）］都很好地说明了这种观点，他们认为牛顿时代的学术风气的因素，使他更愿意选择某些科研课题，而不去研究别的。也有人对这种观点进行批评，著名的有格罗斯曼［Grossmann（1）］、克拉克［G. N. Clark（1）］和霍尔［A. R. Hall（1）］，他们曾彻底地探讨了一个关键问题（即弹道学）的细节。

商人的价格标准有某些类似的地方呢？事实上，要不是可以用数目、数量、尺度等来进行计算和交换的话，货物和商品、珠宝和金钱就没有任何意义了。

在我们的数学家当中，留有很多这方面的痕迹。关于复式簿记技术的最早的书面说明，出在十六世纪初可以得到的最好的数学教科书中，这就是帕乔利所著的《算术大全》(*Summa de Arithmetica*, 1494 年)。最先把复式簿记用到公共财政问题与管理上去的，则是工程数学家斯特文(1608年)的著作。甚至连哥白尼也发表过论货币改革的言论(1552 年)①。首先应用等号的雷科德的著作《智慧的磨刀石》(*Whetstone of Witte*, 1557 年)是题献给"去莫斯科的冒险家集团的领导者及其伙伴们"，希望"他们通过旅行使商品不断增加"。斯特文的《十进小数》(*Disme*)是用这样的话开始的："献给所有的天文学家、测量家、花毡、酒桶和其他物品的测量者，献给所有造币厂的厂长和商人，祝他们走运！"② 连伟大无私的传教师弗朗西

① 参看 Copernicus, *Monetae Cudendae Ratio*。

② 这些例子引自 Zilsel (2)。

斯科·里奇 (Francesco Ricci) 的一个亲属也于1659年在马切拉塔出版了一部会计学书籍。这类例子举不胜举。可见,商业和工业当时是空前"风行"的。

关于近代科学技术与产生它的社会经济环境之间的准确关系的问题,也许会构成欧洲科学史中的一场大辩论。我们以后还要讨论它[①]。我相信,适当地研究一些平行发展的文化,例如研究中国的农业封建社会,将有助于说明西方所发生的事件。例如,科伊雷[②]在批评文艺复兴以后的科学的起因的社会经济说时,曾赞同卡西雷 [Cassirer (1)]的意见,极力主张[③]当时存在着一种由希腊数学的重新发现激发起来的纯理论倾向,并且明显地受到柏拉图和毕达哥拉斯的影响。这无疑是真

① 参看后面第四十八、四十九章讨论影响中国和西方科学的社会因素的部分。

② 参看 Koyré (1), (4), p. 294。

③ 但是,他也十分清楚地看到(该书第 310 页),机械论者关于原子的偶然集合的概念是如何同资本主义的社会观念相一致,因为按照这种观念,只要每一个人都一心一意为了自己去追名逐利,谐和便会普遍存在了。马利内(Malyne)的著作表明,这种相似性在十七世纪是何等的强烈(参看 Malyne, *Lex Mercatoria*)。

实情况的一部分[①]。他还坚持说，那些社会经济说的支持者们没有充分考虑他所说的天文学中的自发进展。然而，在这方面，比较一下中国的类似事件是有益的。中国人本来是应该注意到船只的力学问题，注意到他们广大的运河网的流体静力学(与荷兰人一样)、枪炮的弹道学(他们毕竟比欧洲人早四百年就有了火药[②])和采矿的水泵的。既然他们没有这样做，那末，难道不应该从这样一个事实——即在帝王将相统治着的中国社会里，私人很少、甚至完全没有从这些事物中得到利益——去寻找答案吗？在那些同前面提到过的"半数学"阶段的作者们相似的人的著作中所描述的技术和工业，实质上都是属于"正统的"，它们许多世纪在官僚压迫或保护下缓慢发展起来的成果，并不是野心勃勃的商业冒险家看到巨利而进行的那种创

① 另一部分可从中世纪唯名论的某些学派推出。这些学派否认相互关系的客观真实性，而把单个的事物看成是孤立的。这和数学的机械世界观的关系，在一本受到无理忽视的著作[Conze (5)]中曾阐述过。

② 当时火药已用于战争，尽管至今还普遍存在一种错误的看法，认为它在中国只用于焰火。

造[①]。就天文学而论，没有一个机构比中国宫廷更需要它了，因为宫廷要按照古老的习惯公布历法，让它为天下人所接受[②]。因此，正如我们在下一章中将要看到的那样，中国的天文学是决不可忽视的。如果说天文学的"自发进展"总是会导致自然科学的数学化，那末，就很难理解在中国为什么不出现或未曾出现这种数学化了；要是对数学的要求确实足够大的话，那末，在中国肯定是不乏那种能冲破旧的数学记号的束缚并作出（实际上只在欧洲作出）新发现的人的。但是，这显然不是产生近代科学的推动力，因此，土生土长的中国数学便被埋入坟墓中，直到晚近，重视整理科学遗产的梅瑴成及他的继承者才使它复活过来。

从另一方面说，中国过去也没有出现来自自然科学的富有激励作用的要求。对大自然的兴趣

① 关于这一点，值得研究一下古代中国数学著作中所包含的各种不同类型的问题。关于实用面积和体积的测量法、级数求和、不定分析、混合法等等，我们已谈了很多，但对于现存的资料，却未作过统计检查。

② 可惜，不管是中文或西文的著作，都没有对中国的历法科学作过完整的研究。在这类著作中，最好的可能是朱文鑫(1)。用日文写成的则有薮内清的有价值的著作。

不够大,得到控制的实验手段不够多,对经验的归纳不够充分,对日月蚀的预测和历法计算不够经常——所有这些弊端中国都有。显然,正是商业文化能够单独完成农业封建文化所做不到的事——把以前彼此分隔开的各个数学分支学科和自然知识融合在一起。

——第三卷完——

参　考　文　献

一、公元1800年以前的中文书籍

(按书名笔画排列)

«二程全书»,程颐和程颢,宋,1110年前后(谭善心集,元,1323年,阎禹锡编,明,1461年)。

«十驾斋养新录»,钱大昕,清,1790年前后。

«丁巨算法»,丁巨,元,1355年。

«七巧新谱»,清。

«七政推步»,贝琳,明,1482年。

«七修类稿»,郎瑛,明,1530年前后。

«几何原本»(欧几里得著,前六章),利玛窦和徐光启译,明,1607年。

«九家晋书辑本»,唐(汤球编,清)。

«九宫行碁立成»,佚名,唐或五代。

«九章算术»,佚名,东汉,公元一世纪(包括大量西汉或秦的资料)。

«九章算术音义»,李借,宋。

«九章算术细草图说»,李潢,清,1795年前后。

«广韵»,陆法言等,宋。

«广雅»,张揖,三国(魏),230年。

«三国志»,陈寿,晋,290年前后。

«三才图会»,王圻,明,1609年。

«三余赘笔»,都卬,明,公元十六世纪后期。

«大清会典»,王安国等多人编,清,第一版1690年,第二版1733年,第三版1767年,第四版1818年,第五版1899年。

«大清一统志»,徐乾学编,清,1730年前后。

«大元一统志»,佚名编,元,1310年前后。

«大明会典»,申时行等编,明,第一版1509年,第二版1587年。

«大衍详说»,蔡元定,宋,1180年前后。

«大戴礼记»,相传为戴德,实际上大概为曹褒编,东汉,80年至105年之间。

《大明一统志》,李贤编,明,1450 年前后(1461 年?)。
《万用正宗不求人全编》,余文台,明,1609 年。
《山居新话》,杨瑀,元,1360 年。
《小学绀珠》,王应麟,宋,公元十三世纪。
《文子》,辛研(相传),汉或稍晚,但肯定包括有先秦的资料。
《文选》,萧统编,梁,530 年。
《文献通考》,马端临,宋,始于 1254 年前后,1280 年前后完成,但到 1319 年才出版。
《六经图》,杨甲,有多种版本,宋代初版,1155 年前后。
《心斋杂俎》,张潮,清,1670 年前后。
《计倪子》,范蠡(相传),周,公元前四世纪。
《天工开物》,宋应星,明,1637 年。
《天地瑞祥志》,僧守真,唐,666 年前后。
《开方说》,李锐,清,公元十八世纪末。
《开元占经》,瞿昙悉达,唐,729 年(其中如《六执历》等部分写于 718 年)。
《元史》,宋濂等,明,1370 年前后。
《元秘书监志》,王士点和商企翁,元,1350 年。
《元经世大典》,元,1329—1331 年。
《云溪友议》,范摅,唐,875 年前后。
《云麓漫抄》,赵彦卫,宋,1206 年。
《云笈七签》,张君房,宋,1025 年。
《艺经》,邯郸淳,三国(魏),公元三世纪。
《五礼通考》,秦蕙田,清,1761 年。
《五曹算经》,佚名,晋,公元四世纪。
《五经类编》,周世樟,清,1673 年。
《五经算术》,甄鸾,北齐,公元六世纪。
《太平御览》,李昉编,宋,983 年。
《太白阴经》,李筌,唐,759 年。
《太乙金镜式经》,王希明,唐。
《历算书目》,梅文鼎,清,1723 年。
《历算全书》,梅文鼎,清,1723 年。
《历代通鉴辑览》,陆锡熊编,清,1767 年。
《历代钟鼎彝器款识法帖》,薛尚功,宋,公元十一世纪。
《比例对数表》,薛凤祚,清,1650 年。
《切韵》,陆法言,隋,601 年。
《日闻录》,李翀,元,1380 年前后。
《书经》,佚名。

«书肆说铃»,叶秉敬,明。
«公羊传»,相传为公羊高所作,但更可能是公羊寿的著作,周,公元前三世纪末期到前三世纪初(秦、汉有增补)。
«公孙龙子»,公孙龙,周,公元前四世纪。
«勿菴历算书目»,梅文鼎,清,1702年。
«孔丛子»,孔鲋(相传),据说成于东汉(但可能更晚一些)。
«孔子家语»,王肃编,东汉(更可能是三国),公元三世纪初。
«立世阿毗昙论»,佚名,印度,558年译成中文。
«礼记»,相传为戴圣编,实际上为曹褒编,相传编于西汉,公元前70—50年,实际上编于东汉,80—105年间。
«永乐大典»,解缙编,明,1407年。
«玉海»,王应麟,宋,1267年(元代1351年初版)。
«玉音问答»,胡铨,宋。
«玉堂嘉话»,王恽,元,1288年。
«正蒙»,张载,宋,1060年前后。
«世说新语»,刘义庆,刘宋,公元五世纪。
«古刻丛钞»,陶宗仪,明,公元十四世纪。
«古算器考»,梅文鼎,清,1700年前后。
«古今律历考»,邢云路,明,1600年前后。
«古今算学丛书»,见刘铎(1)。
«古微书»,孙瑴(明)编,年代未定,部分为西汉著作。
«左传»,左邱明(相传),周代末期。
«左传补注»,惠栋,清,1718年。
«东西洋考»,张燮,明,1618年。
«东坡全集»(七集),苏东坡,宋,直到1101年,但集成书较晚。
«北齐书»,李德林和李百药,唐,640年。
«北堂书钞»,虞世南,唐,630年前后。
«北史»,李延寿,唐,670年前后。
«旧唐书»,刘昫,五代,945年。
«归田录»,欧阳修,宋,1067年。
«归潜志»,刘祁,金,1235年。
«田亩比类乘除捷法»,杨辉,宋,公元十三世纪末。
«史记»,司马迁和司马谈,西汉,公元前90年(公元1000年前后初版)。
«四元玉鉴»,朱世杰,元,1303年。
«四朝闻见录»,叶绍翁,宋,公元十三世纪初期。
«尔雅»,佚名,周代的资料,秦或西汉成书(郭璞增订注释,300年前后)。

«发蒙记»,束皙,晋,公元三世纪末期。
«发微论»,蔡元定,宋,1170 年前后。
«池北偶谈»,王士祯,清,1691 年。
«齐东野语»,周密,元,1290 年前后。
«庄子»,庄周,周,公元前 290 年前后。
«庄氏算学»,庄亨阳,清,1720 年前后。
«论语»,孔丘门徒编,周(鲁),公元前 465—450 年。
«考工记»,佚名,周、汉,也可能原来是齐国的官方文件,于公元前 140 年成书。
«考古图»,吕大临,宋,1092 年。
«老学庵笔记»,陆游,宋。
«西溪丛语»,姚宽,宋,公元十一世纪。
«列子»,列御寇(相传),周和西汉,公元前五世纪至前一世纪。
«曲洧旧闻»,朱弁,宋,1130 年前后。
«吕和叔文集»,吕温,唐,850 年前后。
«吕氏春秋»,吕不韦所招集的一批学者撰写,周(秦),公元前 239 年。
«同文算指»,利玛窦和李之藻,明,1614 年。
«朱子文集»,朱熹,宋(朱玉编,清)。
«朱子全书»,朱熹,宋(李光地编,清,1713 年初版)。
«朱子语类»,朱熹,宋,1270 年前后(黎靖德编,宋)。
«竹叶亭杂记»,姚元之,清,公元十七世纪。
«后汉书»,范晔和司马彪,刘宋,450 年。
«异苑»,刘敬叔,隋以前,可能是公元五世纪。
«孙子算经»,孙子(不知其名),三国、晋或刘宋。
«宋书»,沈约,南齐,500 年。
«宋史»,脱脱和欧阳玄,元,1345 年前后。
«宋元学案»,黄宗羲和全祖望,清,1750 年前后。
«宋遗民录»,程敏政,明,1479 年。
«宋四子抄释»,吕柟编,宋(编于明,1536 年)。
«宋会要»,章得象,宋。
«初学记»,徐坚,唐,700 年。
«戒菴集»,靳贵,明,1500 年前后。
«赤雅»,邝露,明,公元十六或十七世纪。
«赤水遗珍»,杨谷成,清,1761 年。
«杜阳杂编»,苏鹗,唐,公元九世纪末。
«杨辉算法»,杨辉,宋,1275 年。
«李氏遗书»,李锐,清,1765—1814 年间,1823 年出版。

«两山墨谈»,陈霆,明。
«酉阳杂俎»,段成式,唐,863 年。
«闲窗括异志»,鲁应龙,宋。
«步里客谈»,陈长方,宋,1110 年前后。
«吴录»,张勃,三国,公元三世纪。
«吴礼部诗话»,吴师道,元,公元十四世纪初。
«时务论»,杨伟,三国,237 年前后。
«伯牙琴»,邓牧,宋,公元十三世纪。
«灵宪»,张衡,东汉,118 年前后。
«张邱建算经»,张邱建,北魏或刘宋或南齐,468—486 年间。
«张邱建算经细草»,刘孝孙,隋,公元六世纪末期。
«张子全书»,张载,宋(朱轼和段志熙编,清,1719 年初版)。
«改算记纲目»,持永丰次和大桥宅清,日本,1687 年。
«河南程氏外书»,朱熹编,宋。
«河南程氏遗书»,朱熹编,宋,1168 年。
«学历小辩»,汤若望,明,1631 年。
«学斋占毕»,史绳祖,宋,公元十三世纪。
«郑开阳杂著»,郑若曾,明,1570 年前后(1932 年初版)。
«详明算法»,可能是贾亨所作,但也有人认为是安止斋和何平子的著作,元或明,公元十四世纪。
«详解九章算术纂类»,杨辉,宋,1261 年。
«诗疏»,孔颖达,唐,640 年前后。
«诗经»,佚名,周,公元前九世纪至前五世纪。
«武备志»,茅元仪,明,1628 年。
«武备秘书»,施永图,清,十七世纪后期(1800 年重版)。
«武经总要»,曾公亮编,宋,1040 年(1044 年)。
«青箱杂记»,吴处厚,宋,公元十一世纪初。
«表异录»,王志坚,明。
«坦斋通编»,邢凯,宋,1220 年前后。
«松窗百说»,李季可,宋,1157 年。
«枫窗小牍»,袁褧,宋,公元十三世纪早期(1202 年以后)。
«画墁集»,张舜民,宋,1110 年。
«事林广记»,陈元靓,宋,1100 年至 1250 年之间,1325 年初版。
«事物纪原»,高承,宋,1085 年前后。
«国语»,佚名,周代末期、秦和西汉。
«明史»,张廷玉等,清,1739 年。

«明译天文书»,海达儿(又名黑的儿)译,明,1382年。
«明堂大道录»,惠士奇,清,1736年前后。
«易音»,顾炎武,清,1667年。
«易龙图»,陈抟,五代,950年前后。
«易图明辨»,胡渭,清,1706年。
«易数钩隐图»,刘牧,宋,公元十世纪初。
«易传»,关朗,北魏,490年前后。
«易经»,佚名,周(西汉有增补)。
«易纬河图数»,佚名,东汉。
«易纬乾凿度»,佚名,西汉,公元前一世纪。
«易纬通卦验»,佚名,西汉,公元前一世纪。
«图书编»,章潢,明,1562年,1577年,1585年。
«图书集成»,陈梦雷等编,清,1726年。
«金史»,脱脱和欧阳玄,元,1345年前后。
«佩文韵府»,张玉书等编,清,1711年。
«所南文集»,郑思肖,元,1340年前后。
«周礼»,佚名,西汉(可能包括周代后期的一些资料)。
«周髀算经»,佚名,周、秦、汉,公元前一世纪成书,但部分写于春秋战国时期。
«周礼疑义举要»,江永,清,1791年。
«周髀算经音义»,李借,宋。
«周书»,令狐德棻,唐,625年。
«参同契»,魏伯阳,东汉,142年。
«参同契考异»,朱熹(邹䜣),宋,1197年。
«弧矢论»,唐顺之,明,1550年前后。
«弧矢算术»,顾应祥,明,1552年。
«函宇通»,熊明遇和熊人霖,清,1648年。
«孟子»,孟轲,周,公元前290年前后。
«经典集林»,洪颐煊编,清,1790年前后。
«经书算学天文考»,陈懋龄,清,1797年。
«洪范五行传»,刘向,西汉,公元前10年前后。
«洞霄诗集»,孟宗宝,元,1302年。
«洞天清录(集)»,赵希鹄,宋,1240年前后。
«测量法义»,利玛窦和徐光启,明,1607年。
«测量异同»,徐光启,明,1631年。
«测圆海镜»,李冶,金(元),1248年。
«测圆海镜分类释术»,顾应祥,明,1550年。

«类篇»，司马光，宋，1067年。
«前汉书»，班固和班昭，东汉(开始于65年)，100年前后。
«说文解字»，许慎，东汉，121年。
«说郛»，陶宗仪，元，1368年前后。
«祛疑说纂»，储泳，宋，1230年前后。
«神道大编历宗算会»，周述学，明，1558年。
«春秋»，佚名，周，公元前722—481年间鲁国编年史。
«春秋纬元命苞»，佚名，西汉，公元前一世纪。
«春秋纬考异邮»，佚名，西汉，公元前一世纪。
«革象新书»，赵友钦，元。
«荀子»，荀卿，周，公元前240年前后。
«南湖集»，张镃，宋，1210年。
«南史»，李延寿，唐，670年前后。
«南齐书»，萧子显，梁，520年。
«咸宾录»，罗曰褧，明，1590年。
«拾遗记»，王嘉，晋，公元三、四世纪。
«战国策»，佚名，秦。
«峒谿纤志»，陈鼎，清，公元十七世纪。
«钦定古今图书集成»，见«图书集成»。
«皇朝经世文编»，见贺长龄(1)。
«律历志»，刘洪和蔡邕，东汉，178年。
«律历渊源»，梅谷成和何国宗编，清，1723年，可能到1730年才印完。
«律吕新论»，江永，清，1740年前后。
«律吕正义»，梅谷成和何国宗编，清，1723年。
«独异志»，李冗，唐。
«癸辛杂识»，周密，宋，公元十三世纪末期，可能到1308年才写成。
«癸辛杂识续集»，周密，元，1308年。
«骈字类编»，何焯等编，清，1728年。
«海岛算经»，刘徽，三国，263年。
«海涵万象录»，黄润玉，明。
«高厚蒙求»，徐朝俊，清，1799年前后。
«唐会要»，王溥，宋，961年。
«唐语林»，王谠，宋，集于1107年前后。
«唐阙史»，高彦休，五代，公元十世纪。
«益古演段»，李冶，金(元)，1259年。
«读史方舆纪要»，顾祖禹，清，1667年。

《袖中记》，沈约，梁，500年前后。
《盐铁论》，桓宽，西汉，公元前80年前后。
《晋书》，房玄龄，唐，635年。
《晋起居注》，刘道会，隋之前。
《格古要论》，曹昭，明，1387年。
《格致草》，熊明遇，明，1620年(1648年)。
《格致镜原》，陈元龙，清，1735年。
《夏侯阳算经》，夏侯阳，刘宋或齐，450—500年间，但也可能是六世纪初。
《晏子春秋》，晏婴，周，可能是公元前四世纪。
《晓菴新法》，王锡阐，明，1643年。
《秘傳花镜》，陈淏子，清，1688年。
《透簾细草》，佚名，元，1355年前后。
《乘除通变算宝》，杨辉，宋，公元十三世纪末期。
《修真太极混元图》，萧道存，宋。
《通志》，郑樵，宋，1150年前后。
《通原算法》，严恭，明，1372年。
《通典》，杜佑，唐，812年前后。
《通俗文》，服虔，东汉或晋。
《清异录》，陶谷，五代，950年前后。
《清波别志》，周辉，宋，1194年。
《渊鉴类函》，张英等编，清，1710年。
《淮南子》，刘安主撰，西汉，公元前120年前后。
《梁书》，姚察和姚思廉，唐，629年。
《职方外记》，艾儒略，明，1623年。
《授受五岳圆法》，佚名，唐或五代。
《推步法解》，江永，清，1750年。
《营造法式》，李诫，宋，1097年；1103年初版，1145年重版。
《梦粱录》，吴自牧，宋，1275年。
《梦溪笔谈》，沈括，宋，1086年。
《野客丛书》，王楙，宋，1201年。
《斜川集》，苏过，宋。
《逸周书》，佚名，周，公元前245年以前。
《猗觉寮杂记》，朱翌，宋，公元十二世纪。
《随隐漫录》，陈随隐，宋，公元十三世纪后期。
《隋书》，魏征等，唐，636年(表和志)，656年(纪和列传)。
《续世说》，孔平仲，宋，1157年前后。

《续古摘奇算法》,杨辉,宋,1275年。
《湛渊静语》,白珽,元,公元十四世纪。
《割圆密率捷法》,明安图,清,1774年。
《割圆连比例图解》,董佑诚,清,写于1800年以前,但到1819年才出版。
《寓简》,沈作喆,宋。
《就日录》,赵氏,宋。
《遂初堂书目》,尤袤,宋。
《道藏》,历代,宋代初次集印,金、元、明亦印过。
《道德经》,李耳(相传),周,公元前300年以前。
《敦煌录》,佚名,唐。
《越绝书》,佚名,东汉,52年前后。
《援鹑堂笔记》,姚范,清,公元十八世纪后期,但到1838年才出版。
《敬斋古今黈》,李冶,宋,公元十三世纪。
《朝野佥载》,张鷟,唐,公元八世纪,但宋代作过重大修改。
《畴人传》,阮元(罗士琳、诸可宝、黄钟骏续),清,1799年。
《策算》,戴震,清,1744年。
《傅子》,傅玄,晋,公元三世纪。
《缉古算经》,王孝通,唐,625年前后。
《新法算书》,汤若望、邓玉函、罗雅谷、龙华君、徐光启、李之藻、李天经等,清,1669年,1674年。
《新唐书》,欧阳修和宋祁,宋,1061年。
《新论》,桓谭,东汉,20年前后。
《韵石斋笔谈》,姜绍书,清,公元十七世纪初。
《数学》,江永,清,1750年前后。
《数度衍》,方中通,清,1661和1721年。
《数学通轨》,柯尚迁,明,1578年。
《数理精蕴》,梅谷成和何国宗编,清,1723年。
《数术记遗》,徐岳,东汉,190年(?)。
《数书九章》,秦九韶,宋,1247年。
《锦囊启蒙》,佚名,元或明,公元十四世纪。
《演繁露》,程大昌,宋,1180年。
《潇湘听雨录》,江昱,清。
《榕城诗话》,杭世骏,清,1732年。
《墨子》,墨翟,周,公元前四世纪。
《默记》,王铚,宋,公元十一世纪。
《管子》,管仲(相传),周和西汉,可能主要是在稷下书院写成(公元前四世纪末期)。

«算法全能集»,贾亨,元或明,公元十四世纪。
«算法取用本末»,杨辉,宋,公元十三世纪后期。
«算法通变本末»,杨辉,宋,公元十三世纪末。
«算法统宗»,程大位,明,1593 年。
«算学新说»,朱载堉,明,1603 年。
«算学启蒙»,朱世杰,元,1299 年。
«算经十书»,戴震编,搜集成书于宋,1084年。1794 年收入«武英殿聚珍版丛书»,1760 年左右由孔继涵分开出版。
«魏书»,魏收,北齐,554 年,572 年重修。
«魏略»,鱼豢,三国(魏)或晋,公元三、四世纪。
«履斋示儿编»,孙奕,宋,1205 年。
«鹤林玉露»,罗大经。
«辨正论»,法琳,唐,630 年前后。
«鍪隅戲欷瑣微论»,黄晞,宋,1040 年前后。
«樵香小记»,何琇,清。
«麓堂诗话»,李东阳,明,1513 年。

二、公元 1800 年以后的中文和日文书籍和论文

(按作者姓氏笔画排列)

丁文江(1),«宋应星»,喜詠轩丛书,1929。
丁取忠(1),«白芙堂算学丛书»,1875。
丁取忠(2),«四象假令细草»,约 1870 年。
丁福保,周云青(2),«四部总录算法编»,商务,1957。
三上義夫(1),«中国算学之特色»,商务,1934。
三上義夫(2),«支那思想;科学(数学)»,岩波讲座,东京,1934。
三上義夫(3),«和算史研究の成果»,JJHS,1951 (No. 19),33。
三上義夫(4),«Loria 博士の支那数学论»,TYG,1923,**12** (No. 4),500。
三上義夫(5),«畴人传论一并せて van Hee 氏の所说を评す»,TYG,1927,**16** (No. 2),185; (No. 3),287。

三上義夫(6),«圓理の发明に关する论证», SGZ, 1930, **41** (No. 7—10); TBGZ, 1931, No. 472—5。
三上義夫(7),«关孝和と微分学», TBGZ, 1931, No. 480; 1934, No. 510。
三上義夫(8),«关孝和の业绩と京坂の算家并に支那の算法との关系及比较», TYG, 1932, **20**(No. 2), 217, 543, **21**(No. 1), 45, (No. 3), 352, (No. 4), 557, **22** (No. 1), 54。
三上義夫(9),«清朝时代の割圆术の发达に关する考察», TYG, 1930, **18**, (No. 3), (No. 4), 439。
三上義夫(10),«歸除歌括考», SK, 1937, No. 177。
三上義夫(11),«宋元数学上に於ける演段及び释锁の意義», SK, 1937, No. 179。
三上義夫(12),«支那古代の数学», MSKGK, 1932, No. 37。
三上義夫(14),«琉球列島の古代数学», TNH, 1916, **11** (No. 9)。
三上義夫(15),«印度の数学と支那との关系», TNH, 1917, **12**(No. 6), 15。
三上義夫(18),«和汉数学史上に於ける战乱及び軍事の关系», SK, 1937, No. 182。
三上義夫(21),«和算史研究の成果», JJHS, 1951, (No. 19), 33。
小仓金之助,大矢真一(1), «三上義夫博士 (1875—1950) とその业绩 三上義夫先生著作论文目录», JJHS, 1951, (No. 18), 1, 9。
卫集贤(2),«数目字»,书文月刊, 1943, **3**, 93。
卫集贤(3),«古史研究»,上海, 1934。
马衡(1),«隋书律历志十五等尺»,北平, 1932。
马国翰(1),«玉函山房辑佚书», 1853。
王先谦(1),«皇清经解续编», 1888。
王仁俊(1),«格致古微», 1896。
冯云鹏,冯云鹓,«金石索», 1821。
冯友兰(1),«中国哲学史»,商务, 1941。
叶耀元(1),«重学»,刊登于中西算学大成,同文, 1889。
邓衍林,李俨(1),«北平各图书馆所藏中国算学书联合目录»,北平, 1936。
加悦传一郎(1),«算法圆理括囊», 1851。
加藤平左衛门(1),«和算の行列式展开に就ての检讨», TMJ, 1939, **45**, 338。
刘铎(1),«古今算学丛书»,上海, 1898。
刘铎(2),«若水斋古今算学书录»,上海, 1898。
刘冰弦(1),«中国代数名著益古演段评介»,东方杂志, 1943, **39**, 33。
刘操南(1),«周礼"九数"解»,益世报,文史副刊, 1944, No. 19。
许莼舫(1),«古算法之新研究»,上海, 1935; 补编 1945。
许莼舫(2),«中算家的代数学研究»,中国青年出版社,北京, 1954。
许莼舫(3),«中算家的几何学研究»,中国青年出版社,北京, 1954。

许莼舫(4),«古算趣味»,中国青年出版社,北京, 1956。
孙海波(1),«甲骨文编»,北平, 1934。
孙文青(1),«九章算术篇目考»,金陵学报, 1932, **2**, 321。
孙文青(2),«张衡著述年表»,金陵学报, 1932, **2**, 105。
孙文青(3),«张衡年谱»,金陵学报,1933, **3**, 331。
孙文青(4),«张衡年谱»,商务, 1935。
汪敬熙(1),«科学方法漫谈»,商务, 1940; 1944 年再版。
宋景昌(1),«数书九章札记», 1842。
远藤利贞(1),«日本数学史»,东京, 1896。
严敦杰(1),«算学启蒙流传考»,东方杂志, 1945, **41**, 31。
严敦杰(2),«居延汉简算书»,真理杂志, 1943, **1**, 315。
严敦杰(3),«筹算算盘论»,东方杂志, 1944, **41**, 33。
严敦杰(4),«上海算学文献述略»,科学, 1939, **23**, 72。
严敦杰(5),«祖暅别传»,科学, 1941, **25**, 460。
严敦杰(6),«宋元算学丛考»,科学, 1947, **29**, 109。
严敦杰(7),«欧几里得几何原本元代输入中国说»,东方杂志, 1943,**39**(No. 13),35。
严敦杰(8),«隋书律历志祖冲之之圆率记事释»,学艺通讯, 1933, **15** (No. 10)。
严敦杰(9),«宋元算书与信用货币史料»,益世报,文史副刊, 1943, No. 38。
严敦杰(10),«回历甲子考»,科学, 1949, **31**, 291。
严敦杰(12),«北齐董峻郑元伟甲寅元历积年考»,治学, 1945, **33**, 14。
严敦杰(13),«规矩砖»,书文月刊, 1941, **3** (No. 4), 63。
严敦杰(14),«中国古代数学的成就»,北京, 1956。
严杰(1),«皇清经解», 1829。
劳乃宣(1),«古筹算考释(续编)», 1886。
李光璧,赖家度(1),«汉代的伟大科学家:张衡»,北京, 1955。
李光璧,钱君晔(1),«中国科学技术发明和科学技术人物论集»,三联, 1955。
李锐(1),«李氏算学遗书», 1823。
李俨(1),«中国数学大纲»,商务, 1931。
李俨(2),«中国算学史»,商务, 1937。
李俨(3),«中国算学小史»,商务, 1930。
李俨(4),«中算史论丛»,商务, 1947。
李俨(5),«最近十年来中算史论文目录»,学艺通讯, 1948, **15**, 16。
李俨(6),«李俨所藏中国算学书目录(续)编», 科学, 1920, **5**, 418, 525; 1925, **10** (No. 4); 1926, **11**, 817; 1933, **17**,1005; 1934, **18**, 1547。
李俨(7),«敦煌石室立成算经»,国立北平图书馆刊, 1935, **9**, 39; 图书集刊, 1939,**1**, 386。

李俨(8),«上古中算史»,科学,1944,**27**,16。
李俨(9),«珠算制度考»,燕京学报,1931,**1** (No. 10),2123。
李俨(10),«中国算学略说»,科学,1934,**18**,1135。
李俨(11),«中算家之级数论»,科学,1929,**13**,1139,1349。
李俨(12),«中国算学史余录»,科学,1917,**3**,238。
李俨(13),«对数之发明及其东来»,科学,1927,**12**,109。
李俨(14),«中算史之工作»,科学,1928,**13**,785。
李俨(15),«三十年来之中国算学史»,科学,1947,**29**,101。
李俨(16),«中算家之圆锥曲线说»,科学,1947,**29**,115。
李俨(17),«日算圆周术»,科学,1949,**31**,297。
李俨(18),«伊斯兰教与中国历算之关系»,回教论坛,1941,**5** (No. 3, 4)。
李俨(19),«二十八年来中算史论文目录»,图书集刊,1940,**2**,372。
李俨(20),«中国古代数学史料»,中国科学图书仪器公司,1954。
李俨(21),«中算史论丛»,第一辑,1954;第二辑,1954;第三辑,1955;第四辑,1955;第五辑,1955。科学出版社。
李俨,严敦杰(1),«抗战以来中算史论文目录»,图书集刊,1944,**5** (No. 4),51。
李佐贤(1),«古泉汇»,1859。
吴承洛(2),«中国度量衡史»,商务,1937。
张永立(1),«圣经中之圆周率»,真理杂志,1943,**1**,267。
张敦仁(1),«缉古算经细草»,1801。
张敦仁(2),«求一算术»,1801 年左右。
张荫麟(3),«九章及西汉之数学»,燕京学报,1927,**2**,301。
张荫麟(4),«纪元后二世纪间我国第一位大科学家:张衡»,东方杂志,1925,**21** (No. 23),89。
张鉴(1),«西夏纪事本末»,1830 年左右。
陈杰(1),«算法大成»,1843。
陈寅恪(2),«几何原本满文译本跋»,中央研究院历史语言研究所集刊,1931,**2** (No. 3),281。
陈维祺等(1),«中西算学大成»,1889。
武田楠雄(1),«明代における算书形の变迁»,JJHS,1953 (No. 26),13。
武田楠雄(2),«明代数学の特质;算法统宗成立の过程»,JJHS,1954 (No. 28),1,(No. 29),8,(No. 34),2。
茅以升(1),«中国圆周率略史»,科学,1917,**3**,411。
杨宽(4),«中国历代尺度考»,商务,1938;1955 年修订。
罗士琳(1),«算学比例汇通»,1818。
罗福颐(1),«传世古尺图录»,1936。

竺可桢(6),《为什么要研究我们古代科学史》,人民日报,1954年9月27日。
周清澍(1),《我国古代伟大的科学家:祖冲之》,北京,1955。
细井淙(1),《日本科学之特质(数学)》,东洋思潮丛书,卷12,岩波,东京,1935。
神田茂(3),《䉛籃及びその类にツいて》,JJHS,1952(No. 23),21。
赵然凝(1),《衍本冥探》,东方杂志,1944,**41**,55。
胡道静(1),《梦溪笔谈校证》,上海,1956。
保其寿(1),《碧奈山房集》,1880年左右。
姚振宗(1),《后汉书艺文志》,1895。
贺长龄(1),《皇朝经世文编》,1826—1897。
骆腾凤(1),《艺游录》,1820年左右。
容庚(2),《汉金文录》,中央研究院历史研究所论文集,No. 5。
郭沫若(3),《甲骨文字研究》,北平,1931。
桥本增吉(1),《书经の研究》,TYG,1912,**2**,283;1913,**3**,331;1914,**4**,49,369。
顾颉刚(8),《禅让传说起于墨家考》,古史辨,卷七,30—109。
钱宝琮(1),《中国算学史》,中央研究院历史语言研究所论文集,A辑,No. 6,1932。
钱宝琮(2),《古算考源》,商务,1930。
钱宝琮(3),《盈不足术流传欧洲考》,科学,1927,**12**(No. 6),707。
钱宝琮(4),《太一考》,燕京学报,1932,No. 12,2449。
钱君晔(1),《宋代卓越的科学家:沈括》,北京,1955。
能田忠亮(1),《周髀算经の研究》,京都,1933。
能田忠亮(9),《历学史论》,东京,1948。
桑下客(1),《七巧新谱》,1813,1815。
黄节(1),《郑思肖传》,国书学报,1904,**1**(No. 3),8。
董同龢(1),《切韵指掌图中几个问题》,中央研究院历史语言研究所集刊,1946,**17**,193。
赖家度(1),《天工开物及其著者:宋应星》,北京,1955。
缪钺(1),《李冶与李治释疑》,东方杂志,1943,**39**,41。
薮内清(3),《数学》,见支那科学经济史,卷8,东京,1942。
薮内清(11),《天工开物の研究》,东京,1953。
薮内清(12),《支那数学史概说》,京都,1944。
藤原松三郎(1),《支那数学史の研究》,TMJ,1939,**46**,123,135,295;1940,**47**,49,322;1941,**48**,201;1943,**49**,90。

三、西文书籍和论文

(按字母次序排列)

Ahrens, W. E. M. G. (1). *Mathematische Spiele*. In *Encyklopädie d. math. Wiss.* vol. 1 (2), pp. 1081 ff. Teubner, Leipzig, 1900—4. Separate, enlarged, edition, Teubner, Leipzig, 1911. 3rd ed. 1916.

Andrews, W. S. (1). *Magic Squares and Cubes*. Chicago, 1908.

Anon. (25). *Les Instruments de Mathématiques de la Famille Strozzi faits en 1585—1586 par Erasmus Habermehl de Prague*. [Sale catalogue.] Frederik Muller, Amsterdam, 1911.

Archibald, R. C. (1). 'Outline of the History of Mathematics' (and mathematical Astronomy). *AMM*, 1949, **56** (Supplement), 1.

Archibald, R. C. (2). 'The Cattle Problem [attributed to Archimedes; an indeterminate equation]. *AMM*, 1918, **25**, 411.

Babbage, C. (1). 'Logarithms in Chinese Form.' *RAS/MN*, 1827, **1**, 9.

Bachmann, P. G. H. (1). *Die Elemente der Zahlentheorie*. Teubner, Leipzig & Berlin, 1921.

Bailey, K. C. (1). *The Elder Pliny's Chapters on Chemical Subjects*. 2 vols. Arnold, London, 1929 and 1932.

Ball, W. W. Rouse (1). *A Short Account of the History of Mathematics*. Macmillan, London, 1888.

Ball, W. W. Rouse (2). *Mathematical Recreations and Essays*. 11th ed., ed. H. S. M. Coxeter. Macmillan, London, 1939.

Baranovskaia, L. S. (1). 'Pervaia Rabota po Matematike na Mongolskom Yazyke (On a Mathematical Work in the Mongol Language; the *Sochinenie o Koordinatach* of +1712).' *TIYT*, 1954, **1** 53.

Barlow, C. W. C. & Bryan, G. H. (1). *Elementary Mathematical Astronomy*. UTP, London, 1946.

Barnard, F. P. (1). *The Casting-Counter and the Counting-Board*. Oxford, 1916.

Baxendall, D. (1). *Catalogue of the Collections in the Science Museum, South Kensington, with Descriptive and Historical Notes and Illustrations; Mathematics. I. Calculating Machines and Instruments*. HMSO, London, 1926.

Baxter, W. (1) (tr.). 'Pleasure not Attainable according to Epicurus.' In *The Works of Plutarch*. Ed. Morgan. London, 1694.

Bayley, E. C. (1). 'On the Genealogy of Modern Numerals.' *JRAS*, 1883,

14, 335; **15**, 1.

Beal, S. (1) (tr.). *Travels of Fah-Hian [Fa-Hsien] and Sung-Yün, Buddhist Pilgrims from China to India (+400 and +518)*. Trübner, London, 1869.

Beal, S. (2) (tr.) *Si Yu Ki [Hsi Yü Chi], Buddhist Records of the Western World, transl. from the Chinese of Hiuen Tsiang [Hsüan-Chuang]*. 2 vols. Trübner, London, 1884. 2nd ed. 1906.

Beck, T. (1). *Beiträge z. Geschichte d. Maschinenbaues.* Springer, Berlin, 1900.

Becker, O. & Hofmann, J. E. (1). *Geschichte der Mathematik.* Athenäum, Bonn, 1951 (rev. O. Neugebauer, *CEN*, 1953, **2**, 364).

Becker, W. (1). *Sterne und Sternsysteme.* Steinkopf, Dresden & Leipzig, 1950.

van Beek, A. (1). *Beschrijving van een Chineeschen Zonne- en Maanwijzer, met Kompas.* Amsterdam, 1851.

Belpaire, B. (2). 'Le Folklore de la Foudre en Chine sous la Dynastie des Thang (un document nouveau)' (the *Lei Min Chuan* of Shen Chhi-Chi, +779). *MUSEON*, 1939, **52**, 163.

Benndorf, O., Weiss, E. & Rehm, A. 'Zur Salzburger Bronzescheibe mit Sternbildern.' *JHOAI*, 1903, **6**, 32.

Berezkina, E. I. (1) (tr.). 'Drevnekitaĭskii Traktat *Matematika v deviati Knigach.*' (The ancient Chinese Work *Chiu Chang Suan Shu*, '*Nine Chapters* on the Mathematical Art'). *JHM*, 1957, **10**, 423—584.

Berger, H. (1). *Geschichte d. wissenschaftlichen Erdkunde d. Griechen.* Leipzig, 1903.

Bernal, J. D. (1). *Science in History.* Watts, London, 1954 (Beard Lectures at Ruskin College, Oxford).

Bernard-Maître, H. (1). *Matteo Ricci's Scientific Contribution to China*, tr. by E. T. C. Werner. Vetch, Peiping, 1935. Orig. pub. as 'L'Apport Scientifique du Père Matthieu Ricci à la Chine', Hsienhsien, Tientsin, 1935; rev. Chang Yü-Chê, *TH*, 1936, **3**, 583.

Bernard-Maître, H. (5). *Le Père Matthieu Ricci et la Société Chinoise de son Temps* (1552 to 1610). 2 vols. Hsienhsien, Tientsin, 1937.

Bernard-Maître, H. (11). 'Ferdinand Verbiest, Continuateur de l'oeuvre Scientifique d'Adam Schall.' *MS*, 1940, **5**, 103.

Bernard-Maître, H. (12). 'Galilée et les Jésuites des Missions d'Orient.' *RQS*, 1935, 356.

Berthoud, F. (1). *Histoire de la Mésure du Temps par les Horloges.* Paris, 1802.

Bertrand, G. & Mokragnatz, H. (1). 'Sur la Présence du Nickel et du Cobalt chez les Végétaux et dans la Terre Arable.' *CRAS*, 1922, 175, 112, 458, 179, 1566; 1930, 190, 21.

Bettini, Mario (1). *Apiaria Universae Philosophiae Mathematicae, in quibus Paradoxa, et nova pleraque Machinamenta ad Usus eximios traducta et facillimis Demonstrationibus confirmata opus....* Ferronius, Bologna, 1645.

Bettini, Mario (2). *Recreationum Mathematicarum Apiaria Novissima Duodecim—quae continent Militaria, Stereometrica, Conica, et novas alias jucundas Praxes ac Theorias, in omni Mathematicarum Scientiarum Genere....*Ferronius, Bologna, 1660.

Bevan, E. R. (1). 'India in Early Greek and Latin Literature.' In *CHI*, vol. 1, ch. 16, p. 391. Cambridge, 1935.

Bezold, C., Kopff, A. & Boll, F. (1). 'Zenit- und Aequatorialgestirne am babylonischen Fixsternhimmel.' *SHAW/PH*, 1913, 4, no. 11.

Bielenstein, H. (1). 'An Interpretation of the Portents in the *Ts'ien Han Shu* [*Chhien Han Shu*].' *BMFEA*, 1950, 22, 127.

Bielenstein, H. (2). 'The Restoration of the Han Dynasty.' *BMFEA*, 1954, 26, 1—20 and sep. Göteborg, 1953.

Biernatzki, K. L. (1). 'Die Arithmetik d. Chinesen.' *JRAM*, 1856, 52, 59. (Translation of Wylie, 4.)

Bilfinger, G. (1). *Zeitmesser d. antiken Völker.* Stuttgart, 1886.

Biot, E. (1) (tr.). *Le Tcheou-Li ou Rites des Tcheou* [*Chou*]. 3 vols. Imp. Nat., Paris, 1851. (Photographically reproduced, Wêntienko, Peiping, 1930.)

Biot, E. (3) (tr.). *Chu Shu Chi Nien* [Bamboo Books]. *JA*, 1841 (3ᵉ sér.), 12, 537; 1842, 13, 381.

Biot, E. (4) (tr.). 'Traduction et Examen d'un ancien Ouvrage intitulé *Tcheou-Pei*, littéralement "Style ou signal dans une circonférence".' *JA*, 1841 (3ᵉ sér.), 11, 593; 1842 (3ᵉ sér.), 13, 198 (emendations). (Commentary by J. B. Biot, *JS*, 1842, 449.)

Biot, E. (5) (tr.). 'Table Générale d'un Ouvrage chinois intitulé...*Souan-Fa Tong-Tsong*, ou Traité Complet de l'Art de Compter...' *JA*, 1839 (3ᵉ sér.), 7, 193.

Biot, E. (6). (On Pascal's Triangle in the *Suan Fa Thung Tsung.*) *JS*, 1835 (May).

Biot, E. (7). 'Note sur la connaissance que les chinois ont eue de la Valeur de Position des Chiffres.' *JA*, 1839 (3ᵉ sér.), 8, 497.

Biot, J. B. (1). *Études sur l'Astronomie Indienne et sur l'Astronomie Chinoise.* Lévy, Paris, 1862.

Biot, J. B. (3). Review of E. B. Burgess' translation of the *Sūrya Siddhānta.* New Haven, Conn., 1860. *JS*, 1860. (Reprinted in J. B. Biot (1), p. 155.)

al-Bīrūnī, Abū-al-Raiḥān Muḥammad ibn-Aḥmad. *Ta'rīkh al-Hind* (History of India). See Sachau (1).

Blagden, C. O. (1). 'Notes on Malay History.' *JRAS/M*, 1909, no. 53.

Blochet, E. (3). *Catalogue des MSS. Arabes.* Bibliothèque Nationale, Paris, 1925.

Bodde, D. (5). 'Types of Chinese Categorical Thinking.' *JAOS*, 1939, 59. 200.

Bodde, D. (6). 'The Attitude towards Science and Scientific Method in Ancient China.' *TH*, 1936, 2, 139, 160.

Bodde, D. (15). *Statesman, General and Patriot in Ancient China.* Amer. Oriental Soc. New Haven, Conn., 1940.

Boffito, G. (1). *Gli Strumenti della Scienza e la Scienza degli Strumenti, con l'Illustrazione della Tribuna di Galileo.* Seeber, Florence, 1929.

Böker, R. (1). *Die Entstehung d. Sternsphäre Arats.* Leipzig, 1948.

Borkenau, F. (1). *Der Übergang vom feudalen zum bürgerlichen Weltbid.* Paris, 1934.

Bousset, W. (1). *Hauptprobleme der Gnosis.* Vandenhoek & Ruprecht, Göttingen, 1907. (*Forsch. z. Rel. u. Lit. d. alt.- u. neuen Testaments*, no. 10.)

Boxer (1) (ed.). *South China in the Sixteenth Century; being the Narratives of Galeote Pereira, Fr. Gaspar de Cruz, O.P., and Fr. Martin de Rada, O.E.S.A.* (1550—1575). Hakluyt Society, London, 1953 (Hakluyt Society Pubs., 2nd series, no. 106).

Boyer, C. B. (1). *The Concepts of the Calculus.* Columbia Univ. Press, New York, 1939.

Boyer, C. B. (2). 'Fundamental Steps in the Development of Numeration.' *ISIS*, 1944, 35, 153.

Braunmühl, A. (1). *Geschichte d. Trigonometrie.* 2 vols. Leipzig, 1900, 1903.

Bravais, A. (1). 'Mémoire sur les Halos et les Phénomènes optiques qui les accompagnent.' *JEP*, 1847, 18 (no. 31), 1—270; cf. 1845, 18 (no. 30), 77, 97.

Bréhier, L. (2). *Vie et Mort de Byzance.* Albin Michel, Paris, 1947. [Evol. de l'Hum. series, no. 32.]

Bretschneider, E. (7). 'Chinese Intercourse, etc. I. Accounts of Foreign Countries.' *CR*, 4, 312, 385.

Brockelmann, C. (2). *Geschichte d. arabischen Literatur.* Felber, Weimar, 1898. Supplementary volumes, Brill, Leiden, 1937.

Brunet, P. & Mieli, A. (1). *L'Histoire des Sciences (Antiquité).* Payot, Paris, 1935.

Budge, E. A. Wallis (3) (ed.). *Cuneiform Texts from Babylonian Tablets,* *etc. in the British Museum*. 41 vols. 1896—1931.

Bulling, A. (1). 'Descriptive Representations in the Art of the Chhin and Han Period.' Inaug. Diss., Cambridge, 1949.

Bulling, A. (5). 'Die Kunst der Totenspiele in der östlichen Han-zeit.' *ORE*, 1956, 3, 28.

de Burbure, A. (1). 'Quelques Précédents Expansionnistes Belges dans l'Hémisphère Chinois' (on Verbiest). *ECB*, 1951, 6, 305.

Burtt, E. A. (1). *The Metaphysical Foundations of Modern Science*. New York and London, 1925.

Bushell, S. W. (3). 'The Early History of Tibet.' *JRAS*, 1880, N.S., 12, 435.

Cable, M. & French, F. (1). *The Gobi Desert*. Hodder & Stoughton, London, 1942.

Cable, M. & French, F. (2). *China, her Life and her People*. Univ. of London Press, London, 1946.

Cahen, C. (2). 'Quelques Problèmes économiques et fiscaux de l'Iraq Buyide [Buwayhid], d'après un Traité de Mathématiques [the *Kitāb al-Hāwī*...written between +1025 and+1050]'. *AIEO/UA*, 1952, 10, 326.

Cajori, F. (2). *A History of Mathematics*. 2nd ed. Macmillan, New York, 1919. (Repr. 1924.) (The 1st ed. does not contain the section on Chinese Mathematics.)

Cajori, F. (3). *A History of Mathematical Notations*. 2 vols. Open Court, Chicago, 1928, 1929.

Cajori, F. (4). *A History of the Logarithmic Slide-Rule*. New York, 1909.

Cajori, F. (5). *A History of Physics, in its elementary branches, including the evolution of Physical Laboratories*. Macmillan, New York, 1899.

Calder, I. R. F. (1). 'A Note on Magic Squares in the Philosophy of Agrippa of Nettesheim.' *JWCI*, 1949, 12, 196.

Cantor, M. (1). *Vorlesungen ü. d. Gesch. d. Mathematik*. 4 vols. Teubner, Leipzig, 1880—1908. Crit. Mikami (5).

Capelle, W. (1). *Berges- und Wolkenhöhen bei griechischen Physikern*. *Stoicheia*, no. 5, 1916.

Cardan, Jerome (1). *De Subtilitate*. Nürnberg, 1550 (ed. Sponius); Basel, 1560. (Account in Beck (1), ch. 9.)

Cardan, Jerome (3). *Artis Magnae sive de Regulis Algebraicis*, Nuremberg, 1545.

Carton, C. (1). (*a*) *Notice Biographique sur le P. Verbiest, Missionnaire de la Chine*. (From *Annales de la Soc. de l'Emulation pour l'Histoire et les Antiquités de la Flandre Occidentale*, 1839, 1, 83.) Vandecasteele-

Werbrouck, Bruges, 1839. (*b*) *Biographie du R.P. Verbiest, Missionnaire en Chine.* Chabannes, Bruxelles, 1845. (From *Album Bibliographique des Belges Célèbres.*)

Carus, P. (2). *Chinese Thought.* Open Court, Chicago, 1907.

Cassini, J. D. (1). 'Réflexions sur la Chronologie Chinoise.' *MRASP*, 1730 (1690), **8**, 300.

Cayley, H. (1). 'The Jade Quarries of the Kuen Lun.' *MCM*, 1871, **24**, 452.

de Celles, F. Bedos (1). *La Gnomonique Pratique*....Briasson *et al.* Paris, 1760.

Chamberlain, B. H. (1). *Things Japanese.* Murray, London. 2nd ed. 1891; 3rd ed. 1898.

Chatley, H. (5). 'Chinese Natural Philosophy and Magic.' *JRSA*, 1911, **59**, 557.

Chavannes, E. (1). *Les Mémoires Historiques de Se-Ma Ts'ien* [Ssuma Chhien]. 5 vols. Leroux, Paris, 1895—1905. (Photographically reproduced, in China, without imprint and undated.)
1895 vol. 1 tr. *Shih Chi*, chs. 1, 2, 3, 4.
1897 vol. 2 tr. *Shih Chi*, chs. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.
1898 vol. 3 (i) tr. *Shih Chi*, chs. 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22.
vol. 3(ii) tr. *Shih Chi*, chs. 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30.
1901 vol. 4 tr. *Shih Chi*, chs. 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42.
1905 vol. 5 tr. *Shih Chi*, chs. 43, 44, 45, 46, 47.

Chavannes, E. (3) (tr.). 'Le Voyage de Song [Sung] Yün dans l'Udyāna et le Gandhāra.' *BEFEO*, 1903, **3**, 379.

Chavannes, E. (6) (tr.). 'Les Pays d'Occident d'après le *Heou Han Chou.*' *TP*, 1907, **8**, 149. (Ch. 118, on the Western Countries, from *Hou Han Shu.*)

Chavannes, E. (16). 'Trois Généraux Chinois de la Dynastie des Han Orientaux.' *TP*, 1906, **7**, 210. (Tr. ch. 77 of the *Hou Han Shu* on Pan Chhao, Pan Yung and Liang Chhin.)

Chavannes, E. & Pelliot, P. (1). 'Un Traité Manichéen retrouvé en Chine, traduit et annoté.' *JA*, 1911 (10ᵉ sér.), **18**, 499; 1913 (11ᵉ sér.), **1**, 99, 261.

Chen. See Chhen.

Chêng Chin-Tê (David) (1). 'On the Mathematical Significance of the Ho Thu and Lo Shu.' *AMM*, 1925, **32**, 499.

Chêng Chin-Tê (David) (2). 'The Use of Computing Rods in China.' *AMM*, 1925, **32**, 492.

Chêng Lin (1) (tr.). *Prince Dan of Yann* [*Yen Tan Tzu*]. World

Encyclopaedia Institute, Chungking, 1945.

Chhen Kuan-Shêng (3). '*Hai Lu;* Forerunner of Chinese Travel Accounts of Western Countries.' *MS*, 1942, 7, 208.

Chhen Ta (1). 'Chinese Migrations with special reference to Labour Conditions.' *Bull. U.S. Bureau Labour Statistics*, no. 340, Washington, 1923.

Chhien Chung-Shu (2). 'China in the English Literature of the Eighteenth Century.' *QBCB/E*, 1941 (N.S.), 2, 7.

Chhu Ta-Kao (2) (tr.). *Tao Tê Ching, a new translation*. Buddhist Lodge, London, 1937.

Childe, V. Gordon (8). 'The Oriental Background of European Science.' *MQ*, 1938, 1, 105.

Ching-Phei-Yuan (1). 'Etude Comparative des diverses éditions du *Chouo Fou* [*Shuo Fu*].' *SSA*, 1946, no. 1.

Ciampini, J. (1). 'An Abstract of a Letter wrote some time since by Signior John Ciampini of Rome to Fr. Bernard Joseph a Jesu-Maria, etc., concerning the Asbestus, and manner of spinning and weaving an Incombustible Cloath thereof.' *PTRS*, 1701, 22, 911.

Clark, G. N. (1). *Science and Social Welfare in the Age of Newton.* Oxford. 2nd ed. 1949.

Clark, W. E. (1). 'On the zero and place-value in Indian mathematics.' In *Indian Studies in Honour of C. R. Lanman*, p. 217.

Clark, W. E. (2). '[History of] Science [in India].' Art. in *The Legacy of India*. Ed. G. T. Garrett, p. 335. Oxford, 1937.

Clark, W. E. (3) (tr.). *The Āryabhaṭiya of Āryabhaṭa; an ancient Indian Work on Mathematics and Astronomy*. Univ. of Chicago Press, Chicago, 1930.

Coedès, G. (2). 'A Propos de l'Origine des Chiffres Arabes.' *BLSOAS*, 1931, 6, 323.

Cohn, W. (1). 'The Deities of the Four Cardinal Points.' *TOCS*, 1940, 18, 61.

Colebrooke, H. T. (1). 'On the Indian and Arabian Divisions of the Zodiack.' *TAS/B* (Asiatick Researches), 1807, 9, 323.

Colebrooke, H. T. (2) (tr.). *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanskrit of Brahmagupta and Bhāskara*. Murray, London, 1817.

Conrady, A. & Erkes, E. (1). *Das älteste Dokument zur chinesische Kunstgeschichte, Tien-Wên, die 'Himmelsfragen' d. K'üh Yüan, abgeschl. u. herausgeg. v. E. Erkes.* Leipzig, 1931. Critiques: B. Karlgren, *OLZ*, 1931, 34, 815; H. Maspero, *JA*, 1933, 222, 59; Hsü Tao-Lin, *SA*, 1932, 7, 204.

Conze, E. (5). *Der Satz vom Widerspruch; zur Theorie des dialektischen Materialismus.* Beltz (pr. pr.), Hamburg, 1932.

Coolidge, J. L. (1). *A History of Geometrical Methods.* Oxford, 1940.

Cooper, E. R. (1). 'The Davis Backstaff or English Quadrant.' *MMI*, 1944, **30**, 59.

Copernicus, Nicholas (1). *De Revolutionibus Orbium Coelestium.* Nürnberg, 1543.

Cordier, H. (1). *Histoire Générale de la Chine.* 4 vols. Geuthner, Paris, 1920.

Cordier, H. (3). 'Description d'un Atlas Sino-Coréen Manuscrit du Musée Britannique'. In *Recueil de Voyages et de Documents pour servir à l'Histoire de la Géographie depuis le 13e siècle jusqu' à la fin du 16e; Section cartographique.* Leroux, Paris, 1896.

Cordier, H. (4). *Les Monstres dans la légende et dans la Nature (Etudes sur les Traditions Tératologiques).* Pr. pub., Paris, 1890.

Cordier, H. (7). 'The Life and Labours of Alexander Wylie.' *JRAS*, 1887, **19**, 351.

Cordier, H. (8). *Essai d'une Bibliographie des Ouvrages publiés en Chine par les Européens au 17e et au 18e Siècle.* Leroux, Paris, 1883.

Couling, S. (1). *Encyclopaedia Sinica.* Kelly & Walsh, Shanghai; O.U.P., Oxford & London, 1917.

Courant, M. (1). *Bibliographie Coréenne.* Paris, 1895. (Pub. Ecole Langues Or. Viv. (3e sér.), no. 19.)

Couvreur, F. S. (1) (tr.). *Tch'ouen Ts'iou [Chhun Chhiu] et Tso Tchouan [Tso Chuan]; Texte Chinois avec Traduction Française.* 3 vols. Mission Press, Hochienfu, 1914.

Couvreur, F. S. (2). *Dictionnaire Classique de la Langue Chinoise.* Mission Press, Hsienhsien, 1890 (photographically reproduced, Vetch, Peiping, 1947).

Couvreur, F. S. (3) (tr.). *'Li Ki' [Li Chi], ou Mémoires sur les Bienséances et les Cérémonies.* 2 vols. Hochienfu, 1913.

Cowell, P. H. & Crommelin, A. C. D. (1). See Olivier (1), p. 102. 1908.

Crawley, R. (1) (tr.). *Thucydides' 'History of the Peloponnesian War'.* Everyman edition; Dent, London, 1910.

Creel, H. G. (1). *Studies in Early Chinese Culture* (1st series). Waverly, Baltimore, 1937.

Creel, H. G. (4). *Confucius; the Man and the Myth.* Day, New York, 1949; Kegan Paul, London, 1951. Reviewed D. Bodde, *JAOS*, 1950, **70**, 199.

Crew, H. & de Salvio, A. (1) (tr.). *Dialogues concerning Two New Sciences of Galileo.* New York, 1914.

Crombie, A. C. (1). *Robert Grosseteste and the Origins of Experimental Science*. Oxford, 1953.

Crombie, A. C. (2). *Augustine to Galileo; the History of Science, +400 to +1650*. Falcon, London, 1952.

Cronin, V. (1). *The Wise Man from the West* (biography of Matteo Ricci). Hart-Davies, London, 1955.

da Cruz, Gaspar (1). *Tractado em que se cõtam muito por estẽco as cousas da China*. Evora, 1569, 1570 (the first book on China printed in Europe), tr. Boxer (1), and originally in *Purchas his Pilgrimes*, vol. 3, p. 81. London, 1625.

Culin, S. (1). 'Chess and Playing-Cards; Catalogue of Games and Implements for Divination exhibited by the U.S. National Museum in connection with the Dept. of Archaeology and Palaeontology of the University of Pennsylvania at the Cotton States and International Exposition, Atlanta, Georgia, 1895.' *ARUSNM*, 1896, 671 (1898).

Culin, S. (2). 'Chinese Games with Dice and Dominoes.' *ARUSNM*, 1893, 491.

Cumont, F. (3). *Recherches sur le Manichéisme. I. La Cosmogonie Manichéenne*. Lamertin, Bruxelles, 1908.

Cunningham, R. (1). 'Nangsal Obum' (The story of,). *JWCBRS*, 1940, A, 12, 35.,

Danjon, A. & Couderc, P. (1). *Lunettes et Télésoopes*. Paris, 1935.

Dareste, C. (1). *Recherches sur la Production Artificielle des Monstruosités; ou, Essais de Tératogénie Expérimentale*. Reinwald, Paris, 1877.

Datta, B. (1). 'On the Origin and Development of the Idea of Per Cent.' *AMM*, 1927, 34, 530.

Datta, B. (2). *The Science of the Śulba, A Study in Early Hindu Geometry*. Univ. Press, Calcutta, 1932.

Datta, B. (3). 'Vedic Mathematics.' In *Cultural Heritage of India*, vol. 3, p. 382.

Datta, B. & Singh, A. N. (1). *History of Hindu Mathematics*. 2 vols. Motilal Banarsi Das, Lahore, 1935 (vol. 1), 1938 (vol. 2) (rev. O. Neugebauer, *QSGM/A*, 1936, 3, 263).

Daudin, P. (1). '*L'Unité de Longueur dans l'Antiquité Chinoise*. Saigon, 1939.

Daumas, M. (1). *Les Instruments Scientifiques aux 17e et 18e Siècles*. Presses Univ. de France, Paris, 1953.

Dawson. W. R. (1). 'Ancient Egyptian Mathematics.' *SPR*, 1924. 19, 50.

Dember, H. & Uibe, M. (1). (*a*) 'Versuch einer physikalischen Lösung des Problems der sichtbaren Grössenänderung von Sonne und Mond in verschiedenen Höhen über dem Horizont.' *ANP*, 1920 (4th ser.), **61**, 353. (*b*) 'Über die Gestalt des sichtbaren Himmelsgewölbes.' *ANP*, 1920 (4th ser.), **61**, 313.

Diaz del Castillo, Bernal (1). *The True Story of the Conquest of New Spain*, 1520. Ed A. P. Maudsley. Routledge, London, 1928.

Dickson, L. E. (1). *History of the Theory of Numbers.* 1st et. Carnegie Institution, Washington, 1919—20; Carn. Inst. Publ. no. 256. 3 vols. 2nd ed. Stechert, New York, 1934. (Crit. Y. Mikami, *TBGZ*, 1921, nos. 354, 356, 362.)

Diels-Freeman: Freeman, K. (1). *Ancilla to the Pre-Socratic Philosophers; a complete translation of the Fragments in Diels' 'Fragmente der Vorsokratiker'*. Blackwell, Oxford, 1948.

Diels, H. (1). *Antike Technik.* Teubner, Leipzig & Berlin, 1914. 2nd ed. 1920 (rev. B. Laufer, *AAN*, 1917, **19**, 71).

Dingle, H. (1). 'The Essential Elements in the Scientific Revolution of the +17th century.' In *Actes du VII^e Congrès Internat. d'Histoire des Sciences*, p. 272. Jerusalem, 1953.

Diringer, D. (1). *The Alphabet; a Key to the History of Mankind.* Philos. Library, New York, 1948 (with foreword by Sir Ellis Minns).

Dittrich, A. (1). 'Solstitium Hi-Kungi quod a. a. Chr. n. 656 evenit.' *MSRLSB/S*, 1952 (1953), no. 7.

Dobell, Clifford (2). 'Dr Uplavici.' *ISIS*, 1939, **30**, 268.

Douglas, R. K. (1). Miscellaneous translations. *OAA*, 1882, **1**, 1.

Dubs, H. H. (6). 'A Military Contact between Chinese and Romans in —36.' *TP*, 1940, **36**, 64.

Dubs, H. H. (7). *Hsün Tzu; the Moulder of Ancient Confucianism.* Probsthain, London, 1927.

Dubs, H. H. (20). 'The Growth of a Sinological Legend; A Correction to Yule's "Cathay".' (The supposed bringing of Greek astronomical books to China in +164.) *JAOS*, 1946, **66**, 182.

Dudeney, H. E. (1). 'Magic Squares.' *EB* (14th ed.), vol. 14, p. 627.

D[udgeon], J[ohn] (1). Letter commenting on Wylie (15), and identifying Fukienese *mi* (Sunday) as the first Syllable of Mithras and *Mitra*. *CRR*, 1871, **4**, 195.

Duhem, P. (1). *Etudes sur Léonard de Vinci.* 3 vols. Hermann, Paris.
Vols. 1, 2: 'Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu.' 1906, 1909.
Vol. 3: 'Les précurseurs Parisiens de Galilée.' 1913.
(Vol. 1: Albert of Saxony, Bernardino Baldi, Themon, Cardan, Palissy, etc.
Vol. 2: Nicholas of Cusa, Albertus Magnus, Vincent of Beauvais, Ristoro d'Arezzo, etc.

Vol. 3: Buridan, Soto, Nicholas d'Oresme, etc.)

Duhem. P. (3). *Le Système du Mondes Histoire des Doctrines Cosmologiques de Platon à Copernic*. 5 vols. Paris, 1913—17.

Dumont, M. (1). 'Un Professeur de Mathématiques au 9e siècle; Mohammed ibn Mousa al-Khowarizmi.' *RGS*, 1947, **54**, 7.

Dupuis, J. (1) (tr.). *Works of Theon of Smyrna*. Paris, 1892.

Duyvendak, J. J. L. (12). 'The Last Dutch Embassy to the Chinese Court' (+1794 to +1795). *TP*, 1938, **34**, 1, 223; 1939, **35**, 329.

Dye, D. S. (1). *A Grammar of Chinese Lattice*. 2 vols. Harvard-Yenching Institute, Cambridge, Mass., 1937. (Harvard-Yenching Monograph Series, nos. 5, 6.)

Eastlake, F. W. (1). 'Finger-Reckoning in China.' *CR*, 1880, **9**, 249,—319.

Eberhard, W. (9). *A History of China from the Earliest Times to the Present Day*. Routledge & Kegan Paul, London, 1950. Tr. from the Germ. ed. (Swiss pub.) of 1948 by E. W. Dickes. Turkish ed. *Čin Tarihi*, Istanbul, 1946. (Crit. K. Wittfogel, *AA*, 1950, **13**, 103; J. J. L. Duyvendak, *TP*, 1949, **39**, 369; A. F. Wright, *FEQ*, 1951, **10**, 380.)

Edgar, J. H. (1). 'Tibetan Numbers.' *JWCBRS*, 1936, **8**, 170.

Edkins, J. (6). 'Local Value in Chinese Arithmetical Notation.' *JPOS*, 1886, **1**, 161.

Edkins, J. (10). 'On the Poets of China during the Period of the Contending States and of the Han Dynasty' (Chhü Yuan, etc.). *JPOS*, 1889, **2**, 201.

Ekman, W. V. (1). *Instructions for the Use of the Ekman Current Meter (1932 Pattern)*. Pr. pr. Henry Hughes & Son, Ltd., London, n.d.

d'Elia, Pasquale (1). 'Echi delle Scopente Galileiane in Cina vivonte ancora Galileo (1612—1640).' *AAL/RSM*, 1946, (8a ser.), **1**, 125. Republished in enlarged form as 'Galileo in Cina. Relazioni attraverso il Collegio Romano tra Galileo e i gesuiti scienzati missionari in Cina (1610—1640).' *Analecta Gregoriana*, **37** (Series Facultatis Missiologicae A (N/1)), Rome, 1947. (Reviews: G. Loria, *A/AIHS*, 1949, **2**, 513; J. J. L. Duyvendak, *TP*, 1948, **38**, 321; G. Sarton, *ISIS*, 1950, **41**, 220.)

d'Elia, Pasquale (2) (ed.). *Fonti Ricciani; Storia dell'Introduzione del Cristianismo in Cina*, 3 vols. Libroria dello Stato, Rome, 1942—9. Cf. Trigault (1); Ricci (1).

d'Elia, Pasquale (3). 'The Spread of Galileo's Discoveries in the Far East.' *EW*, 1950, **1**, 156. (English résumé of (1).)

d'Elia, Pasquale (4). 'Presentazione della prima Traduzione Cinese di

Euclide' (of Matteo Ricci & Hsü Kuang-Chhi) [with notes on the problem of the Yuan version]. *MS*, 1956, **15**, 161.

Elliott-Smith, Sir Grafton (1). (*a*) *The Ancient Egyptians and the Origin of Civilisation*. London, 1923. (*b*) *The Diffusion of Culture*. London, 1933. (*c*) *Human History*. London, 1934 (2nd ed.).

Erkes, E. (11). Observations on Karlgren's 'Fecundity Symbols in Ancient China' (9). *BMFEA*, 1931, **3**, 63.

Erkes, E. (17). 'Chinesische-Amerikanische Mythenparallelen.' *TP*, 1925, **24**, 32.

van Esbroeck, G. (1). 'Commentaires Etymographiques sur les Jades Astronomiques.' *MCB*, 1951, **9**, 161.

van Esbroeck, G. (2). 'Les Sept Etoiles Directrices.' *MCB*, 1951, **9**, 171.

Euclid. See Heath (1).

Evelyn, John (1). 'Of a Method of making more lively Representations of Nature in Wax than are extant in Painting, and of a New Kind of Maps in Bas-Relief; both practised in France.' *PTRS*, 1665, **1**, 99.

Fabricius, J. A. (1). *Bibliotheca Graeca*....Edition of G. C. Harles, 12 vols. Bohn, Hamburg, 1808.

Faraut, F. G. (1). *L'Astronomie Cambodgienne*. Schneider, Saigon; 1910.

Farrington, B. (4). *Greek Science (Thales to Aristotle): its meaning for us*. Penguin Books, London, 1944.

Farrington, B. (8). 'The Rise of Abstract Science among the Greeks.' *CEN*, 1953, **3**, 32.

Farrington, B. (15). 'The Greeks and the Experimental Method.' *D*, 1957, **18**, 68.

Feldhaus, F. M. (22). 'Die Uhren des Königs Alfons X von Spanien.' *DUZ*, 1930, **54**, 608.

F[eldhaus], F. M. (23). 'Chinesische Logarithmen.' *GTIG*, 1917, **4**, 240.

Fêng, S. H. (Fong, S. H.) (1). 'The *Hua Yang Kuo Chih*.' *JWCBRS*, 1940. A, **12**, 225.

Fêng Yu-Lan (1). *A History of Chinese Philosophy*, vol. 1, *The period of the Philosophers (from the beginnings to c. b.c. 100)*, tr. D. Bodde; Vetch, Peiping, 1937; Allen & Unwin, London, 1937. Vol. 2, *The Period of Classical Learning (from the 2nd. century b.c. to the 20th century a.d.)*, tr. D. Bodde; Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1953. At the same time, Vol. 1 was re-issued in uniform style by this publisher. Translations by Bodde of parts of Vol. 2 had appeared earlier in *HJAS*. (See Fêng Yu-Lan, *1*).

Fêng Yu-Lan (5) (tr.). *Chuang Tzu; a new selected translation with an exposition of the philosophy of Kuo Hsiang*. Commercial Press, Shanghai, 1933.

Fêng Yu-Lan (6). 'Mao Tsê-Tung's "On Practice", and Chinese Philosophy.' *PC*, 1951, **4** (no. 10), 5.

Ferguson, J. C. (3). (*a*) 'The Chinese Foot Measure.' *MS*, 1941, **6**, 357. (*b*) *Chou Dynasty Foot Measure.* Privately printed, Peiping, 1933. (See also a note on a graduated rule of *c.* +1117, *TH*, 1937, **4**, 391.)

Ferguson, J. C. (7). 'Political Parties of the Northern Sung Dynasty.' *JRAS/NCB*, 1927, **58**, 35.

Ferguson, T. (1). *Chinese Researches, Pt. I. Chinese Chronology and Cycles.* London, 1881.

Filliozat, J. (7). 'L'Inde et les Echanges Scientifiques dans l'Antiquité.' *JWH*, 1953, **1**, 353.

Filliozat, J. (8). 'La Pensée Scientifique en Asie Ancienne.' *BSEIC*, 1953, **28**, 5. (On transmissions from Mesopotamia to China and India, on pneumatic medicine, the lunar mansions and the mathematical zero.)

Filliozat, J. (9). 'Le Symbolisme du Monument du Phnom Bâkhèn.' *BEFEO*, 1953, **49**, 527.

Finot, L. (1). *Les Lapidaires Indiens.* Bouillon, Paris, 1896. (Biblioth. de l'Ecole des Hautes Etudes, no. 111.)

Fisher, R. A. (1). 'Reconstruction of the Sieve of Eratosthenes.' *MG*, 1929, **14**, 565.

Fisher, R. A. & Yates, F. (1). *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research.* Oliver & Boyd, Edinburgh, 1938, 1953.

Fong. See Fêng.

de Fontenelle, B. (1). *Entretiens sur la Pluralité des Mondes.* Brunet, Paris, 1698. (1st ed. 1686; Eng. trs. 1688, 1702.)

Forke, A. (3) (tr.). *Me Ti [Mo Ti] des Sozialethikers und seiner Schüler philosophische Werke.* Berlin, 1922. (*MSOS*, Beibände, 23—5.)

Forke, A. (4) (tr.). *Lun Hêng, Philosophical Essays of Wang Chhung*: Vol. 1, 1907. Kelly & Walsh. Shanghai: Luzac, London; Harrassowitz, Leipzig. Vol. 2, 1911 (with the addition of Reimer, Berlin). (*MSOS*, Beibände, **10** and **14**.) (Crit. P. Pelliot, *JA*, 1912 (10e sér.), **20**, 156.)

Forke, A. (9). *Geschichte d. neueren chinesischen Philosophie* (i.e. from beg. of Sung to modern times). de Gruyter, Hamburg, 1938. (Hansische Univ. Abhdl. a. d. Geb. d. Auslandskunde. no. 46 (ser. B. no. 25.))

Forke, A. (13). *Geschichte d. alten chinesischen Philosophie* (i.e. from antiquity to beg. of Former Han). de Gruyter, Hamburg, 1927. (Hamburg. Univ. Abhdl. a. d. Geb. d. Auslandskunde, no. 25 (ser. B, no. 14).)

Franck, H. A. (1). *Roving through Southern China.* Century, New York, 1925.

Frank, J. (1). *Die Verwendung des Astrolabs nach al-Chwarizmi* [*al-Khwārizmī*]. Mencke, Erlangen, 1922. (Abhdl. z. Gesch. d. Naturwiss u. d. Med. no. 3.)

Franke, H. (1). 'Some Remarks on the Interpretation of Chinese Dynastic Histories' (with special reference to the Yuan). *OR*, 1950, **3**, **113**.

Franke, H. (2). 'Beiträge z. Kulturgeschichte Chinas unter der Mongolenherrschaft.' (Complete translation and annotation of the *Shan Chü Hsin Hua* by Yang Yü, +1360.) *AKML*, 1956, **32**, 1—160.

Franke, H. (3). 'Some Remarks on Yang Yü and his *Shan Chü Hsin Hua*.' *JOSHK*, 1955, **2**, 302.

Franke, O. (5). 'Zur Frage der Einführung des Buddhismus in China.' *MSOS*, 1910, **13**, 295.

Franke, O. (6). 'Der kosmische Gedanke in Philosophie und Staat d. Chinesen.' *VBW* (1925/1926), 1928, p. 1. (Reprinted in Franke (8), p. 271.)

Fréchet, M. (1). *Les Mathématiques et le Concret.* Presses Univ. de France, Paris, 1955; rev. P. Labérenne, *LP*, 1956 (no. 69), 140.

Freeman, K. (1). *The Pre-Socratic Philosophers, a companion to Diels' 'Fragmente der Vorsokratiker'.* Blackwell, Oxford, 1946.

Fréret, N. (1). 'De l'Antiquité et de la Certitude de la Chronologie Chinoise.' *Mémoires de Littérature tirés des Registres de l'Acad. Roy. des Inscriptions et Belles-Lettres*, 1736, **10**, 377; 1743, **15**, 495; 1753, **18**, 178.

Frost, A. H. & Fennell, C. A. M. (1). 'Magic Squares.' *EB* (13th ed.), vol. 17, p. 310.

Gaffarel, L. (1). *Curiositez Inouyes, sur la Sculpture Talismanique des Persans, horoscope des Patriarches, et Lecture des Estoiles.* [Paris], 1650 (1st edition, 1637).

Galen. See Kühn.

Galileo, Galilei (1). *Opera.* Florence, 1842.

le Gall, S. (1). *Le Philosophe Tchou Hi, Sa Doctrine, son Influence.* T'ou-se-wei, Shanghai, 1894 (*VS*, no. 6). (Incl. tr. of part of ch. 49 of *Chu Tzu Chhüan Shu*.)

Gallagher, L. J. (1) (tr.). *China in the 16th Century; the Journals of Matthew Ricci, 1583—1610.* Random House, New York, 1953. (A complete translation, preceded by inadequate bibliographical details, of Nicholas Trigault's *De Christiana Expeditione apud Sinas* (1615).

Based on an earlier publication: *The China that Was; China as discovered by the Jesuits at the close of the 16th Century; from the Latin of Nicholas Trigault.* Milwaukee, 1942.) Identifications of Chinese names in Yang Lien-Shêng (4). Crit. J. R. Ware, *ISIS*, 1954, **45**, 395.

Gamow, G. (1). 'Supernovae.' *SAM*, 1949, **181** (no. 12), 19.

Gandz, S. (1). 'On the Origin of the term Root.' *AMM*, 1926, **33**, 261; 1928, **35**, 67.

Gandz, S. (2). 'The Origin of the Ghubar Numerals, or Arabian Abacus and the Articuli.' *ISIS*, 1931, **16**, 393.

Gandz, S. (3). 'Die Harpendonapten oder Seilspanner und Seilknüpfer.' *QSGM/B*, 1930, **1**, 255.

Gandz, S. (4). 'Notes on Egyptian and Babylonian Mathematics.' In *Sarton Presentation Volume*, ed. Ashley-Montagu, M. F., p. 453. Schuman, New York, 1944.

Gandz, S. (5). 'The *Mishnāh ha Middot*, the first Hebrew Geometry, of about +150.' *QSGM/A*, 1932, **2**.

Gaspardone, E. (1). 'Matériaux pour servir à l'Histoire d'Annam.' *BEFEO*, 1929, **29**, 63.

Gaubil, A. (1). Numerous contributions to *Observations Mathématiques, Astronomiques, Géographiques, Chronologiques et Physiques tirées des Anciens Livres Chinois ou faites nouvellement aux Indes et à la Chine par les Pères de la Compagnie de Jésus*, ed. E. Souciot. Rollin, Paris, 1729, vol. I.

(*a*) Remarques sur l'Astronomie des Anciens Chinois en général, p. 1.

(*b*) Eclipses ⊙ Sexdecim in Historia aliisque veteribus Sinarum libris notatae et a Patre Ant. Gaubil e Soc. Jesu computatae, p. 18. (The first is the *Shu Ching* eclipse attributed to −2155; then follows the *Shih Ching* eclipse attributed to −776; then five *Tso Chuan* eclipses (−720 to −495), then one of −382 and finally 3 Han ones.)

(*c*) Observations des Taches du Soleil, p. 33.

(*d*) Observation de l'Eclipse de ☾ du 22 Déc. 1722 à Canton, p. 44.

(*e*) Observatio Eclipsis Lunae totalis Pekini 22 Oct. 1725, p. 47.

(*f*) Occultations ou Eclipses des Etoiles Fixes par la Lune, observées à Péking en 1725 & 1726, p. 59.

(*g*) Observations de Saturne, p. 69.

(*h*) Observations de Jupiter, p. 71.

(*i*) Observations de ♃ et de ses Satellites; Conjonctions ou Ap.

proximations de ♃ à des Etoiles Fixes, tirées des anciens livres d'Astronomie Chinoise (+73 to +1367), p. 72.

(*j*) Observations des Satellites de ♃, faites à Péking en 1724, p. 80.

(*k*) Observations de Mars, p. 95.

(*l*) Observations de Vénus, p. 98.

(*m*) Observations de Mercure, p. 101.

(*n*) Observations de la Comète de 1723 faites à Péking d'abord par des Chinois et ensuite par les PP. Gaubil & Jacques, p. 105.

(*o*) Observations géographiques (à) l'Ile de Poulo-Condor, p. 107.

(*p*) Plan de Canton, sa longitude et sa latitude, p. 123.

(*q*) Extrait du Journal du Voyage du P. Gaubil et du P. Jacques de Canton à Péking, etc., p. 127.

(*r*) Plan (& Description) de Péking, p. 136.

(*s*) Situation de Poutala, demeure du grand Lama, des sources du Gange et des pays circonvoisins, le tout tiré des Cartes Chinoises et Tartares, p. 138.

(*t*) Mémoire Géographique sur les Sources de l'Irtis et de l'Oby, sur le pays des Eleuthes et sur les Contrées qui sont au Nord et à l'Est de la Mer Caspienne, p. 141.

(*u*) Relation Chinoise contenant un itinéraire de Péking à Tobol, et de Tobol au Pays des Tourgouts, p. 148.

(*v*) Remarques sur le commencement de l'Année Chinoise, p. 182.

(*w*) Abrégé Chronologique de l'Histoire des Cinq Premiers Empereurs Mogols, p. 185.

(*x*) Observations Physiques (Lézard Volant à Poulo-Condor, Melon de Hami), p. 204.

(*y*) Observations sur la Variation de l'Aiman, p. 210.

(*z*) Observations Diverses, p. 223.

Gaubil, A. (2). *Histoire Abrégée de l'Astronomie Chinoise.* (With Appendices 1, Des Cycles des Chinois; 2, Dissertation sur l'Eclipse Solaire rapportée dans le *Chou-King* [*Shu Ching*]; 3, Dissertation sur l'Eclipse du Soleil rapportée dans le *Chi-King* [*Shih Ching*]; 4, Dissertation sur la première Eclipse du Soleil rapportée dans le *Tchun-Tsieou* [Chhun Chhiu]; 5, Dissertation sur l'Eclipse du Soleil, observée en Chine l'an trente-et-unième de Jésus-Christ; 6, Pour l'Intelligence de la Table du *Yue-Ling* [*Yüeh Ling*]; 7, Sur les Koua; 8, Sur le Lo-Chou (recognition of Lo Shu as magic square).) In *Observations Mathématiques, Astronomiques, Géographiques, Chronologiques et Physiques, tirées des anciens livres Chinois ou faites nouvellement aux Indes, à la Chine, et ailleurs, par les Pères de la*

Compagnie de Jésus, ed. E. Souciet. Rollin, Paris, 1732, vol. 2.

Gaubil, A. (3). *Traité de l'Astronomie Chinoise*. In *Observations Mathématiques, etc.*, ed. E. Souciet. Rollin, Paris, 1732, vol. 3.

Gaubil, A. (4). *Histoire de l'Astronomie Chinoise*. In *Lettres Edifiantes et Curieuses, écrites des Missions Etrangères; Nouvelle Edition—Mémoires des Indes et de la Chine*, vol. 26, pp. 65—295. Mérigot, Paris, 1783. (Reprinted in vol. 14 of the 1819 edition.)

Gaubil, A. (5). *Traité de la Chronologie Chinoise; divisé en 3 parties, composé par le P. Gaubil, Missionaire à la Chine, et publié pour servir de suite aux Mémoires Concernant les Chinois*, ed. S. de Sacy. Treuttel & Wurtz, Paris, 1814.

Gaubil, A. (9). See Laplace. 'Mémoire sur la Diminution de l'Obliquité de l'Ecliptique, qui résulte des Observations Anciennes.' *CT*, 1811, 429.

Gauchet, L. (6). 'Note sur la Généralisation de l'Extraction de la Racine Carrée chez les anciens Auteurs Chinois, et quelques Problèmes du *Chiu Chang Suan Shu*.' *TP*, 1914, 15, 531.

Gauchet, L. (7). 'Note sur la Trigonométrie sphérique de Kouo Cheou-King' (Kuo Shou-Ching). *TP*, 1917, 18, 151.

Gauthier, H. (1). *La Température en Chine*. Shanghai, 1918.

Gelasius, A. (1). *De Terraemotu Liber*. Bologna, 1571.

Geldner, K. F. (1). (tr.). *Der 'Rg Veda'*. 3 vols. Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), 1951. (Harvard Oriental Series, nos. 33, 34, 35.)

Gilbert, William (1). *De Magnete*. Short, London, 1600. Ed. and tr. S. P. Thompson, Chiswick, London, 1900.

Giles, H. A. (3) (tr.). *The Travels of Fa-Hsien*. Cambridge, 1923.

Giles, L. (2). *An Alphabetical Index to the Chinese Encyclopaedia* [*Chhin-Ting Ku Chin Thu Shu Chi Chhêng*]. British Museum, London, 1911.

Giles, L. (4) (tr.). *Taoist Teachings from the Book of Lieh Tzu*. Murray, London, 1912; 2nd ed. 1947.

Giles, L. (5). *Six Centuries at Tunhuang*. China Society, London, 1944.

Giles, L. (6). *A Gallery of Chinese Immortals* ['*hsien*']; *selected biographies translated from Chinese sources* [*Lieh Hsien Chuan, Shen Hsien Chuan*, etc.]. Murray, London, 1948.

Gille, B. (3). 'Léonard de Vinci et son Temps.' *MC/TC*, 1952, 2, 69.

Ginzel, F. K. (1). *Handbuch d. mathematischen und technischen Chronologie, das Zeitrechnungswesen d. Völker*. 3 vols. Hinrichs, Leipzig, 1906.

Ginzel, F. K. (2). *Spezieller Kanon der Sonnen- und Mond-Finsternisse f. d. Ländergebiet d. klassischer Altertumswissenschaften u. d. Zeitraum* *v. 900 v. C.* bis *600 n. C.* Berlin, 1899.

Ginzel, F. K. (3). 'Die Zeitrechnung.' Art. in *Astronomie*, ed. J. Hartmann. Pt. III, Sect. 3, vol. 3 of *Kultur d. Gegenwart*, p. 57 Teubner, Leipzig and Berlin, 1921.

von Glasenapp, H. (1). *La Philosophie Indienne, Initiation à son Histoire et à ses Doctrines.* Payot, Paris, 1951 (no index).

Glathe, A. (1). 'Die chinesische Zahlen.' *MDGNVO*, 1932, **26**, B, 1.

Godard, A. (1). *Les Monuments de Marāghah.* Paris, 1934.

Goetz, W. (1). 'Die Entwicklung des Wirklichkeitssinnes vom 12. bis 14. Jahrhundert.' *AKG*, 1937, **27**, 33.

Goodrich, L. Carrington (4). 'Measurements of the Circle in Ancient China.' *ISIS*, 1948, **39**, 64.

Goodrich, L. Carrington (5). 'The Abacus in China.' *ISIS*, 1948, **39**, 239.

Goodrich, L. Carrington (9). *Introduction to Chinese History, and Scientific Developments in China.* Sino-Indian Cultural Soc., Santiniketan, 1954. (Sino-Indian Pamphlets, no. 21.)

Goschkevitch, J. (1). 'Über das chinesische Rechnenbrett.' In *Arbeiten der kaiserlichen Russischen Gesandtschaft zu Peking*, vol. 1, p. 293. Berlin, 1858.

Gow, J. (1). *A Short History of Greek Mathematics.* Cambridge, 1884.

Grabau, A. W. (1). 'Palaeontology.' Art. in *Symposium on Chinese Culture*, ed. Sophia Zen. IPR, Shanghai, 1931, pp. 152 ff.

Graham, A. C. (1). *The Philosophy of Chhêng I-Chhuan (+1033 to +1107) and Chhêng Ming-Tao (+1032 to +1085).* Inaug. Diss. London, 1953.

Granet, M. (1). *Danses et Légendes de la Chine Ancienne.* 2 vols. Alcan, Paris, 1926.

Granet, M. (5). *La Pensée Chinoise.* Albin Michel, Paris. 1934. (Evol. de l'Hum. series, no. 25 *bis*.)

Gros, L. (1). *La Théorie du Baguenodier.* Lyons, 1872.

Grossmann, H. (1). 'Die gesellschaftlichen Grundlagen der mechanistischen Philosophie und die Manufaktur.' *ZSF*, 1935, 4.

Grousset, R. (1). *Histoire de l'Extrême-Orient.* 2 vols. Geuthner, Paris, 1929. (Also appeared in *BE/AMG*, nos. 39, 40).

Gunther, R. T. (1). *Early Science in Oxford.* 14 vols. Oxford, 1923–45. (The first pub. Oxford Historical Soc.; the rest privately printed for subscribers.)

Vol. 1 1923 Chemistry, Mathematics, Physics and Surveying.

Vol. 2 1923 Astronomy.

Vol. 3 1925 Biological Sciences and Biological Collections.

Vol. 4 1925 The [Oxford] Philosophical Society.
Vol. 5 1929 Chaucer and Messahalla on the Astrolabe.
Vol. 6 1930 Life and Work of Robert Hooke.
Vol. 7 1930 Life and Work of Robert Hooke (contd.).
Vol. 8 1931 Cutler Lectures of Robert Hooke (facsimile).
Vol. 9 1932 The *De Corde* of Richard Lower (facsimile) with introd. and tr. by K. J. Franklin.
Vol. 10 1935 Life and Work of Robert Hooke (contd.).
Vol. 11 1937 Oxford Colleges and their men of science.
Vol. 12 1939 Dr Plot and the correspondence of the [Oxford] Philosophical Society.
Vol. 13 1938 Robert Hooke's *Micrographia* (facsimile).
Vol. 14 1945 Life and Letters of Edward Lhwyd.

Günther, S. (1). 'Die Anfänge u. Entwicklungsstadien des Coordinatenprincips.' *ANHGH*, 1877, **6**, 3.

Gurjar, L. V. (1). *Ancient Indian Mathematics and Vedha.* Ideal Book Service, Poona, 1947. (Crit. A. H. Neville, *N*, 1948, **161**, 580.)

Gustavs, A. & Dalman, D. G. (1). 'Der Saatrichter zur Zeit d. Kassiten.' *ZDPV*, 1913, **36**, 310.

Hall, A. R. (1). *Ballistics in the Seventeenth Century; a Study in the Relations of Science and War, with reference principally to England.* Cambridge, 1951.

Haloun, G. (5). 'Legalist Fragments, I; *Kuan Tzu* ch. 55, and related texts.' *AM*, 1951 (n.s.), **2**, 85.

al-Hamdānī. See Rashīd al-Dīn al-Hamdānī.

de Harlez, C. (1). *Le Yih-King* [*I Ching*], *Texte primitif, Rétabli, Traduit et Commenté.* Hayez, Bruxelles, 1889.

de Harlez, C. (2) (tr.). *Kong-Tze-Kia-Yu* [*Khung Tzu Chia Yü*]; *Les Entretiens Familiers de Confucius.* Leroux, Paris, 1899; and *BOR*, 1893, **6**; 1894, **7**.

Hart, I. B. (3). 'The Scientific Basis of Leonardo da Vinci's work in Technology—an Appreciation.' *TNS*, 1956, **28**, 105.

Harzer, P. (1). *Die exakten Wissenschaften im alten Japan.* Rede z. Feier d. Geburtstages S. Maj. des d. Kaisers Königs v. Preussen Wilhelm II. Lipsius & Tischer, Kiel, 1905. (Crit. Y. Mikami, *JDMV*, 1906, **15**, 253; *TBGZ*, 1906, nos. 174, 175.)

Haskins, C. H. (1). *Studies in the History of Mediaeval Science.* Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1927.

Hatt, G. (1). (*a*) 'Asiatic Motifs in American [Amerindian] Folklore.' In Singer Presentation Volume, *Science, Medicine and History*, vol 2, p. 389, ed. E. A. Underwood. Oxford, 1954, (*b*) 'Asiatic

Influences in American Folklore.' *KDVS/HFM*, 1949, **31**, no. 6.

Haudricourt, A. & Needham, J. (1). *La Science Chinoise au Moyen-Age, in Histoire Générale des Sciences.* Vol. 1, ed. R. Taton. Presses Universitaires de France, Paris, 1957.

Hauser, F. (1). *Über d. 'Kitāb fi al-Hijal' (das Werk ü. d. sinnreichen Anordnungen) d. Banū Mūsa [+803 to +873].* Mencke, Erlangen, 1922. (Abhdl. z. Gesch. d. Naturwiss. u. Med. no. 1.)

Hayashi, Tsuruichi (1). 'The *Fukudai* and Determinants in Japanese Mathematics.' *PTMS*, 1910, **5**, 254.

Hayashi, Tsuruichi (2). 'Brief History of Japanese Mathematics.' *NAW*, 1905, **6**. 296 (65 pp.); 1907, **7**, 105 (58 pp.). (Crit. Y. Mikami, *NAW*, 1911, **9**, 373.)

Heath, R. S. (1). *A Treatise on Geometrical Optics.* C.U.P., Cambridge, 1887.

Heath, Sir Thomas (1) (tr.). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* 3 vols. Cambridge, 1926.

Heath, Sir Thomas (2) (tr.). *Apollonius Pergaeus; Treatise on Conic Sections, edited in modern notation, with introduction, including an essay on the earlier history of the subject.* Cambridge, 1896.

Heath, Sir Thomas (3). 'Greek Mathematics and Astronomy.' *SMA*, 1938, **5**, 215.

Heath, Sir Thomas (5). *Diophantos of Alexandria; a Study in the History of Greek Algebra.* Cambridge, 1885, 1910.

Heath, Sir Thomas (6). *A History of Greek Mathematics.* 2 vols. Oxford, 1921.

Heath, Sir Thomas (7). *Aristarchus of Samos and the Ancient Copernicans.* Oxford, 1913.

Heath, Sir Thomas (8) (tr.). *The Works of Archimedes.* Cambridge, 1897; with supplement, 1912. (Reissued, Dover, New York, n.d. (1953).)

Heawood, E. (1). 'The Relationships of the Ricci Maps.' *GJ*, 1917, **50**, 271.

van Hée, L. (1). 'Problèmes Chinois du Second Degré.' *TP*, 1911, **12**, 559.

van Hée, L. (2). 'Algèbre Chinoise.' *TP*, 1912, **13**, 291. (Comment by H. Bosmans, *RQS*, 1912, **72**, 654.)

van Hée, L. (3). 'Les Cent Volailles, ou l'Analyse Indéterminée en Chine.' *TP*, 1913, 14, 203, 435.

van Hée, L. (4). 'Li Yeh, Mathématicien Chinois du XIIIe siècle.' *TP*, 1913, **14**, 537.

van Hée, L. (5). (*a*) 'Bibliotheca Mathematica Sinensis Pé-Fou.' *TP*, 1914, 15, 111. (*b*) 'Le Grand Trésor des Mathematiques Chinoises.' *A*, 1926, 18. (*c*) 'The Great Treasure-House of Chinese Mathematics.' *AMM*, 1926, 117.

van Hée, L. (6). 'Première Mention des Logarithmes en Chine.' *TP*, 1914, **15**, 454.

van Hée, L. (7). 'Le *Hai Tao Suan Ching* de Lieou.' *TP*, 1920, **20**, 51.

van Hée, L. (8) (tr.). 'Le Classique de l'Ile Maritime, ouvrage chinois du III^e Siècle.' *QSGM/B*, 1932, **2**, 255.

van Hée, L. (9). 'La Notation Algébrique en Chine au XIII^e Siècle.' *RQS*, 1913 (3^e sér.), **24**, 574.

van Hée, L. (10). 'The *Chhou Jen Chuan* of Juan Yuan (+1764 to +1849).' *ISIS*, 1926, **8**, 103. (Crit. Y. Mikami (4), (5).)

van Hée, L. (11). 'The Arithmetical Classic of Hsiahou Yang.' *AMM*, 1924, **31**, 235.

van Hée, L. (12). 'Le Précieux Miroir des Quatre Eléments.' *AM*, 1932, **7**, 242.

van Hée, L. (13). 'Algèbre Chinoise' (note on Shen Kua and Kuo Shou-Ching). *ISIS*, 1937, **27**, 321.

van Hée, L. (14). 'Euclide en Chinois et Mandchou.' *ISIS*, 1939, **30**, 84.

van Hée, L. (15). 'Le Zéro en Chine.' *TP*, 1914, **15**, 182.

van Hée, L. (16). 'Les Séries en Extrême-Orient.' *A*, 1930, **12**, 18.

Heiberg, J. L. (1). 'Geschichte d. Mathematik u. Naturwissenschaften im Altertum.' Art. in *Handbuch d. Altertumswissenschaft*, vol. **5** (1), 2, Beck, München, 1925.

Hessen, B. (1). 'The Social and Economic Roots of Newton's *Principia*.' In *Science at the Cross-Roads*. Papers read to the 2nd International Congress of the History of Science and Technology. Kniga, London, 1931.

Hitti, P. K. (1). *History of the Arabs*. 4th ed. Macmillan, London, 1949.

Hoche, R. (1) (ed.). *The 'Eisagoge Arithmetike'* (εισαγωγη αριθμτικη) *of Nicomachus of Gerasa*. Teubner, Leipzig, 1866.

Hodous, L. (1). *Folkways in China*. Probsthain, London, 1929.

Hogben, L. (1). *Mathematics for the Million*. Allen & Unwin, London, 1936. 2nd ed. 1937.

Hopkins, L. C. (6). 'Pictographic Reconnaissances. II.' *JRAS*, 1918, 387.

Hopkins, L. C. (11). 'Pictographic Reconnaissances. VII.' *JRAS*, 1926, 461.

Hopkins, L. C. (12). 'Pictographic Reconnaissances. VIII.' *JRAS*, 1927,

Hopkins, L. C. (14). 'Archaic Chinese Characters. I.' *JRAS*, 1937, 27.

769.

Hopkins, L. C. (19). 'The Human Figure in Archaic Chinese Writing; a Study in Attitudes.' *JRAS*, 1929, 557.

Hopkins, L. C. (26). 'Where the Rainbow Ends.' *JRAS*, 1931, 603.

Hopkins, L. C. (27). 'Archaic Sons and Grandsons; a Study of a Chinese Complication Complex.' *JRAS*, 1934, 57.

Hopkins, L. C. (35). 'The Chinese Numerals and their Notational Systems.' *JRAS*, 1916, 35, 737

Horner, W. G. (1). 'A New Method of Solving Numerical Equations of all Orders by Continuous Approximation.' *PTRS*, 1819, **109**, 308.

Houtsma, M. T. (1) (ed.). *Arabic text of 'Kitāb al-Buldān' [Book of the Countries] by Ahmad idn Abi Ya'qūb al-'Abbāsi* (+892). 2 vols. Leiden, 1883.

Howorth, Sir Henry H. (1). *History of the Mongols.* 3 vols., Longmans Green, London, 1876—1927.

Hu Shih (5). 'A Note on Chhüan Tsu-Wang, Chao I-Chhing and Tai Chen; a Study of Independent Convergence in Research as illustrated in their works on the *Shui Ching Chu.*' In Hummel (2), p. 970.

Huard, P. (1). 'La Science et l'Extrême-Orient' (mimeographed). Ecole Française d'Extr. Or., Hanoi, n.d. (1950). (Cours et Conférences de l'Ec. Fr. d'Extr. Or. 1948–9.) This paper, though admirable in choice of subjects and intention, was written in difficult circumstances; it contains many serious mistakes and must be used with circumspection (rev. Gauchet, *A/AIHS*, 1951, 4, 487).

Huard, P. (2). 'Sciences et Techniques de l'Eurasie.' *BSEIC*, 1950, 25 (no. 2), 1. This paper, though correcting a number of errors in Huard (1), still contains many mistakes and should be used only with care; nevertheless it is valuable on account of several original points.

Hubaux, J. & Leroy, M. (1). *Le Mythe du Phénix dans les Littératures Grecque et Latine.* Liège, 1939.

Hubson, G. F. (1). *Europe and China; A Survey of their Relations from the Earliest Times to 1800.* Arnold, London, 1931.

Hughes, E. R. (1). *Chinese Philosophy in Classical Times.* Dent, London, 1942. (Everyman Library, no. 973.)

Hughes, E. R. (7) (tr.). *The Art of Letters. Lu Chi's 'Wên Fu', a.d. 302; a Translation and Comparative Study.* Pantheon, New York, 1951. (Bollingen Series, no. 29.)

Hughes, E. R. (8). 'The Ideational Psychology of Chang Hêng's *Ssu Hsüan Fu.*' Lecture to the Far Eastern Association, Philadelphia, 1951. Unpub. typescript.

Hummel, A. W. (1). 'Phonetics and the Scientific Method.' *ARLC/DO*, 1940, 169.

Hummel, A. W. (2) (ed.). *Eminent Chinese of the Chhing Period.* 2 vols. Library of Congress, Washington, 1944.

Hutchinson, A. B. (1) (tr.). 'The Family Sayings of Confucius.' *CRR*, **9**, 445; **10**, 17, 96, 175, 253, 329, 428.

Jastrow, M. (2). *Religion of Babylonia and Assyria.* Boston, 1898. *Die Religion Babyloniens und Assyriens.* Giessen, 1905.

Jeans, J. H. (1). 'The Converse of Fermat's Theorem.' *MMT*, 1897, **27**, 174.

Johnson, M. C. (2). *Art and Scientific Thought; Historical Studies towards a Modern Revision of their Antagonism.* Faber & Faber, London, 1944. (Reprints Johnson (1), pp. 95—109.)

Kalyanov, V. (1). 'Dating the *Arthaśāstra.*' Papers presented by the Soviet Delegation at the 23rd International Congress of Orientalists, Cambridge, 1954. (Indian Studies, pp. 25, 40, Russian with English abridgement.).

Kari-Niyazov, T. N. (1). (Member of the Uzbek Academy of Sciences). *Astronomicheskaia Shkola Ulugbeka* (The Astronomical School of Ulūgh Beg). Acad. Sci. Moscow, 1950 (in Russian).

Karlgren, B. (1). *Grammata Serica; Script and Phonetics in Chinese and Sino-Japanese. BMFEA*, 1940, 12, 1. (Photographically reproduced as separate volume, Peking, 1941.)

Karlgren, B. (8). 'On the Authenticity and Nature of the *Tso Chuan.*' *GHA*, 1926, **32**, no. 3. (Crit. H. Maspero, *JA*, 1928, **212**, 159).

Karlgren, B. (9). 'Some Fecundity Symbols in Ancient China.' *BMFEA*, 1930, **2**, 1.

Karlgren, B. (11). 'Glosses on the Book of Documents'[*Shu Ching*]. *BMFEA*, 1948, **20**, 39.

Karlgren, B. (12) (tr.). 'The Book of Documents' (*Shu Ching*). *BMFEA*, 1950, **22**, 1.

Karlgren, B. (14). (tr.). *The Book of Odes; Chinese Text, Transcription and Translation.* Museum of Far Eastern Antiquities, Stockholm, 1950. (A reprint of the translation only from his papers in *BMFEA*, **16** and **17**.)

Karlgren, B. (16). *Analytical Dictionary of Chinese and Sino-Japanese.* Geuthner, Paris, 1923.

Karpinski, L. C. (1) (tr.). *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khwārizmī, with an Introduction, Critical Notes, and an English Version.* Univ. of Michigan Studies, New York, 1915.

Karpinski, L. C. (2). *History of Arithmetic.* Rand & McNally, New

York, 1925.

Karpinski, L. C. (3). 'The Unity of Hindu Contributions to Mathematics.' *SCI*, 1928, 381.

Kaye, G. R. (1). 'Notes on Indian Mathematics—Arithmetical Notation.' *JRAS/B*, 1907 (n.s.), **3**, 475.

Kaye, G. R. (2). 'The Use of the Abacus in Ancient India.' *JRAS/B*, **4**, 293.

Kaye, G. R. (3). *Indian Mathematics.* Thacker & Spink, Calcutta, 1915.

Keith, A. Berriedale (5). *The Religion and Philosophy of the Vedas.* 2 vols. Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), 1925. (Harvard Oriental Series, nos. 31, 32.)

Keith, A. Berriedale (6) (tr.). *The Veda of the Black Yajus School entitled 'Taittirīya Saṃhitā'.* 2 vols. Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), 1914. (Harvard Oriental Series, nos. 18, 19.)

Kennedy, J. (2). 'The Gospels of the Infancy, the *Lalita Vistara*, and the *Vishnu Purana* or the Transmission of Religious Ideas between India and the West.' *JRAS*, 1917, 209, 469.

Keyes, C. W. (2) (tr.). *Cicero's 'De Re Publica'* (contains in Bk. vi the *Somnium Scipionis*). Loeb Cl. Library, New York, 1928.

Khanikov, N. (1). 'Analysis and Extracts of *al-Kitāb Mīzān al-Hikma* (Book of the Balance of Wisdom), an Arabic work on the Water-Balance, written by al-Khāzinī in the +12th century.' *JAOS*, 1860, **6**, 1.

al-Khwārizmī, Abū Abdallāh Muḥammad Ibn Mūsā (+9th century). *Ḥisāb al-Jabr wa-l-Muqābalah* [Calculation of Integration and Equation]. See Karpinski (1).

al-Khwārizmī, Muḥammad ibn-Aḥmad (+10th century). *Mufātīḥ al-'Ulūm* [Keys of the Sciences]. See van Vloten (1).

Kiang Chao-Yuan. See Chiang Shao-Yuan.

Kirfel, W. (1). *Die Kosmographie der Indernach d. Quellen dargestellt.* Bonn & Leipzig, 1920.

Kirfel, W. (2). *Der Rosenkranz* (on the history of the Rosary). Walldorf, Hessen, 1949.

Klebs, L. (1). 'Die Reliefs des alten Reiches (2980—2475 v. Chr.); Material zur ägyptischen kultur geschichte.' *AHAW/PH*, 1915, no. 3.

Klebs, L. (2). 'Die Reliefs und Malereien des Mittleren Reiches (7-17. Dynastie, *c.*2475—1580v.Chr.); Material zur ägyptischen Kulturgeschichte.' *AHAW/PH*, 1922, no. 6.

Klebs, L. (3). 'Die Reliefs und Malereien des neuen Reiches (18—20. Dynastie,*c.*1580—1100v.Chr.); Material zur ägyptischen Kulturgeschichte.' Pt. I. 'Szenen aus dem Leben des Volkes.' *AHAW/PH*, 1934, no. 9.

Kleinwachter, G. (1). 'Origin of the "Hindu" Numerals.' *CR*, 1883, **11**, 379; **12**, 25.

Knott, C. G. (1). 'The Abacus in its Historic and Scientific Aspects.' *TASJ*, 1886, **14**, 18.

Konantz, E. L. (1). 'The Precious Mirror of the Four Elements.' *CJ*, 1924, **2**, 304.

Kojima Takashi (1). *The Japanese Abacus, its Use and Theory*. Tuttle, Tokyo, 1954.

Kosibowicz, E. (1). 'Un Missionaire Polonais Oublié, le Pè're Jean Nicolas Smogutçeki S. J., missionaire en Chine au XVII^{e} Siècle.' RHM, 1929, **6**, I.

Koyré, A. (1). 'The Significance of the Newtonian Synthesis.' *A/AIHS*, 1950, **29**, 291.

Koyré, A. (2). *Etudes Galiléennes*. 3 vols. Vol. 1. *A l'Aube de la Science Classique* (i.e. Newtonian). Vol. 2. *La Loi de la Chute des Corps; Descartes et Galilée*. Vol. 3. *Galilée et la Loi d'Inertie*. Herrmann, Paris, 1939. (*ASI*, nos. 852–4.)

Koyré, A. (3). 'Galileo and the Scientific Revolution of the Seventeenth Century.' *PHR*, 1943, **52**, 333.

Koyré, A. (4). 'Galileo and Plato.' *JHI*, 1943, **4**, 424.

Kroeber, A. L. (1). *Anthropology*. Harcourt Brace, New York, 1948.

Ku Hung-Ming (1) (tr.). *The Discourses and Sayings of Confucius*. Kelly & Walsh, Shanghai, 1898.

Ku Pao-Ku (1). *Deux Sophistes Chinois; Houei Che* [*Hui Shih*] *et Kong-souen Long* [*Kungsun Lung*]. Presses Univ. de France (Imp. Nat.), Paris, 1953. (Biblioth. de l'Institut des hautes Etudes Chinoises, no. 8). Crit. P. Demiéville, *TP*, 1954, **43**, 108.

Kubitschek, W. (1). 'On the Salamis abacus.' WNZ, 1899, **31**, 393.

Kühn, K. G. (1) (tr.). *Galen 'Opera'*. 20 Vols. Leiozig, 1821—33. Medicorum Graecorum Opera quae exstant, nos. 1–20.)

Kuo Mai-Ying (1). 'How to use the Chinese Abacus or *Suan-Phan*.' *NCR*, 1921, **3**, 127, 309.

Kyeser, Konrad (1). *Bellifortis* [Handbook of Military Engineering]. MSS. Cod. Phil. 63 Göttingen Univ. 1405; Donaueschingen, 1410. (See Sarton (1), vol. 3, p. 1550.)

de Lacouperie, Terrien (2). 'The Old Numerals, the Counting-Rods, and the *Swan-Pan* in China.' *NC*, 1883 (3rd ser.), **3**, 297.

de Lacouperie, Terrien (4). *Catalogue of Chinese Coins from the 7th cent. b.c. to a.d. 621 including the series in the British Museum*, ed. R. S. Poole. British Museum, London, 1892.

Lattin, H. P. (1). 'The Eleventh Century MS. Munich 14436: its Contribution to the History of Coordinates, of Logic, and of German Studies in France.' *ISIS*, 1948, **38**, 205.

Lattin, H. P. (2). 'The Origin of our Present System of Notation according to the theories of Nicholas Bubnov.' *ISIS*, 1933, **19**, 181.

Laufer, B. (8). *Jade; a Study in Chinese Archaeology and Religion. FMNHP/AS*, 1912. Repub. in book form, Perkins, Westwood and Hawley, South Pasadena, 1946 (rev. P. Pelliot, *TP*, 1912, **13**, 434).

Leavens, D. H. (1). 'The Chinese Suan-Phan.' *AMM*, 1920, **27**, 180.

Lecat, M. (1). *Histoire de la Théorie des Déterminants à plusieurs Dimensions.* Ghent, 1911.

Lecomte, Louis (1). *Nouveaux Mémoires sur l'Etat présent de la Chine.* Anisson, Paris, 1696. (Eng. tr. *Memoirs and Observations Topographical, Physical, Mathematical, Mechanical, Natural, Civil and Ecclesiastical, made in a late journey through the Empire of China, and published in several letters, particularly upon the Chinese Pottery and Varnishing, the Silk and other Manufactures, the Pearl Fishing, the History of Plants and Animals, etc. translated from the Paris edition, etc.*, 2nd ed. London, 1698. Germ. tr. Frankfurt, 1699—1700.)

Legge, J. (1) (tr.). *The Texts of Confucianism, translated*: Pt. I. *The 'Shu Ching', the religious portions of the 'Shih Ching', the 'Hsiao Ching'.* Oxford, 1879. (*SBE*, no. 3; reprinted in various eds. Com. Press, Shanghai.) For the full version of the *Shu Ching* see Legge (10).

Legge, J. (2) (tr.). *The Chinese Classics, etc.*: Vol. 1. *Confucian Analects, The Great Learning, and the Doctrine of the Mean.* Legge, Hongkong, 1861; Trübner, London, 1861.

Legge, J. (3) (tr.). *The Chinese Classics, etc.*: Vol. 2. *The Works of Mencius.* Legge, Hongkong, 1861; Trübner, London, 1861.

Legge, J. (4) (tr.). *A Record of Buddhistic Kingdoms; an account by the Chinese monk Fa-Hsien of his travels in India and Ceylon (+399 to +414) in search of the Buddhist books of discipline.* Oxford, 1886.

Legge, J. (5) (tr.). *The Texts of Taoism.* (Contains (*a*) *Tao Tê Ching*, (*b*) *Chuang Tzu*, (*c*) *Thai Shang Kan Ying Phien*, (*d*) *Chhing Ching Ching*, (*e*) *Yin Fu Ching*, (*f*) *Jih Yung Ching.*) 2 vols. Oxford, 1891; photolitho reprint, 1927. (*SBE*, nos. 39 and 40.)

Legge, J. (7) (tr.). *The Texts of Confucianism*: Pt. III. *The 'Li Chi'.* 2 vols. Oxford, 1885; repr. 1926. (*SBE*, nos. 27 and 28.)

Legge, J. (8) (tr.). *The Chinese Classics, etc.*: Vol. 4, Pts. 1 and 2.

'Shih Ching'; The Book of Poetry. 1. The First Part of the *Shih Ching*; on the Lessons from the States; and the Prolegomena. 2. The Second, Third and Fourth Parts of the *Shih Ching*; or the Minor Odes of the Kingdom, the Greater Odes of the Kingdom, the Sacrificial Odes and Praise-Songs; and the Indexes. Lane Crawford, Hongkong, 1871; Trübner, London, 1871. Repr., without notes, Com. Press, Shanghai, n.d.

Legge, J. (9) (tr.). *The Texts of Confucianism*: Pt. II. *The 'Yi King'* [*I Ching*]. Oxford, 1882, 1899. (*SBE*, no. 16.)

Legge, J. (10) (tr.). *The Chinese Classics, etc.*: Vol. 3, Pts. 1 and 2. *The 'Shoo King'* [*Shu Ching*]. Legge, Hongkong, 1865; Trübner, London. 1865.

Legge, J. (11) (tr.). *The Chinese Classics, etc.*: Vol. 5, Pts. 1 and 2. *The 'Ch'un Ts'eu' with the 'Tso Chuen'* (*Chhun Chhiu* and *Tso Chuan*). Lane Crawford, Hongkong, 1872; Trübner, London, 1872.

Leupold, J. (2). *Theatrum Arithmetico-Geometricum.* Breitkopf, Leipzig. 1774.

Lévi, S. (1). 'Les Missions de Wang Hiuen-Ts'e [Wang Hsüan-Tshê] dans l'Inde.' *JA*, 1900 (9e sér.), 15, 297, 401.

Levi Della Vida, G. (1). 'Appunti e Quesiti di Storia Letteraria Arabe (4. Due Nuove Opere del Matematico al-Karajī).' *RSO*, 1934, 14, 249.

Levy, H. (1). *Modern Science; a Study of Physical Science in the World Today.* Hamilton, London, 1939.

Leybourn, W. (1). *The Art of Numbring by Speaking-Rods; Vulgarly Termed Nepeir's Bones.* London, 1667.

Li Chi (1). 'Chinese Archaeology.' Art. in *Symposium on Chinese Culture*, ed. Sophia Zen. IPR, Shanghai, 1931, pp. 184 ff.

Li Chi (2). *The Formation of the Chinese People; an Anthropological Enquiry.* Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1928.

Li Nien (1). 'The Interpolation Formulae of Early Chinese Mathematicians.' *Proc. VIIIth International Congress of the History of Science, Florence* 1956.

Li Nien (2). 'Tsu Chhung-Chih, great mathematician of ancient China.' *PC*, 1956 (no. 24), 34.

Libri-Carrucci, G. B. I. T. (1). *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie depuis la Renaissance des Lettres jusqu' à la Fin du 17ème Siècle.* 4 vols Renouard, Paris, 1838—40.

Lilley, S. (1). 'Mathematical Machines.' *N*, 1942, 149, 462; *D*, 1945, 6, 150, 182; 1947, 8, 24.

Lilley, S. (4). 'Cause and Effect in the History of Science.' *CEN*, 1953,

3, 58.

Lin Yü-Thang (1) (tr.). *The Wisdom of Lao Tzu* [and Chuang Tzu] *translated, edited and with an introduction and notes.* Random House, New York, 1948.

Liu Chao-Yang (1). 'On the Observabilities of *α* Scorpii in the Three Dynasties' (heliacal rising of Antares). *SSE*, 1942, **3**, 21. (Crit. W. Eberhard, *OE*, 1949, **2**, 184; A. Rygalov, *HH*, 1949, **2**, 416.)

Loewenstein, P. J. (1). 'Swastika and Yin-Yang.' *China Society Occasional Papers* (n.s.), no. 1, China Society, London, 1942.

van Lohuizen De Leeuw, J. E. (1). *The 'Scythian' Period; an Approach to the History, Art, Epigraphy and Palaeography of North India from the 1st century B.C. to the 3rd century A.D.* Brill, Leiden, 1949.

Lones, T. E. (1). *Aristotle's Researches in Natural Science.* London, 1912.

Loria, G. (1). *Storia delle Matematiche dall' Alba della Civiltà al Secolo XIX.* 3 vols. ('L'Enigma Cinese' is in vol. 1, p. 261.) Sten, Torino, 1929. (New edition Hoepli, Milano, 1950.)

Loria, G. (2). (*a*) 'Che cosa debbono le Matematiche ai Cinesi.' *Bollettino della Mathesis*, 1920, **12**, 63. (*b*) 'Documenti Relativi all' Antica Matematica dei Cinesi.' *A*, 1922, **3**, 141.

Loria, G. (3). 'Chinese Mathematics.' *SM*, 1921, **12**, 517. (Crit. Y. Mikami, *TYG*, 1923, 12, No. 4.)

de la Loubère, S. (1). *A New Historical Relation of the Kingdom of Siam, by Monsieur de la Loubère, Envoy-Extraordinary from the French King to the King of Siam, in the years 1687 and 1688. wherein a full and curious Account is given of the Chinese Way of Arithmetick and Mathematick Learning.* Tr. A. P., Gen[t!] R.S.S. [i.e. F.R.S.]. Horne Saunders & Bennet, London, 1693 (from the Fr. ed. Paris, 1691).

Luckey, P. (1). *Die Rechenkunst bei Ǧamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī [Jamshid ibn Mas'ūd al-Kāshi] mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens.* Steiner, Wiesbaden, 1951 (Abhdl. f. die Kunde des Morgenlandes, no. 31, i). A study of the *Miftāḥ al-Ḥisāb* (Key of Computation), *c.* +1427. Cf. Rosenfeld & Yushkevitch (1).

Luckey, P. (2). *Der Lehrbrief ü. d. Kreisumfang von Čamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī [Jamshid ibn Mas'ūd al-Kāshī]*.Berlin, 1953. A study of the *Risālat al-Moḥīṭīje* (Treatise on the Circumference), *c.* +1427. Cf. Rosenfeld & Yushkevitch (1).

Luckey, P. (3). 'Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters.' *FF*, 1948, **24**(nos. 17—18), 199.

Luckey, P. (4). 'Ausziehung des *n*-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik.' *MAN*, 1948, **120**, 217.

Luckey, P. (5). 'Beiträge z. Erforschung d. islamischen Mathematik.' *ORE*, 1948, **17**.

Luria, S. (1). 'Die Infinitesimal-Theorie der antiken Atomisten.' *QSGM/A*, 1932, **2**, 106.

McGovern, W. M. (2). *Manual of Buddhist Philosophy; I, Cosmology* (no more published). Kegan Paul, London, 1923.

McKeon, R (1). 'Aristotle's Conception of the Development and Nature of Scientific Method.' *JHI*, 1947, **8**, 3.

Ma, C. C. (1). 'On the Origin of the Term Root in Chinese Mathematics.' *AMM*, 1928, **35**, 29.

Ma Hêng (1). *The Fifteen Different Classes of Measures as given in the 'Lü Li Chih' of the 'Sui Shu'*, tr. J. C. Ferguson. Privately printed, Peiping, 1932. (Ref. W. Eberhard, *OAZ*, 1933, **9**(19), 189.)

Magalhaens, Gabriel (1). *A New History of China, containing a Description of the Most Considerable Particulars of that Vast Empire*. Newborough, London, 1688.

Mahdihassan, S. (1). 'Cultural Words of Chinese Origin; Monsoon.' *CS*, 1949, **18**, 347.

Mahdihassan, S. (2). 'Cultural Words of Chinese Origin' [*firoza* (Pers.) =turquoise, *yashb* (Ar.)=jade, *chamcha* (Pers.)=spoon, *top* (Pers., Tk., Hind.)=cannon, *silafchi* (Tk.)=metal basin]. *BV*, 1950, **11**, 31.

Mahdihassan, S. (3). 'Ten Cultural Words of Chinese Origin' [*huqqa* ,Tk.), *qaliyan* (Tk.)=tobaccopipe, *sunduq* (Ar.)=box, piali (Pers), *findjan* (Ar.)=cup, *jaushan* (Ar.)=armlet, *safa* (Ar.)=turban, *qasai*, *quasab* (Hind.)=butcher, *Kah-Kashan* (Pers.)=Milky Way, *tugra* (Tk.)=seal]. *JUB*, 1949, **18**, 110.

Mahdihassan, S. (4). 'The Chinese Names of Ceylon and their Derivatives.' *JUB*, 1950, **19**, 80.

Mair, G. R. (1) (tr.). *The 'Phaenomena' of Aratus* (Loeb Classics). Heinemann, London, 1921.

Malynes, G. (1). *Consuetudo, vel Lex Mercatoria; or, The Antient Law-Merchant. London*, 1662.

Mao TsêTung (1). *On Practice* (Orig. Supplement to *People's China*). Peking, 1951.

al-Maqqarî, ibn-Muḥammad al-Tilimsanî (1). *Nafḥ al-Ṭīb, etc.* [Breath of Perfumes from the Boughs of Andalusia]. (History of the scholars of Muslim Spain.) Ed. Dozy *et al.*, Leiden, 1855 to 1861.

Marakuev, A. V. (1). *Weights and Measures in China* (in Russian). Vladivostok, 1930. (Summary by P. Pelliot, *TP*, 1932, **29**, 219).

Marakuev, A. V. (2). *The Development of Mathematics in China and Japan* (in Russian). Vladivostok, 1930. (Summary by E. Gaspardone, *BEFEO*, 1932, **32**, 552.)

March, B. (3). *Some Technical Terms of Chinese Painting.* Amer. Council of Learned Societies, Waverly, Baltimore, 1935. (ACLS Studies in Chinese and Related Civilisations, no. 2.)

Margouliès, G. (3). *Anthologie raisonnée de la Littérature Chinoise.* Payot, Paris, 1948.

Martini, M. (1). *Sinicae Historiae Decas Prima.* Munich, 1658; Amsterdam, 1659. (French tr. Paris, 1667.)

Martini, M. (2). *Novus Atlas Sinensis.* 1655. (See Schrameier (1) and Szczesniak (4).)

Maspero, H. (4). 'Les Instruments Astronomiques des Chinois au temps des Han.' *MCB*, 1939, **6**, 183.

Maspero, H. (5). 'Le Songe et l'Ambassade de l'Empereur Ming.' *BEFEO*, 1910, **10**, 95, 629.

Maspero, H. (8). 'Légendes Mythologiques dans le *Chou King* [*Shu Ching*].' *JA*, 1924, **204**, 1.

Maspero, H. (14). *Etudes Historiques; Mélanges Posthumes sur les Religions et l'Histoire de la Chine*, vol. 111, ed. P. Demiéville. Civilisations du Sud, Paris, 1950. (Publ. du Mus. Guimet, Biblioth. de Diffusion, no. 59), rev. J. J. L. Duyvendak, *TP*, 1951, **40**, 366.

Maspero, H. (25). 'Le *Ming-Thang* et la Crise Religieuse Chinoise avant les Han.' *MCB*, 1951, **9**, 1.

Matthiessen, L. (1). 'Zur Algebra der Chinesen' (extract from a letter to Cantor correcting a mistake made by Biernatzki in translating Wylie; concerning the indeterminate analysis of Sun Tzu). *ZMP*, 1876, **19**, 270; *ZMNWU*, 1876, **7**, 73.

Matthiessen, L. (2) 'Über das sogenannte Restproblem in den chinesischen Werken *Swan-King* von Sun-Tsze u. *Tayen Lei Schu* von Yih-Hing.' *JRAM*, 1881, **91**, 254.

Matthiessen, L. (3). 'Vergleichung der indischen Cuttaca und der chinesischen Tayen-Regel, unbestimmte Gleichungen und Congruenzen ersten Grades aufzulösen.' Verhandlungen d. 30sten Versammlung deutscher Philologen u. Schulmänner, in Rostock, 1875, p. 125. Teubner, Leipzig, 1876.

Matthiessen, L. (4). 'Die Methode Tá jàn (Ta Yen) im *Suán-King* von Sun-tsè und ihre Verallgemeinerung durch Yih-Hing im I. Abschnitte des *Tá jàn li schū.*' *ZMP*, 1881, **26** (Hist. Lit. Abt.), 33.

Matthiessen, L. (5). 'Le Problème des restes dans l'Ouvrage chinois *Swan-King* de Sun-tsze et dans l'Ouvrage *Ta-yen-lei-schu* de Yih-hing.' *CRAS*, 1881, 92, 291.

Medhurst, W. H. (1) (tr.). *The 'Shoo King'* [*Shu Ching*], *or Historical*

Classic (Ch. and Eng.). Mission Press, Shanghai, 1846.

Meister, P. W. (1). 'Buddhistische Planetondarstellungen in China.' *OE*, 1954, 1, 1.

de Mendoza, Juan Gonzales (1). *Historia de las Cosas mas notables, Ritos y Costumbres del Gran Reyno de la China, sabidas assi por los libros de los mesmos Chinas, como por relacion de religiosos y oltras personas que an estado en el dicho Reyno.* Rome, 1585 (in Spanish). Eng. tr. Robert Parke, 1588 (1589), *The Historie of the Great & Mightie Kingdome of China and the Situation thereof; Togither with the Great Riches, Huge Citties, Politike Gouvernement and Rare Inventions in the same* [undertaken 'at the earnest request and encouragement of my worshipfull friend Master Richard Hakluyt, late of Oxforde']. Reprinted in Spanish, Medina del Campo, 1595; Antwerp, 1596 and 1655; Ital. tr. Venice (3 editions), 1586; Fr. tr. Paris, 1588, and 1589; Germ. and Latin tr. Frankfurt, 1589, Ed. G. T. Staunton, Hakluyt Soc. Pub. 1853.

Menninger, K. (1). *Zahlwort und Ziffer; aus der Kulturgeschichte unserer Zahlsprache, unserer Zahlschrift und des Rechenbretts.* Hirt, Breslau, 1934.

Merton, R. K. (1). 'Science, Technology and Society in Seventeenth Century England.' *OSIS*, 1938, 4, 360.

Meyer, F. (1). 'Fraunhofer als Mechaniker und Konstrukteur.' NW, 1926, 14, 533.

Michel, H. (11). 'La Mesure du Temps.' *RM*, 1952, no. 3.

Michel, H. (12). *Introduction à l'Etude d'une Collection d'Instruments anciens de Mathématiques.* de Sikke]. Antwerp, 1939.

Michel, H. (13). 'Le Rectangulus de Wallingford, précédé d'une Note sur le Torquetum.' *CET*, 1944, 60 (nos. 11, 12), 1.

Michel, H. (17). 'Sur l'Origine de la Théorie de la Thépidation.' *CET*, 1950 (nos. 9 and 10), 52.

Mieli, Aldo (1). *La Science Arabe, et son Rôle dans l'Evolution Scientifique Mondiale.* Brill, Leiden, 1938.

Mieli, A. (2). *Panorama General de Historia de la Ciencia.* Vol. 1, *El Mundo Antiguo; grieges y romanos.* Vol. 11, *El Mundo Islámico e el Occidente Medieval Cristiano.* Espasa-Calpe, Buenos Aires, 1946. (Nos. 1 and 5 respectively of Colección Historia y Filosofía de la Ciencia, ed. J. Rey Pastor.)

Mikami, Y. (1). *The Development of Mathematics in China and Japan.* Teubner, Leipzig, 1913 (Abhdl. z. Gesch. d. math. Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, no. 30) (rev. H. Bosmans, *RQS*, 1913, 74, 641).

Mikami, Y. (2). 'Notes on Native Japanese Mathematics. I, The Pythagorean Theorem.' *AMP*, 1913 (3rd ser.), **20**, 1; 1914, **22**, 183.

Mikami, Y. (3). 'Arithmetic with Fractions in Old China.' *AMN*, 1911, **32**, no. 3.

Mikami, Y. (4). 'Chinese Mathematics' (reply to van Hée (10) on the *Chhou Jen Chuan*). *ISIS*, 1928, 11, 123. (Japanese version, Mikami (5).)

Mikami, Y. (5). 'A Remark on the Chinese Mathematics in Cantor's *Geschichte d. Mathematik*.' *AMP*, 1909, **15**, 68; 1911, **18**, 209 ('Further Remarks').

Mikami, Y. (6). 'Mathematics in China and Japan.' In *Scientific Japan, Past and Present*, 3rd Pan-Pacific Science Congress Volume, p. 177. Tokyo, 1926.

Mikami, Y. (7). 'Chronological Table of the History of Science in China and Japan, +16th century.' *A*, 1941, **23**, 211.

Mikami, Y. (9). 'Hatono Sōha and the Mathematics of Seki [Takakusn]' (identity of Petrus Hartsingius Japonensis). *NAW*, 1911, 9, 158.

Mikami, Y. (13). 'On Maeno [Ryōtaku's] Description of the Parallelogram of Forces' in the MS. *Honyaku Undō-hō* (c.+1780). *NAW*, 1913, **11**, 76.

Mikami, Y. (16). 'A Chinese Theorem on Geometry.' *AMP*, 1905.

Mikami, Y. (17). 'Zur Frage abendländischer Einflüsse auf die japanische Mathematik am Ende des siebzehnten Jahrhunderts.' *BM*, 1907, 7 (no. 3).

Mikami, Y. (18). 'A Question on Seki's Invention of the "Circle-Principle".' *PTMS*, 1909 (2nd ser.), 4, 442.

Mikami, Y. (19). 'The Circle-Squaring of the Chinese.' *BM*, 1910, **10**.

Mikami, Y. (20). 'The Influence of the Abacus on Chinese and Japanese Mathematics.' *JDMV*, 1911, **20**, 380.

Mikami, Y. (21). 'On the Establishment of the *Yenri* Theory in Old Japanese Mathematics.' *PTMS*, 1932 (3rd ser.), **12**, 43.

Mills, J. V. (1). 'Malaya in the *Wu Pei Chih* Charts.' *JRAS/M*, 1937, **15** (no. 3), 1.

Montucla, J. E. (1). *Histoire des Mathématiques*....4 vols, 1758. 2nd edn. Agasse, Paris, An 7 de la République (1799—1802). (Account of Chinese astronomy in vol. 1, pp. 448–80.)

Moody, E. A. (1). 'Galileo and Avempace [Ibn Bājjah]; the Dynamics of the Leaning Tower Experiment.' *JHI*, 1951, **12**, 163, 375.

de Morgan, A. (1). *Budget of Paradoxes*, vol. 2, p. 66. Open Court, Chicago, 1915.

Morgan, E. (1) (tr.). *Tao the Great Luminant; Essays from Huai Nan*

Tzu, with introductory articles, notes and analyses. Kelly & Walsh, Shanghai, n.d. (1933?).

Morley, S. G. (1). *The Ancient Maya.* Stanford Univ. Press, Palo Alto, California, 1946.

Moule, A. C. (1). *Christians in China before the year 1550.* SPCK, London, 1930.

Muir, Sir T. (1). *The Theory of Determinants in the Historical Order of its Development.* London, 1890. (Many subsequent editions.)

van Musschenbroek, P. (1). *Introductio ad Philosophiam Naturalem.* 2 vols., Luchtmans, Leiden, 1762; Padua, 1768.

Al-Nadīm, Abu'l-Faraj ibn abū Ya'qūb (1). *Fihrist al-'ulūm* [Index of the Sciences], ed. G. Flügel. Leipzig, 1871–2.

Nafis Ahmad. See Ahmad, Nafis.

Nagasawa, K. (1). *Geschichte der Chinesischen Literatur, und ihrer gedanklichen Grundlage.* Transl. from the Japanese by E. Feifel. Fu-jen Univ. Press, Peiping, 1945.

van Name, A. (1). 'On the Abacus of China and Japan.' *JAOS*, 1875, **10**, cx.

Napier, John (of Merchistoun) (1). *Rabdologiae, seu Numerationis per Virgulas Libri Duo: cum Appendice de Expeditissimo Multiplicationis Promptuario; quibus accessit Arithmeticae Localis Liber unus.* Edinburgh, 1617; Leiden, 1626 (trs. Verona, 1623; Berlin, 1623).

Narrien, J. (1). *An Historical Account of the Origin and Progress of Astronomy, with plates illustrating, chiefly, the ancient systems.* Baldwin & Cradock, London, 1833.

Needham, Joseph (29). 'Mathematics and Science in China and the West.' *SS*, 1956, **20**, 320.

Nesselmann, G. H. F. (1). *Die Algebra der Griechen.* Berlin, 1842.

Neuburger, A. (1). *The Technical Arts and Sciences of the Ancients.* Methuen, London, 1930. Tr. H. L. Brose from *Die Technik d. Altertums.* Voigtländer, Leipzig, 1919. (The English version inexcusably omits all the references to the literature.)

Neugebauer, O. (3). 'The Astronomical Origin of the Theory of Conic Sections.' *PAPS*, 1948, **92**, 136.

Neugebauer, O. (4). 'The Study of Wretched Subjects' (a defence of the study of ancient and medieval pseudo-sciences for the unravelling of the threads of the growth of true science, and for the understanding of the mental climate of the early discoveries). *ISIS*, 1951, **42**, 111.

Neugebauer, O. (9). *The Exact Sciences in Antiquity.* Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1952 (Messenger Lectures at Cornell University on mathematics and astronomy in Babylonia, Egypt and Greece) (rev. *ISIS*, 1952, 43, 69).

Neugebauer, O. (12). Essay review of the first two volumes of Renou & Filliozat (1), giving a summary of our knowledge of the passage of Greek geometrical astronomy to Northern India and of Babylonian algebraical astronomy to Southern India. *A/AIHS*, 1955, 8, 166.

Nivison, D. S. (1). 'The Problem of "Knowledge" and "Action" in Chinese Thought since Wang Yang-Ming.' In *Studies in Chinese Thought*, ed. A. F. Wright, *AAN*, 1953, 55 (no. 5), 112 (Amer. Anthropol. Assoc. Memoirs, No. 75).

Nōda, C. (1)=(*1*). *An Enquiry concerning the 'Chou Pei Suan Ching'*. Academy of Oriental Culture, Kyoto Institute, Kyoto, 1933. (Toho Bunka Gakuin Kyoto Kenkyusho Memoirs, no. 3.)

Nōda, C. (2)=(*2*). *An Enquiry concerning the Astronomical Writings contained in the 'Li Chi, Yüeh Ling'*. Academy of Oriental Culture, Kyoto Institute, Kyoto, 1938. (Toho Bunka Gakuin Kyoto Kenkyusho Memoirs, no. 12.)

Noel, Francis [František], S.J. (1). *Observationes Mathematicae et Physicae in India et China factae a Patre Francisco Noel SJ ab anno 1684, usque ad annum 1708*. Universtity Press, Prague, 1710. Cf. Slouka, pp. 161 ff. Pp. 56 ff. ' Varia ad Astronomiam Sinicam Spectantia': (*a*) the Stems and Branches, (*b*) diagram of a sexagenary cycle from +1684 to +1744, (*c*) list of 28 *hsiu*, (*d*) list of 24 *chieh chhi*, (*e*) rough correlation of star-catalogue arranged by zodiacal signs with Chinese stargroup names, (*f*) discussion of Chinese metrology. The Royal Astronomical Society copy contains copious annotations, especially of Chinese characters, inserted by John Williams.

Noel, Francis (2). *Philosophia Sinica; Tribus Tractatibus primo cognitionem primi Entis Secundo Ceremonias erga Defunctos tertio Ethicam juxta Sinarum mentem complectens*. Univ. Press, Prague, 1711. (Cf. Pinot (2), p. 116.)

Noel, Francis (3). *Sinensis Imperii Libri Classici Sex, nimirum Adultorum Schola* [Ta Hsüeh], *Immutabile Medium* [Chung Yung]. *liber Sententiarum* [Lun Yü], *Mencius, Filialis Observantia* [Hsiao Ching], *Parvulorum Schola* [San Tzu Ching?] *e Sinico Idiomate in Latinum traducti*....Univ. Press, Prague, 1711.

Nordenskiöld, A. E. (1). *Periplus; an Essay on the Early History of Charts and Sailing Directions*, tr. F. A. Bather. Stockholm, 1897.

Nordenskiöld, E. (1). 'Le Quipu Péruvien du Musée du Trocadéro.' *TMB*, 1931 (no. 1), 16.

Nowotny, K. A. (1). 'The Construction of Certain Seals and Characters in the Work of Agrippa of Nottesheim.' *JWCI*, 1949, **12**, 46.

Al-Nuwairī, Ahmad ibn-Abd Al-Wahhab (1). *Nthayat al-arab fi funun al-adab* (Aim of the Intelligent in the Arts of Letters), ed. Ahmad Zaki pasha. Cairo, 1923—.

d'Ohsson, Mouradja (1). *Histoire des Mongols depuis Tchinguiz Khan jusqu'à Timour Bey ou Tamerlan.* 4 vols. van Cleef, The Hagae and Amsterdam, 1834–52.

Oldenberg, H. (2). 'Nakshatra und Sieou.' *NGWG/PH*, 1909, 544.

Olschki, L. (2). *Galilei und seine Zeit.* Halle, 1927.

Olschki, L. (3). 'Galileo's Philosophy of Science.' *PHR*, 1943, **52**, 349.

Olschki, L. (4). *Guillaume Boucher; a French Artist at the Court of the Khans.* Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, 1946 (rev. H. Franke, *OR*, 1950, **3**, 135).

d'Ooge, M. L., Robbins, F. E. & Karpinski, L. C. (1) (tr.). *Nicomachus of Gerasa; 'Introduction to Arithmetic', translated into English, with Studies in Greek Arithmetic.* Macmillan, New York, 1926. (Univ. of Michigan Studies, Humanistic Series, no. 16.)

Ozanam, M. (1). *Recreations in Mathematics and Natural Philosophy....* Enlarged by M. Montucla. Eng. tr. C. Hutton. 4 vols. Kearsley, London, 1803. From *Récréations Mathématiques et Physiques.* Paris, 1694. (For bibliogr. see Rouse Ball, 2.)

Papinot, E. (1). *Historical and Geographical Dictionary of Japan.* Overbeck, Ann Arbor, Mich. 1948. Lithoprinted from original ed. Kelly & Walsh, Yokohama, 1910. Eng. tr. of *Dictionnaire d'Histoire et de Géographie du Japon.* Sanseido, Tokyo; Kelly & Walsh, Yokohama, 1906.

Pascal, Blaise (1). *Traité du Triangle Arithmétique* (1654). Pub. posthumously, Paris, 1665.

Perleberg, M. (1) (tr.). *The Works of Kungsun Lung Tzu, with a Translation from the parallel Chinese original text, critical and exegetical notes, punctuation and literal translation, the Chinese commentary, prolegomena and Index.* Privately printed. Hongkong, 1952. (Crit. J. J. L. Duyvendak, *TP*, 1954, **42**, 383.)

Pernice, E. (1). *Galeni de ponderibus et mensuris Testimonia.* Bonn, 1888.

Petrucci, R. (1). 'Sur l'Algèbre Chinoise.' *TP*, 1912, **13**, 559.

Petrucci, R. (3) (tr.). *Encyclopédie de la Peinture Chinoise* [the *Chieh Tzu Yuan Hua Chuan*]. Laurens, Paris, 1918.

Pfizmaier, A. (34) (tr.). 'Die Feldherren Han Sin, Pêng Yue, und

King Pu' (Han Hsin, Phêng Yüeh and Ching Pu). *SWAW/PH,* 1860, **34**, 371, 411, 418. Tr. *Shih Chi,* chs. 90 (in part), 91, 92, *Chhien Han Shu,* ch. 34; not in Chavannes (1).

Pfizmaier, A. (39) (tr.). 'Die Könige von Hoai Nan aus dem Hause Han' (Huai Nan Tzu). *SWAW/PH,* 1862, **39**, 575. Tr. *Chhien Han Shu,* ch. 44.

Pfizmaier, A. (43) (tr.). 'Die Geschichte einer Gesandtschaft bei den Hiung-Nu's' (Su Wu). *SWAW/PH,* 1863, **44**, 581. Tr. *Chhien Han Shu,* ch. 54 (second part).

Pfizmaier, A (64) (tr.). 'Die fremdländischen Reiche zu den Zeiten d. Sui.' *SWAW/PH,* 1881, **97**, 411, 418, 422, 429, 444, 477, 483. Tr. *Sui Shu,* chs. 64, 81, 82, 83, 84.

Pfizmaier, A. (67) (tr.). 'Seltsamkeiten aus den Zeiten d. Thang' I and II. I, *SWAW/PH,* 1879, **94**, 7, 11, 19. II, *SWAW/PH,* 1881, **96**, 293. Tr. *Hsin Thang Shu,* chs. 34–6 (Wu Hsing Chih), 88, 89.

Pfizmaier, A. (70) (tr.). 'Über einige chinesische Schriftwerke des siebenten und achten Jahrhunderts n. Chr.' *SWAW/PH,* 1879, **93**, 127, 159. Tr. *Hsin Thang Shu,* chs. 57, 59 (in part: I Wên Chih including agriculture, astronomy, mathematics, war, five-element theory).

Pfizmaier, A. (83) (tr.). 'Das *Li Sao* und die Neun Gesänge.' *DWAW/PH,* 1851, **3**, 159, 175.

Pfizmaier, A. (92) (tr.). 'Kunstfertigkeiten u. Künste d. alten Chinesen.' *SWAW/PH,* 1871, **69**, 147, 164, 178, 202, 208. Tr. *Thai-Phing Yü Lan,* chs. 736, 737 (magic), 750, 751 (painting) and 752 (inventions and automata).

Pfizmaier, A. (94) (tr.). 'Beiträge z. Geschichte d. Perlen.' *SWAW/PH,* 1867, **57**, 617, 629. Tr. *Thai-Phing Yü Lan,* chs. 802 (in part), 803.

Pinot, V. (1). *La Chine et la Formation de l'Esprit Philosophique en France (1640—1740).* Geuthner, Paris, 1932.

Pinot, V. (2). *Documents inédits relatifs à la Connaissance de la Chine en France de 1685 à 1740* Geuthner, Paris, 1932.

Planchet, J. M. (1). 'La Mission de Pékin.' *BCP,* 1914, **1** (no. 6), 211.

Planchon, M. (1). *L'Horloge; son Histoire rétrospective, pittoresque et artistique.* Laurens, Paris, 1899; 2nd ed. 1912.

Pledge, H. T. (1). *Science since 1500.* HMSO, London, 1939.

Potts, R. (1). *Euclid's Elements of Geometry, chiefly from the text of Dr Simson, with explanatory Notes; together with a Selection of Geometrical Exercises from the Senate-House and College Examination Papers; to which is prefixed, An Introduction, containing a*

Brief Outline of the History of Geometry. Cambridge, 1845.

Pulleyblank, E. G. (3). 'A Sogdian Colony in Inner Mongolia.' *TP*, 1952, **41**, 317.

Pulleyblank, E. G. (4). *Chinese History and World History.* Inaugural Lecture at the University of Cambridge. C.U.P. 1955.

Randall, J. H. (1). 'The Development of Scientific Method in the School of Padua.' *JHI*, 1940, **1**, 177.

Rangabé, A. R. (1). 'Lettre de Mons. Rangabé à Mons. Letronne sur une Inscription Grecque du Parthénon, etc. etc.' (including description of the Salamis abacus), with an appended 'Note sur l'Echelle Numérique d'un Abacus Athénien, etc.' by Letronne. *RA*, 1846, **3**, 295.

Rāy, P. C. (1) (tr.). *The Mahābhārata.* 22 vols. Bhārata Press, Calcutta, 1889.

Rémusat, J. P. A. (1) (tr.). *Fa Hian, 'Foe Koue Ki'. traduit par Rémusat, etc.* Paris, 1836. Eng. tr. *The Pilgrimage of Fa Hian; from the French edition of the 'Foe Koue Ki' of Rémusat, Klaproth and Landresse, with additional notes and illustrations.* Calcutta, 1848. (Fa-Hsien's *Fo Kuo Chi.*)

Rémusat, J. P. A. (3). 'Antoine Gaubil.' *BU*, 1856, **16**, 1.

Rémusat, J. P. A. (4). 'Catalogue des Bolides et des Aérolithes observées à la Chine et dans les Pays Voisins, tiré des Ouvrages Chinois.' *JPH*, 1819, **88**, 348.

Rémusat, J. P. A. (5). 'Observations Chinoises sur la Chute des Corps Météoriques.' In *Mélanges Asiatiques.* Dondey, Paris, 1825.

Rémusat, J. P. A. (6). Translation of the *Chen La Fêng Thu Chi. Nouvelles Mélanges Asiatiques,* vol. 1, p. 134.

Renou, L. & Filliozat, J. (1). *L'Inde Classique; Manuel des Etudes Indiennes.* Vol. 1, with the collaboration of P. Meile, A. M. Esnoul and L. Silburn, Payot, Paris, 1947. Vol. 2, with the collaboration of P. Demiéville, O. Lacombe, & P. Meile, Ecole Française d'Extrême Orient, Hanoi; Impr. Nationale, Paris, 1953.

Rescher, O. (1). *Eš-šaqā'iq en-No'mānijje von Taškoprüzade, enthaltened die Biographien der türkischen und im osmanischen Reiche wirkenden Gelehrten....* Phoenix, Constantinople-Galata, 1927.

Rey, Abel (1). *La Science dans l'Antiquité.* Vol. 1: *La Science Orientale avant les Grecs,* 1930, 2nd ed. 1942; Vol. 2: *La Jeunesse de la Science Grecque,* 1933; Vol. 3: *La Maturité de la Pensée Scientifique en Grèce,* 1939; Vol. 4: *L'Apogée de la Science Technique Grecque (Les Sciences de la Nature et de l'Homme, les Mathématiques, d'Hippocrate à Platon),* 1946. Albin Michel, Paris. (Evol. de l'Hum.

sér. complémentaire.)

Ricci, Matteo (1). *I Commentarj della Cina,* 1610. MS. unpub. till 1911 when it was edited by Venturi (1); since then it has been edited and commented on more fully by d'Elia (2).

Richardson, L. J. 'Digital Reckoning among the Ancients.' *AMM,* **23**, 7.

Ripa, Matteo (1). *Memoirs of Father [Matteo] Ripa during thirteen years' Residence at the Court of Peking in the service of the Emperor of China; with an account of the foundation of the College for the Education of Young Chinese at Naples.* Selected and transl. from Italian by F. Prandi, Murray, London, 1844.

Rodet, L. (1). 'Le Souan-Pan et la Banque des Argentiers.' *BSMF,* 1880, **8**, 158.' (Contains a translation by A. Vissière of part of the section of the *Suan Fa Thung Tsung* dealing with abacus computations.)

Rohde, A. (1). *Die Geschichte d. wissenschaftlichen Instrumente vom Beginn der Renaissance bis zum Ausgang des 18. Jahrh.* Klinkhardt & Biermann, Leipzig, 1923. (Monographien d. Kunstgewerbes, no. 16.)

von Rohr, M. (1). *Joseph Fraunhofers Leben, Leistungen und Wirksamkeit.* Akad. Verlagsgesellsch. Leipzig, 1929.

Rohrberg, A. (1). 'Das Rechnen auf dem chinesischen Rechenbrett.' *UMN,* 1936, **42**, 34.

Rome, A. (1). 'Les Observations d'Equinoxes et de Solstices dans le ch. 1 du livre 3 du Commentaire sur l'*Almagest* par Théon d'Alexandrie.' *ASSB,* 1937, **57**, 213; 1938, **58**, 6.

Rosen, F. (1) (tr.). *The Algebra of Mohammed ben Musa, edited and translated [from the Arabic]* (with preface and notes). Royal Asiatic Society, London, 1831. (Oriental Translation Fund.)

Rosenfeld, B. & Yushkevitch, A. P. (1) (tr. and ed.). 'The Mathematical Tractates of Jamshīd Ghiyāth al-Dīn al-Kāshī (d. +1436)' (in Russian). The *Miftāh al-Hisāb* (Key of Computation) and the *Risālat al-Mohītīje* (Treatise on the Circumference). *JHM,* 1954, **7**, 11—449. Notes by Yushkevitch & Rosenfeld from pp. 380 ff.

Ross, W. D. (1). *Aristotle.* Methuen, London, 1930.

Des Rotours, R. (2) (tr.). *Traité des Examens* (*Hsin Thang Shu,* chs. 44, 45). Leroux, Paris, 1932. (Bib. de l'Inst. des Hautes Etudes Chinoises, no. 2.)

Roxby, P. M. (3). 'China as an Entity; the Comparison with Europe.' *G,* 1934, 1.

Rudolph, R. C. (1). 'Han Tomb Reliefs from Szechuan.' *ACASA,* 1950,

4, 29.
Rufus, W. C. (1). 'The Celestial Planisphere of King Yi Tai-Jo' [of Korea]. *JRAS/KB*, 1913, 4, 23; *POPA*, 1915, 23, 6.
Sachau, E. (1) (tr.). *Alberumi's India*. 2 vols. London, 1888; reprint, 1910.
Salusbury, T. (1) (ed.). *Mathematical Collections and Translations of Galileo*. London, 1661.
Sambursky, S. (1). *The Physical World of the Greeks*, tr. from the Hebrew edition by M. Dagut; Routledge & Kegan Paul, London, 1956.
Sammadar, J. N. (1). 'Rain Measurement in Ancient India.' *QJRMS*, 1912, 38, 65.
De Santillana, G. (1). *The Crime of Galileo*. Univ. of Chicago Press, Chicago, 1955; rev. P. Labérenne, *LP*, 1956 (no. 69), 133.
Sarton, G. (1). *Introduction to the History of Science*. Vol. 1, 1927; Vol. 2, 1931 (2 parts); Vol. 3, 1947 (2 parts). Williams & Wilkins, Baltimore (Carnegie Institution Pub. no. 376).
Sarton, G. (2). 'Simon Stevin of Bruges; the first explanation of Decimal Fractions and Measures (+1585); together with a history of the decimal idea, and a facsimile of Stevin's *Disme*.' *ISIS*, 1934, 21, 241; 1935, 23, 153.
Sarton, G. (5). 'Decimal Systems Early and Late.' *OSIS*, 1950, 9, 581.
De Saussure, L. (1). *Les Origines de l'Astronomie Chinoise*. Maissoneuve, Paris, 1930. Commentaries by E. Zinner, VAG, 1931, 66, 21; A. Pogo, ISIS, 1932, 17, 267. This book (posthumously issued) contains eleven of the most important original papers of de Saussure on Chinese astronomy (3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14). It omits, however, the important addendum to (3), 3 *a*, as well as the valuable series (16). Unfortunately the editing was slovenly. Although the reprinted papers were re-paged, the cross-references in the footnotes were unaltered; Pogo, however (*loc. cit.*), has provided a table of corrections by the use of which de Saussure's cross-references can be readily utilised.
Sauvaire, M. H. (1). 'On a Treatise on Weights and Measures by Eliya' (Elias bar Shinaya, +975 to +1049; Syriac). *JRAS*, 1877, 9, 291.
Sayce, A. H. (2). *Babylonian Literature*. Bagster, London, n.d. (1877).
Schafer, E. H. (4). *The History of the Empire of Southern Han according to chapter 65 of the 'Wu Tai Shih' of Ouyang Hsiu*. Art. in Silver Jubilee Volume of the Zinbun Kagaku Kenkyusyo, Kyoto University, Kyoto, 1954, p. 339.
Schafer, E. H. (5). 'Notes on Mica in Medieval China.' *TP*, 1955, 43,

265.

Scheiner, Christopher (1). *Rosa Ursina sive Sol, ex admirando Facularum et Macularum suarum Phenomeno Varius....* Phaeus, Bracciani, 1630.

Schjöth, F. (1). *The Currency of the Far East; the Schjöth Collection at the Numismatic Cabinet of the University of Oslo, Norway,* Aschehong, Oslo, 1929; Luzac, London, 1929. (Pubs. of the Numismatic Cabinet of the University of Oslo, no. 1.)

Schlachter, A. & Gisinger, F. (1). *Der Globus, seine Entstehung und Verwendung in der Antike.* Teubner, Leipzig & Berlin, 1927. (*ΣΤΟΙΧΕΙΑ*, Stud. z. Gesch. d. antik. Weltbildes u. d. griechischen Wiss., no. 8.)

Schrameier, D. (1). 'On Martin Martini' [and his *Novus Atlas Sinensis* of 1655]. *JPOS*, 1888, **2**, 99.

Schrödinger, E. (1). *Science and Humanism.* Cambridge, 1951.

Sédillot, L. P. E. A. (2). *Matériaux pour servir à l'Histoire comparée des Sciences Mathématiques chez les Grecs et chez les Orientaux.* 2 vols. Didot, Paris, 1845–9.

Sédillot, L. P. E. A. (3). *Prolégomènes des Tables Astronomiques d'Oloug Beg* [Ulūgh Beg ibn Shahrukh]. (*a*) Notes, Variantes et Introduction. Didot, Paris, 1847 (first printed Ducrocq, Paris, 1839). (*b*) Traduction et Commentaire. Didot, Paris, 1853.

Sédillot, L. P. E. A. (4). 'De l'Astronomie et des Mathématiques chez les Chinois.' *BBSSMF*, 1868, **1**, 161.

Sédillot, L. P. E. A. (5). *Courtes Observations sur quelques points de l'Histoire de l'Astronomie et des Mathématiques chez les Orientaux.* Lainé & Havard, Paris, 1863.

Sédillot, L. P. E. A. (8). *Recherches Nouvelles pour servir à l'Histoire des Sciences Mathématiques chez les Orientaux.* Paris, 1837. Repr. from 'Notices de plusieurs Opuscules Mathématiques qui composent le MS. Arabe no. 1104 de la Bibliothèque Royale.' *MAI/NEM*, 1838, **13** (no. 1), 126.

Seligmann, K. (1). *The History of Magic.* Pantheon, New York, 1948.

Sengupta, P. C. (1). 'History of the Infinitesimal Calculus in Ancient and Medieval India.' *JDMV*, 1931, **41**, 223.

Sergescu, P. (1). *Les Recherches sur l'Infini Mathématique jusqu'à l'Etablissement de l'Analyse Infinitésimale.* Herrmann, Paris, 1949. (*ASI*, no. 1083.)

Silcock, A. (1). *Introduction to Chinese Art.* London, 1935.

Simon, E. (1). 'Über Knotenschriften und ähnliche Knotenschnüre d. Riukiuinseln.' *AM*, 1924, **1**, 657.

Simonelli, J. P., Kögler, I. & della Briga, M. (1). *Scientiae Eclipsium ex Imperio et Commercio Sinarum Illustratae.* Pt. I (J. P. Simonelli). Rubeis, Rome, 1744. Pt. II (I. Kögler). Marescandoli, Lucca, 1745. Pts. III, IV (M. della Briga). Marescandoli, Lucca, 1747.

Singer, C. (2). *A. Short History of Science, to the Nineteenth Century.* Oxford, 1941.

Singer, C. & Singer, D. W. (1). 'The Jewish Factor in Mediaeval Thought.' In *Legacy of Israel*, ed. E. R. Bevan and C. Singer. Oxford, 1928.

Singh, A N. (1). 'A Review of Hindu Mathematics up to the +12th Century.' *A*, 1936, 18, 43.

Singh, A. N. (2). 'On the Use of Series in Hindu Mathematics.' *OSIS*, 1936, 1, 606.

Smethurst, Gamaliel (1). 'An Account of a new invented arithmetical Instrument called a *Shwanpan*, or Chinese Accompt-Table.' *PTRS*, 1749, 46, 22. (With note by C. M. [ortimer], See. R. S.)

Smith, C. A. Middleton (1). 'Chinese Creative Genius.' *CTE*, 1946, 1, 920, 1007.

Smith, D. E. (1). *History of Mathematics.* Vol. 1. *General Survey of the History of Elementary Mathematics*, 1923. Vol. 2. *Special Topics of Elementary Mathematics*, 1925. Ginn, New York.

Smith, D. E. (2). 'Chinese Mathematics.' *SM*, 1912, 80, 597.

Smith, D. E. (3) 'Unsettled Questions concerning the Mathematics of China.' *SM*, 1931, 33, 244.

Smith, D. E. (4). 'The History and Transcendence of π.' In J. W. A. Young (ed.), *Monographs on Topics of Modern Mathematics relevant to the elementary field*, p. 396. Longmans Green, New York, 1911.

Smith, D. E. & Karpinski, L. C. (1). *The Hindu-Arabic Numerals.* Ginn, Boston, 1911.

Smith, D. E. & Mikami, Y. (1). *A History of Japanese Mathematics.* Open Court, Chicago, 1914. (rev. H. Bosmans, *RQS*, 1914, 76, 251.)

Snellen, J. B. (1). '*Shoku Nihongi*; Chronicles of Japan.' *TAS/J*, 1934 (2e ser.), 11, 151.

Solomon, B. S. (1). '"One is No Number" in China and the West.' *HJAS*, 1954, 17, 253.

Soothill, W. E. (5) (posthumous). *The Hall of Light; a Study of Early Chinese Kingship.* Lutterworth, London, 1951. (On the Ming Thang; also contains discussion of the *Pu Thien Ko* and transl. of *Hsia Hsiao Chêng*.)

Soper, A. C. (1). 'Hsiang Kuo Ssu, an Imperial Temple of the Northern

Sung.' *JAOS,* 1948, 68, 19.

Souciet, E. See Gaubil, A.

Spassky, I. G. (1). 'The Origin and History of the Russian "schioty" (abacus).' Art. in *Historical-Mathematical Researches,* 4th ed. Moscow, 1952.

Speyer, W. (1). 'Beitrag z. Wirkung von Arsenverbindungen auf Lepidopteren.' *ZAE,* 1925, 11, 395.

Spinden, H. J. (1). *Ancient Civilisations of Mexico and Central America.* Amer. Mus. Nat. Hist., New York, 1946.

Spizel, G. (1). *De Re Litteraria Sinensium Commentarius.* Leiden, 1660.

Sprat, Thomas (1) *The History of the Royal Society of London, for the Improving of Natural Knowledge.* 3rd ed. Knapton *et al.* London, 1722.

van der Sprenkel, O. (1). *Chronology, Dynastic Legitimacy, and Chinese Historiography.* Contribution to the Far East Seminar in the Conference on Asian History, London School of Oriental Studies, July, 1956.

Staunton, Sir George T. (1). (tr.). *'Ta Tsing Leu Lee' [Ta Chhing Lü Li]; being the fundamental Laws, and a selection from the supplementary Statutes, of the Penal Code of China.* Davies, London, 1810.

Staunton, Sir George T. (2). *An Authentic Account of an Embassy from the King of Great Britain to the Emperor of China...* Nicol, London, 1797. 2nd ed. 2 vols. 1798.

Stein, R. A. (1). 'Le Lin-Yi; sa localisation, sa contribution à la formation du Champa, et ses liens avec la Chine.' *HH,* 1947, 2 (nos. 1—3), 1—300.

Stein, Sir Aurel (6). 'Notes on Ancient Chinese Documents, discovered along the Han Frontier Wall in the Desert of Tunhuang.' *NSR,* 1921, 3, 243. (Reprinted with Stein (7), Chavannes 12), and Wright, H. K. (1) in brochure form, Peiping, 1940.)

Steinschneider, M. (3) 'Euklid bei den Arabern.' *ZMP,* 1886, 31 (Hist.-Lit. Abt.), 82.

Strong, E. W. (1). *Procedures and Metaphysics.* Univ. Calif. Press, Berkeley, 1936.

Struik, D. J. (1). 'Outline of a History of Differential Geometry.' *ISIS,* 1933, 19, 92.

Struik, D. J. (2). *A Concise History of Mathematics.* 2 vols. (pagination continuous). Dover, New York, 1948.

Stühr, P. F. (1). *Untersuchungen ü. d. Ursprünglichkeit u. Altertümlichkeit d. Sternkunde unter den Chinesen u. Indern u. ü. d. Einfluss d.*

Griechen auf den Gang ihrer Ausbildung. Berlin, 1831.
Süheyl Ünver A. (3). *Türk Pozitif Ilimler tarihinden bir bahis Ali Kuşci Hayati ve eserleri.* (New Material on Natural Science during the Reign of Muḥammad the Conqueror especially concerning the coming of 'Ali Ibn Muḥammad al-Qūshchī from Samarqand to Constantinople.) In Turkish, illustr. Istanbul, 1948. (Istanbul Universitesi Fen Fakultesi Monografileri (Ilim Tarihi Kismi), no. 1.)
Sulaimān Al-Tājir (1) (attrib.). *Akhbār al-Ṣin wa'l-Hind* (Information on China and India), +851. See Renaudot (1), Reinaud (1), Ferrand (2), Sauvaget (2).
Suter, H. (1). *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke.* Teubner, Leipzig, 1900. (Abhdl. z. Gesch. d. Math Wiss. mit Einschluss ihrer Anwendungen, no. 10; supplement to *ZMP*, **45**.) Additions and corrections in *AGMW*, 1902, no. 14.
Suter, H. (2). 'Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kamil al-Miṣrī.' *BM*, 1910 (3ᵉ sér.), **11**, 100.
Swann, Nancy L. (1) (tr.). *Food and Money in Ancient China; the Earliest Economic History of China to +25* (with tr. of [Chhien] *Han* Shu, ch 24 and related texts, [*Chhien*] *Han Shu*, ch. 91 and *Shih Chi*, ch. 129). Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1950. (rev. J. J. L. Dayvendak, *TP*, 1951, 40, 210; C M. Wilbur, *FEQ*, VTEV, **10**, 320; Yang Lien-Shêng, *HJAS*, 1950, **13**, 524.)
Sykes, Sir Percy (1). *The Quest for Cathay.* Black, London, 1936.
Sylvester, J. J. (1). *Collected Mathematical Papers.* Cambridge, 1904.
Tannery, P. (2) (tr.). 'The *Παράδοσις εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν τετραγώνων ἀριθμῶν* of Manuel Moschopoulos' (on magic squares). *AAEEG*, 1886, 88. (Reprinted in Tannery (3), 1920, vol. 4. p. 27.)
Tannery, P. (3). *Mémoires Scientifiques.* 17 vols. Paris, 1912—46.
Taqizadeh, S. H. (1). On the horoscope of the coronation of Khosrov Anosharvan (+531) in an astrological work of Qasram (+889). *BLSOAS*, 1938, **9**, 128.
Tardin, J. (1). *Histoire naturelle de la Fontaine qui brusle près de Grenoble; Avec la recherche de ses Causes et principes, et ample Traicté des feux sousterrains.* Linocier, Tournon, 1618.
Tarn, W. W. (1). *The Greeks in Bactria and India.* Cambridge, 1951.
Taton, R. (1). *Le Calcul Mécanique.* Presses Univ. de Fr., Paris, 1949.
Taylor, E. G. R. (1). (*a*) 'Ideas on the Shape and Habitability of the Earth prior to the Great Age of Discovery.' *H*, 1937, **22**, 54. (*b*) *Ideas on the Shape, Size and Movements of the Earth.* Historical Association, London, 1943. (Hist. Ass. Pamphlets, no. 126.)
Taylor, E. G. R. (7). *The Mathematical Practitioners of Tudor and*

Stuart England. C.U.P., Cambridge, 1954; rev. D. J. Price, *JIN*, 1955, **8**, 12.

Taylor, John, M.D., H.E.I. Co's Bombay Medical Establishment. (1) (tr.). *Lilawati, or a Treatise on Arithmetic and Geometry, by Bhascara Acharya, translated from the Original Sanskrit.* Rans, Bombay, 1816.

Thibaut, G. (2). *Astronomie, Astrologie und Mathematik* [*der Inder*] in *Grundriss der Indo-Arischen Philologie und Altertumskunde* (Encyclopaedia of Indo-Aryan Research), ed. G. Bühler & F. Kielhorn, Bd. 3, Heft 9.

Thomas, F. W. (1). 'Notes on the "Scythian Period" [Śaka Era].' *JRAS*, 1952, 108.

Thompson, D'Arcy W (1). 'Excess and Defect; or the Little More and the Little Less.' *M*, 1929, **38**, 43.

Thompson, C. J. S. (1). *The Mystery and Lore of Monsters; with accounts of some Giants, Dwarfs and Prodigies.* Williams & Norgate, London, 1930.

Thompson, J. E. S. (1). *Maya Hieroglyphic Writing; an Introduction.* Carnegie Institute Pubs. no. 589. Washington, D.C., 1950; rev. D. H. Kelley, *AJA*, 1952, **56**, 240.

Thomson, John (1). *Illustrations of China and its People; a Series of 200 Photographs with letterpress descriptive of the Places and the People represented.* 4 vols. Sampson Low, London, 1873–4. French tr. by A. Talandier & H. Vattemare, 1 vol. Hachette, Paris, 1877.

Thureau-Dangin, F. (1). (*a*) 'Sketch of a History of the Sexagesimal System.' *OSIS*, 1939, **7**, 95. (*b*) *Esquisse d'une Histoire du Système sexagésimal.* Geuthner, Paris, 1932.

Thureau-Dangin, F. (2). 'L'Origine de l'Algèbre.' *CRAIBL*, 1940, 292.

Thurot, C. (1). 'Recherches historiques sur le Principe d'Archimède.' *RA*, 1868.

Tropfke, J. (1). *Geschichte d. Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung mit besonderer Berücksichtigung d. Fachwörter.* de Gruyter, Berlin & Leipzig, 1921–4.

Vol. 1 (3rd ed.). 1930. Rechnen.

Vol. 2 (3rd ed.). 1933. Allgemeine Arithmetik.

Vol. 3 (3rd ed.). 1937. Proportionen, Gleichungen.

Vol. 4 (3rd ed.). 1940. Ebene Geometrie.

Vol. 5 (2nd ed.). 1923. Ebene Trigonometrie, Sphärik und sphärische Trigonometrie.

Vol. 6 (2nd ed.). 1924. Analyse, analytische Geometrie.

Vol. 7 (2nd ed.). 1924. Stereometrie. Verzeichnisse.

Tytler, J. (1). 'Essays on the Binomial Theorem as known to the Arabs.' *TAS/B* (Asiatick Researches), 1820, 13, 456.

Uccelli, A. (3). *Enciclopedia Storica delle Scienze e delle loro Applicazioni.* Hoeppli, Milan, n.d. (1941). Vol. 1, *Le Scienze Fisiche e Matematiche.*

von Ueberweg, F. & Heinze, M. (1). *Grundriss d. Geschichte d. Philosophie.* 4 vols. Mittler, Berlin, 1898 (but many editions).

Vacca, G. (3). 'Sulla Matematica degli antichi Cinesi. *BBSSMF,* 1905, 8, 1.

Vacca, G. (4) (tr.). Translation of *Chou Pei Suan Ching. BBSSMF,* 1904, 7.

Vacca, G. (7). 'Della Piegatura della Carta applicata alla Geometria.' *PDM,* 1930 (ser. 4), 10, 43.

Violle, B. (1). *Traité Complet des Carrés Magiques.* 3 vols. Paris, 1837.

De Visser, M. W. (2). *The Dragon in China and Japan.* Müller, Amsterdam, 1913. Orig. in *VKAWA/L,* 1912, 13 (no. 2).

Vissière, A. (1). 'Recherches sur l'Origine de l'Abaque Chinois et sur sa dérivation des anciennes Fiches à Calcul.' *BG,* 1892, 28.

van Vloten, G. (1) (ed.). *Arabic text of 'Mufātīḥ al-'Ulūm' (The Keys of the Sciences) by Muḥammad ibn-Aḥmad al-Khwārizmī* (+976). Leiden, 1895.

Vogt, H. (1). 'Versuch einer Wiederherstellung von Hipparchs Fixsternverzeichnis.' *ASTNR.* 1925, 224, cols. 17 *ff.*

Volpicelli, Z. (1). 'Chinese Chess' [*wei chhi*]. *JRAS/NCB,* 1894, 26, 80.

Voss, Isaac (1). *Variarum Observationum Liber.* Scott, London, 1685.

van der Waerden, B. L. (1). *Ontwakende Wetenschap; Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde.* Noordhoff, Groningen, 1950. (Histor. Bibl. voor de exacte Wet. no. 7.)

van der Waerden, B. L. (3). *Science Awakening.* Engl. tr. of (1) by A. Dresden with additions of the author. Noordhoff, Groningen, 1954.

Wagner, A. (1). 'Über ein altes Manuscript der Pulkowaer Sternwarte' (with additional note by J. L. E. Dreyer). Chinese and Persian MS. believed to be from the time of Kuo Shou-Ching and Jamāl al-Dīn. *C,* 1882, 2, 123.

Wales, H. G. Quaritch (1). *The Making of Greater India; a Study in Southeast Asian Culture Change.* Quaritch, London, 1951.

Wales, H. G. Quaritch (2). 'The Sacred Mountain in Old Asiatic Religion.' *JRAS,* 1953, 23.

Waley, A (1) (tr.). *The Book of Songs.* Allen & Unwin, London, 1937.

Waley, A. (4) (tr.). *The Way and its Power; a study of the 'Tao Tê*

Ching' and its Place in Chinese Thought. Allen & Unwin, London, 1934. (Crit. Wu Ching-Hsiung, *TH*, 1935, 1, 225.)

Waley, A. (5) (tr.). *The Analects of Confucius.* Allen & Unwin, London, 1938.

Waley, A. (11). *The Temple, and other Poems.* Allen & Unwin, London, 1923.

Waley, A. (13). *The Poetry and Career of Li Po (+701 to +762).* Allen & Unwin, London, 1950.

Waley, A. (17) (tr.). *Monkey, by Wu Chhêng-Ên.* Allen & Unwin, London, 1942.

Waley, A. (23). *The Nine Songs; a study of Shamanism in Ancient China [the 'Chiu Ko' attributed traditionally to Chhü Yuan].* Allen & Unwin, London, 1955.

Wallis, John (1). *De Algebra Tractatus.* 1685. In *Opera.* Oxford, 1693.

Walters, R. C. S. (1). 'Greek and Roman Engineering Instruments.' *TNS,* 1922, 2, 45.

Wang Kuo-Wei (2). 'Chinese Foot-Measures of the Past Nineteen Centuries.' *JRAS/NCB,* 1928, 59, 112. (Tr. A. W. Hummel & Fêng Yu-Lan.)

Wang Ling (2). *The 'Chiu Chang Suan Shu' and the History of Chinese Mathematics during the Han Dynasty.* Inaug. Diss. Cambridge, 1956.

Wang Ling (3). 'The Development of Decimal Fractions in China.' *Proc. VIIIth Internat. Congress of the History of Science, Florence, 1956;* p. 13.

Wang Ling (4). 'The Decimal Place-Value System in the Notation of Numbers in China.' Communication to the XXIIIrd International Congress of Orientalists, Cambridge, 1954.

Wang Ling (5). On the Indeterminate Analysis of I-Hsing and Chhin Chiu-Shao (in the press).

Wang Ling & Needham, Joseph (1). 'Horner's Method in Chinese Mathematics; its Origins in the Root-Extraction Procedures of the Han Dynasty.' *TP,* 1955, 43, 345.

Wang Yü-Chhüan (1). *Early Chinese Coinage.* Amer. Numismatic Soc., New York, 1951. (Numismatic Notes and Monographs, no. 122.)

Ward, F. A. B. (1). *Time Measurement.* Pt. 1. *Historical Review.* (Handbook of the Collections at the Science Museum, South Kensington.) HMSO, London, 1937.

Warren, Sir Charles (1). *The Ancient Cubit.* London, 1903.

Weinberger, W. M. (1). 'An Early Chinese Bronze Foot Measure.' *ORA,* 1949, 2, 35.

Westphal, A. (1). (*a*) 'Über die chinesisch-japanische Rechenmaschine

MDGNVO, 1873, **8**, 27. (*b*) 'Über das Wahrsagen auf der Rechenmaschine.' *MDGNVO*, 1873, **8**, 48. (*c*) 'Über die chinesische *Swan-Pan*.' *MDGNVO*, 1876, **9**, 43.

Weyl., Hermann (1). *Symmetry*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1952.

Wheeler, R. E. M. (4). *Rome beyond the Imperial Frontiers*. Bell, London, 1954.

Whewoll, William (1). *History of the Inductive Sciences*. Parker, London, 1847. 3 vols. (Crit. G. Sarton, *A/AIHS*, 1950, **3**, 11.)

White, Lynn (2). 'Natural Science and Naturalistic Art in the Middle Ages.' *AHR*, 1946, **52**, 421.

Whitehead, A. N. (1). *Science and the Modern World*. Cambridge, 1926.

Whitehead, A. N (7). *Essays in Science and Philosphy*. Rider, London, 1948.

Whitney, W. D. & Lanman, C. R. (1) (tr.). *Atharvaveda Saṃhitā*. 2 vols. Harvard Univ. Press, Cambridge (Mass.), 1905. (Harvard Oriental Series, nos. 7, 8.)

Wiedemann, E. (2). 'Arabische Studien ü. d. Regenbogen.' *AGNT*, 1913, **4**, 453.

Wiedemann, E. (10). 'Über das Schachspiel und dabei vorkommende Zahlenproblems.' *SPMSE*, 1908, **40**, 41. (Beiträge z. Gesch. d. Naturwiss. no. 14 (4).)

Wiedemann, E. & Hauser, F. (4). 'Über die Uhren im Bereich der Islamischen Kultur.' *NALC*, 1915, **100**, no. 5. Incl. transls. of the *Kitāb fī Ma'rifat al-Ḥiyal al-Handasiya* (Treatise on the Knowledge of Geometrical (i.e. Mechanical) Contrivances) by Ibn al-Razzāz al-Jazarī (*fl.* +1180 to +1206) written in +1206; and of the *Book on the Construction and Use of (Striking Water-) Clocks* by Riḍwān al-Khurāsānī al-Sa'ātī (*fl. c.* +1160 to +1230) written in +1203.

Wieger, L. (1). *Textes Historiques*. 2 vols. (Ch. and Fr.). Mission Press, Hsienhsien, 1929.

Wieger, L. (2). *Textes Philosophiques* (Ch. and Fr.). Mission Press, Hsienhsien, 1930.

Wieger, L. (3). *La Chine à travers les Ages; Précis, Index Biographique et Index Bibliographique*. Mission Press, Hsienhsien, 1924. Eng. tr. E. T. C. Werner.

Wieger, L. (4). *Histoire des Croyances Religieuses et des Opinions Philosophiques en Chine depuis l'origine jusqu'à nos jours*. Mission Press, Hsienhsien, 1917.

Wieger, L. (6). *Taoisme*. Vol. 1. *Bibliographie Générale*: (1) Le Canon

(Patrologie); (2) Les Index Officiels et Privés. Mission Press, Hsienhsien, 1911. (Crit. P Pelliot, *JA*, 1912 (10ᵉ sér.), **20**, 141.)

Wieger, L. (7). Taoisme. Vol. 2. *Les Pères du Système Taoiste* (tr. selections of Lao Tzu, Chuang Tzu, Lieh Tzu). Mission Press, Hsienhsien. 1913.

Wiener, P. P. (2). 'The Tradition behind Galileo's Methodology.' *OSIS*, 1936. **1**, 733.

Wilhelm, Richard (2)(tr.). 'I *Ging*' [*I Ching*]; *Das Buch der Wandlungen.* 2 vols. (3 books, pagination of 1 and 2 continuous in first volume). Diederichs, Jena, 1924. Eng. tr. C. F. Baynes (2 vols.). Bollingen-Pantheon, New York, 1950.

Wilhelm, Richard (3) (tr.). *Frühling u. Herbst d. Lü Bu-We (the Lü Shih Chhun Chhiu).* Diederichs, Jena, 1928.

Wilhelm, Richard (4) (tr.). *'Liä Dsi'; Das Wahre Buch vom Quellenden Urgrund;* [*Lieh Tzu*] *'Tschung Hü Dschen Ging'; Die Lehren der Philosophen Liä Yü-Kou und Yang Dschu.* Diederichs. Jena, 1921.

Wilhelm, Richard (6) (tr.). *'Li Gi', das Buch der Sitte des älteren und jüngeren Dai* [i.e. both *Li Chi and Ta Tai Li Chi*]. Diederichs, Jena, 1930.

Wilhelm, Richard (7). *Chinesische Volksmärchen.* Diederichs, Jena, 1914.

Winter, H. J. J. & Arafat, W. (1) 'The Algebra of 'Umar Khayyāmi.' *JRAS/B*, 1950, **16**, 27.

Wittfogel, K. A. (2). 'Die Theorie der orientalischen Gesellschaft.' *ZSF*, 1938, **7**, 90.

Wittfogel. K. A., Fêng Chia-Shêng *et al.* (1). *History of Chinese Society (Liao), +907 to +1125.* *TAPS*, 1948, **36**, 1—650 (rev. P. Demiéville, *TP*, 1950. **39**, 347; E. Balazs, *PA*, 1950, **23**, 319).

Wittkower, R (1). 'Marvels of the East; a Study in the History of Monsters.' *JWCI*, 1942, **5**, 159.

Woepcke, F. (1) (tr.). *L'Algèbre d'Omar Alkhayyāmi.* Duprat. Paris, 1851.

Woepcke, F. (2). 'Recherches sur l'Histoire des Sciences Mathématiques chez les Orientaux d'après des Traités inédits Arabes et Persans.' *JA*, 1855 (5ᵉ sér.), **5**, 218.

Woepcke, F. (3). (tr.). *Extrait du Fakhri* [*of Abū Bakr al-Hasan al-Ḥāsib al-Karajī, =al-Karkhī, c.* +1025], *précedé d'un Mémoire sur l' Algèbre indéterminée chez les Arabes.* Paris, 1853.

Woepcke, L. (1). *Disquisitiones Archaeologico-Mathematicae circa Solaria Veterum.* Inaug. Diss. Berlin, 1847.

Wolf, A. (1). *A History of Science, Technology and Philosophy in the 16th and 17th Centuries.* Allen & Unwin, London, 1935.

Wolf, A. (2). *A History of Science, Technology and Philosophy in the*

18th Century. Allen & Unwin, London, 1938.

Wolf, R. (3). *Handbuch d. Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie*. 2 vols. Schulthess, Zürich, 1869 to 1872.

Wu Khang (1). *Les Trois Politiques du 'Tchounn Tsieou'* [*Chhun Chhiu*] *interprétées par Tong Tchong-Chou* [*Tung Chung-Shu*] *d'après les principes de l'école de Kong-Yang* [*Kungyang*]. Leroux, Paris, 1932. (Includes tr. of ch. 121 of *Shih Chi*, the biography of Tung Chung-Shu.)

Wylie, A. (1). *Notes on Chinese Literature*. 1st ed. Shanghai, 1867. Ed. here used, Vetch, Peiping, 1939 (photographed from the Shanghai 1922 ed.).

Wylie, A. (2). 'History of the Hsiung-Nu' (tr. of the chapter on the Huns in the *Chhien Han Shu*, ch. 94). *JRAI*, 1874, **3**, 401; 1875, **5**, 41.

Wylie, A. (3). 'The History of the South-western Barbarians and Chao Sëen' [Chao-Hsien, Korea] (tr. of ch. 95 of the *Chhien Han Shu*). *JRAI*, 1880, **9**, 53.

Wylie, A. (4). 'Jottings on the Science of the Chinese; Arithmetic.' *North China Herald*, 1852 (Aug.-Nov.), nos. 108, 111, 112, 113, 116, 117, 119, 120, 121. Repr. *Shanghai Almanac and Miscellany*, 1853. Repr. *Chinese and Japanese Repository*, 1864, **1**, 411, 448, 494; **2**, 22, 69, Repr. *Copernicus*, 1882, **2**, 169, 183. Incorporated in Wylie (5), Sci. Sect., p. 159. Germ. tr. K. L. Biernatzki, q.v., 1856. Review and brief abridgement, J. Bertrand, *JS*, 1869, 317, 464; French tr. O. Terquem, *Nouv. Ann. Math.* 1862 (2ᵉ sér.), I(pt. 2), 35, 1863 (2ᵉ sér.), **2**, 529, *Bull. Bibl. Hist.* 1863, **2**, 529.

Wylie, A. (5). *Chinese Researches*. Shanghai, 1897. (Photographically reproduced, Wêntienko, Peiping, 1936.)

Wylie, A. (13). [*Glossary of Chinese*] *Mathematical and Astronomical Terms*. In Doolittle, J. (1), vol. 2, p. 354.

Yabuuchi, Kiyoshi (1): 'Indian and Arabian Astronomy in China.' Art. in Silver Jubilee Volume of the Zinbun Kagaku Kenkyusyo, Kyoto University, Kyoto, 1954, p. 585.

Yajima, S. (1). 'Bibliographie du Dr Mikami Yoshio; Notice Biographique.' In *Actes du VIIᵉ Congrès Internat. d'Histoire des Sciences*, Jerusalem, 1953, p. 646.

Yang Hsien-Yi & Yang, Gladys (1) (tr.). *The 'Li Sao' and other Poems of Chu* [*Chhü*] *Yuan*. Foreign Languages Press, Peking, 1953.

Yang Lien-Shêng (2). 'An Additional Note on the Ancient Game *Liu-Po*.' *HJAS*, 1952, **15**, 124.

Yang Lien-Shêng (4). *Topics in Chinese History*. Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass. 1950. (Harvard-Yenching Institute Studies, no. 4.)

Yang Lien-Shêng (5). 'Notes on the Economic History of the Chin Dynasty.' *HJAS*, 1945, **9**, 107. [With tr. of *Chin Shu*, ch. 26.]

Yang Lien-Shêng (7). 'Notes on N. L. Swann's "Food and Money in Ancient China".' *HJAS*, 1950, **13**, 524.

Yoshino, Y. (1). *The Japanese Abacus Explained*. Tokyo, 1938.

Yule, Sir Henry (1) (ed.). *The Book of Ser Marco Polo the Venetian, concerning the Kingdoms and Marvels of the East, translated and edited, with Notes, by H.Y....*, ed. H. Cordier. Murray, London, 1903 (reprinted 1921). 3rd ed, also issued, Scrilmers, Nsw York, 1929. With a third volume, *Notes and Addenda to Sir Henry Yule's Edition of Ser Marco Polo*, by H. Cordier. Murray, London, 1920.

Yule, Sir Henry (2). *Cathay and the Way Thither; being a Collection of Mediaeval Notices of China*. Hakluyt Soctiety Pubs. (2nd ser). London, 1913–15 (1st ed. 1866). Revised by H. Cordier. 4 vols. Vol. 1 (no. 38), *Introduction; Preliminary Essay on the Intercourse between China and the Western Nations previous to the Discovery of the Cape Route*. Vol. 2 (no. 33), *Odorio of Pordenone*. Vol. 3 (no. 37), *John of Monte Corvino and others*. Vol. 4 (no. 41), *Ibn Baṭṭuṭah and Benedict of Goes*. (Photographically reproduced, Peiping, 1942.)

Yule & Cordier. See Yule (1).

Yushkevitch, A. P. (1). *On the Achievements of Chinese Scholars in the field of Mathematics* (in Russian), in *Iz Istorii Nauki i Tekhniki Kitaya* (Essays in the History of Science and Technology in China), p. 130. Acad. Sci. Moscow, 1955.

Zeuthen, H. G. (1). 'Sur l'Origine de l'Algèbre.' *KDVS/MFM.*, 1919, **2**, no. 4.

Zeuthen, H. G. (2). *Die Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*. Leipzig, 1903.

Zeuthen, H. G. (3). *Die Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter*. Copenhagen, 1896. (French tr. Paris, 1902.)

Zilsel, E. (2). 'The Sociological Reots of Science.' *AJS*. 1942, **47**, 544.

Zilsel, E. (3). 'The Origin of William Gilbert's Scientific Method.' *JHI*, 1941, **2**, 1.

Zilsel, E. (4). 'The Genesis of the Concept of Scientific Progress.' *JHI*, 1945, **6**, 325.

附 某些参考文献的缩写

A *Archeion*
AAA *Archaeologia*
AAEEG *Annuaire de l'Assoc. pour l'Encouragement des Etudes Grecques*
A/AIHS *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* (contin. of *Archeion*)
AAN *American Anthropologist*
AAR *Art and Archaeology* (Washington)
ABAW/MN *Abhandlungen d. bayerischen Akademie d. Wissenschaften, München* (Math.-nat. Klasse)
ABAW/PH *Abhandlungen d. bayerischen Akademie d. Wissenschaften, München* (Phil.-hist. Klasse)
ACASA *Archives of the Chinese Art Society of America*
ACLS American Council of Learned Societies
ADVS *Advancement of Science* (British Association, London)
AE *Ancient Egypt*
AEO *Archives d'Etudes orientales* (Upsala)
AGMNT see *QSGNM*
AGMW *Abhandlungen z. Geschichte d. Math. Wissenschaft*
AGNT see *QSGNM*
AGWG/MP *Abhandlungen d. Gesellschaft d. Wissenschaften z. Göttingen* (Math.-phys. Klasse)
AGWG/PH *Abhandlungen d. Gesellschaft d. Wissenschaften z. Göttingen* (Phil.-hist. Klasse)
AHAW/PH *Abhandlungen d. Heidelberger Akademie d. Wissenschaften* (Phil.-hist. Klasse)
AHOR *Antiquarian Horology*
AHR *American Historical Review*
AHSNM *Acta Historia Scientiarum Naturalium et Medicinalium* (Copenhagen)
AI *Ars Islamica*
AIEO/UA *Annales de l'Institut des Etudes orientales* (*Université d'Alger*)
AJ *Asiatic Journal and Monthly Register for British and Foreign India, China and Australia*
AJA *American Journal of Archaeology*

AJP *American Journal of Philology*
AJSC *American Journal of Science*
AJSLL *American Journal of Semitic Languages and Literature*
AKG *Archiv f. Kulturgeschichte*
AKML *Abhandlungen f. d. Kunde des Morgenlandes*
AM *Asia Major*
AMG *Annales du Musée Guimet*
AMM *American Mathematical Monthly*
AMN *Archiv för Math. og Naturvidenskab* (Christiania/Oslo)
AMP *Archiv d. Math. u. Physik*
AN *Anthropos*
ANHGN *Abhandlungen d. Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg*
ANP *Annalen d. Physik*
ANS *Annals of Science*
AOF *Archiv f. Orientforschung*
APAW *Abhandlungen d. preuss. Akad. Wiss. Berlin*
APAW/MN *Abhandlungen d. preuss. Akad. Wiss. Berlin* (Math.-nat. Klasse)
AQ *Antiquity*
ARAB *Arabica*
ARC Agricultural Research Council (U.K.)
ARLC/DO *Annual Reports of the Librarian of Congress* (Division of Orientalia)
ARSI *Annual Reports of the Smithsonian Institution*
ARUSNM *Annual Reports of the U. S. National Museum*
AS/BIHP *Kuo-Li Chung-Yang* (now *Chung-Kuo Kho-Hsüeh*) *Yen-Chiu Institute of History and Philology, Academia Sinica*)
AS/CJA *Chung-Kuo Khao Ku Hsüeh Pao* (*Chinese Journal of Archaeology, Academia Sinica*)
ASAW/PH *Abhandlungen d. Sächischen Akad. Wiss. Leipzig* (Phil.-hist. Klasse)
ASI *Actualités scientifiques et industrielles*
ASPN *Archives des Sciences physiques et naturelles*
ASR *Asiatic Review*
ASSB *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*
ASTSN *Atti d. Soc. Toscana d. Sci. Nat.*
AT *Atlantis*
AUL *Annales de l'Université de Lyon*
AUON *Annali dell'Istituto Universitario Orientale di Napoli*
BA *Baessler Archiv* (*Beiträge z. Völkerkunde herausgeg. a. d. Mitteln d. Baessler Instituts, Berlin*)

BAU *Bulletin of Ankara University*
BBSHS *Bulletin of the British Society for the History of Science*
BBSSMF *Bollettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e fisiche* (Boncompagni's)
BCGF *Bulletin de la Commission géologique de Finlande*
BCP *Bulletin catholique de Pékin*
BCS *Chung-Kuo Wên-Hua Yen-Chiu Hui Khan* (*Bulletin of Chinese Studies*, Chhêngtu)
BEFEO *Bulletin de l'Ecole française de l'Extrême Orient* (Hanoi)
BGTI *Beitr. z. Gesch. d. Technik u. Industrie* (changed to *Technik Geschichte BGTI/TG* in 1933)
BIFAO *Bulletin de l'Institut français d'Archéologie Orientale* (Cairo)
BLSOAS *Bulletin of the London School of Oriental and African Studies*
B&M Brunet, P. & Mieli, A., *Histoire des Sciences* (*Antiquité*).
BM *Bibliotheca Mathematica*
BMFEA *Bulletin of the Museum of Far Eastern Antiquities* (Stockholm)
BMON *Bulletin Monumental*
BMQ *British Museum Quarterly*
BMRAH *Bulletin des Musées royaux d'Art et d'Histoire* (Brussels)
BNGBB *Berichte d. naturforsch. Gesellschaft Bamberg*
BNI *Bijdragen tot de taal- land- en volken-kunde v. Nederlandsch-Indië*
BNLP *Kuo-li Pei-phing Thu Shu Kuan Khan* (*Bulletin of the National Library of Peiping*, Peking)
BOR *Babylonian and Oriental Record*
BSEIC *Bulletin de la Société des Etudes indochinoises*
BSMF *Bulletin de la Société mathématique* (*de France*)
BU *Biographie universelle*
BUA *Bulletin de l'Université de l'Aurore* (Shanghai)
BUSNM *Bulletin of the U. S. National Museum*
BV *Bharatiya Vidya*
CA *Chemical Abstracts*
CAM *Communications de l'Académie de Marine* (Brussels)
CEN *Centaurus*
CET *Ciel et Terre*
CH *Chih-Hsüeh* (*Learning*)
CHER *Chhing-Hua* (*University*) *Engineering Reports*
CHHP *Chhi-Hsiang Hsüeh Pao* (*Meteorological Magazine*)
CHI *Cambridge History of India*
CHJ *Chhing-Hua Hsüeh Pao* (*Chhing-Hua* (Ts'ing-Hua University) *Journal*)

CIMC/ME *Chinese Imperial Maritime Customs* (Medical Report Series)
CJ *China Journal of Science and Arts*
CLHP *Chin-Ling Hsueh Pao* (*Nanking University Journal*)
CLJ *Classical Journal*
CLTC *Chen-li Tsa Chih* (*Truth Miscellany*)
CMJ *China Medical Journal*
CNCK *Chhing-Nien Chung-kuo Chi Khan* (*Young China Magazine*)
CP *Classical Philology*
CQ *Classical Quarterly*
CR *China Review* (Hong Kong and Shanghai)
CRAIBL *Comptes Rendus de l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres* (Paris)
CRAS *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (Paris)
CRAS/USSR *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (U.S.S.R.)
CREC *China Reconstructs*
CRR *Chinese Recorder*
CRRR *Chinese Repository*
CS *Current Science*
CSPSR *Chinese Social and Political Science Review*
CST/HIJ *Chung-Shan Ta-Hsüeh Yü Yen Li-Shih Yen-Chiu So Tsou Khan* (*Sun Yat-Sen University Journal of Linguistics and History*)
CT *Connaissance du Temps*
CTE *China Trade and Engineering*
D *Discovery*
DHA *Dock and Harbour Authority*
DUZ *Deutsche Uhrmacher-Zeitung*
DWAW/PH *Denkschriften d. k. Akademie d. Wissenschaften, Wien* (Vienna) (Phil.-hist. Klasse)
EB *Encyclopaedia Britannica*
ENB *Ethnologisches Notizblatt* (Kgl. Mus. f. Völkerkunde, Perlin)
END *Endeavour*
EOL *Jaarboek; Ex Oriente Lux*
ERE *Encyclopaedia of Religion and Ethics* (ed. Hastings)
EW *East and West* (Quart. Rev. pub. Istituto Ital. per il Medio e Estremo Oriente, Rome)
EXP *Experientia*
FEQ *Far Eastern Quarterly*
FF *Forschungen und Fortschritte*
FJHC *Fu-Jen Hsüeh-Chih* (*Journal of Fu-Jen University*, Peking)
FMKP *Fortschritte d. Mineralogie, Kristallographie u. Petrologie*
FMNHP/AS *Field Museum of Natural History* (Chicago). *Publications,*

Anthropological Series
FMNHP/GLS *Field Museum of Natural History* (Chicago) *Publications;* Geological Leaflet Series
G *Geimon (Art Journal)*
G Giles, H. A., *Chinese Biographical Dictionary.*
GB *Geibun (Arts Journal)*
GHA *Göteborgs Högskolas Arsskrift*
GTIG *Geschichtsblätter f. Technik, Industrie u. Gewerbe*
HCLT *Hui-Chiao Lun-Than (Review of Muslim Affairs)*
HH *Han Hiue (Han Hsüeh); Bulletin du Centre d'Etudes sinologiques de Pékin*
HITC *Hsüeh I Tsa Chih (Wissen und Wissenschaft)*
HITH *Hsüeh I Thung Hsün (Science and Art Correspondent)*
HJAS *Harvard Journal of Asiatic Studies*
HMSO Her Majesty's Stationery Office (London)
HORJ *Horological Journal*
HY Harvard-Yenching (Institute and Publications).
IC *Islamic Culture*
IHQ *Indian Historical Quarterly*
ILN *Illustrated London News*
IM *Imago Mundi: Yearbook of Early Cartography*
IPR Institute of Pacific Relations
ISIS *Isis*
ISP/WSFK *I Shih Pao; Wên Shih Fu Khan (Literary Supplement of the People's Betterment Daily)*
JA *Journal asiatique*
JAOS *Journal of the American Oriental Society*
JATBA *Journal d'Agriculture tropicale et de Botanique appliquée*
JDMV *Jahresber. d. deutschen Math. Vereins*
JEA *Journal of Egyptian Archaeology*
JEP *Journal de l'Ecole (royale) Polytechnique* (Paris)
JESL *Journal of the Ethnological Society* (London)
JHI *Journal of the History of Ideas*
JHM *Journal of the History of Mathematics* (Moscow)
JHOAI *Jahreshefte d. österreichischen archäol. Instituts* (Vienna)
JHS *Journal of Hellenic Studies*
JJHS *Kagakūshi Keikyū (Japanese Journal of the History of Science)*
JMHP *Jen Min Hua Pao (People's Illustrated)*
JMJP *Jen Min Jih Pao (People's Daily)*
JNES *Journal of Near Eastern Studies*
JOSHK *Journal of Oriental Studies* (Hong Kong University)

JPH *Journal de Physique*

JPOS *Journal of the Peking Oriental Society*

JRAI *Journal of the Royal Anthropological Institute*

JRAM *Journal f. reine u. angewandte Mathematik* (Crelle's)

JRAS *Journal of the Royal Asiatic Society*

JRAS/B *Journal of the (Royal) Asiatic Society of Bengal*

JRAS/KB *Journal (Transactions) of the Korea Branch of the Royal Asiatic Society*

JRAS/M *Journal of the Malayan Branch of the Royal Asiatic Society*

JRAS/NCB *Journal of the North China Branch of the Royal Asiatic Society*

JRSA *Journal of the Royal Society of Arts*

JRSS *Journal of the Royal Statistical Society*

JS *Journal des Savants*

JSHB *Journal suisse d'Horlogerie et Bijouterie*

JUB *Journal of the University of Bombay*

JWCBRS *Journal of the West China Border Research Society*

JWCI *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*

JWH *Journal of World History* (Unesco)

K Karlgren, B., *Grammata Serica* (dictionary giving the ancient forms and phonetic values of Chinese characters).

KDVS/HFM *Kgl. Danske Videnskabernes Selskab* (Hist.-filol. Medd.)

KDVS/MFM *Kgl. Danske Videnskabernes Selskab* (Math.-fysiske Medd.)

KHCK *Kuo-Hsüeh Chhi Khan* (*Chinese Classical Quarterly*)

KHLT *Kuo-Hsüeh Lun Tsung* (*Chinese Classical Review*)

KHS *Kho-Hsüeh* (*Science*)

KHSSC *Kho-Hsüeh Shih-Chieh* (*Scientific World*)

KHTP *Kho-Hsüeh Thung Pao* (*Scientific Correspondent*)

KKHTC *Kōkogaku Zasshi* (*Archaeological Miscellany*)

KNVSF/T *Forhandlinger d. kgl. Norske Videnskabers Selskabs* (Trondheim)

KR *Korean Repository*

KSHP *Kuo Sui Hsüeh Pao* (*Chinese Classical Journal*)

KSP *Ku Shih Pien* (Essays on Ancient History)

KVRS *Kleine Veröffentlichungen d. Remeis Sternwarte*

LN *La Nature*

LP *La Pensée*

MA *Man*

MAI/NEM *Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles Lettres* (Paris), *Notices et Extraits des MSS.*

MAL/FMN *Memorie d. Accademia* (*r.* now *naz.*) *dei Lincei* (Cl. Sci.

Fis. Mat. e Nat.)
MAL/MSF *Memorie d. Accademia* (*r.* now *naz.*) *dei Lincei* (Cl. Sci. Mor. Stor. e Filol.)
MAN *Mathematische Annalen*
MBIS *Miscellanea Berolinensia ad Incrementum Scientiarum*
MCB *Mélanges chinois et bouddhiques*
MCM *Macmillan's Magazine*
MC/TC *Techniques et Civilisations* (formerly *Métaux et Civilisations*)
MDGNVO *Mitteilungen d. deutsch. Gesellschaft f. Natur- u. Volkskunde Ostasiens*
MG *Mathematical Gazette*
MMI *Mariner's Mirror*
MMT *Messenger of Mathematics*
MN *Monumenta Nipponica*
MPAW *Monatsber. d. preuss. Akad. Wiss. Berlin*
MQ *Modern Quarterly*
MRAI/DS *Mémoires presentés par divers savants à l'Académie royale des Inscriptions et Belles Lettres* (Paris)
MRAS/B *Memoirs of the Asiatic Society of Bengal*
MRAI/DS *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie royale des Sciences* (Paris)
MRASP *Mémoires de l'Acad. royale des Sciences* (Paris)
MRDTB *Memoirs of the Research Department of the Tōyō Bunko* (Tokyo)
MS *Monumenta Serica*
MS/M *Monumenta Serica* Monograph Series
MSAF *Mémoires de la Société (nationale) des Antiquaires de France*
MSKGK *Meiji Seitoku Kinen Gakkai Kiyō* (*Reports of the Meiji Memorial Society*)
MSOS *Mitteilungen d. Seminars f. orientalische Sprachen* (Berlin)
MSRLSB/S *Mém. de la Soc. Roy. des Lettres et des Sci. de Bohême* (Cl. Sci.)
MSRM *Mémoires de la Soc. Russe de Mineralogie*
MUSEON *Le Muséon* (Louvain)
N Nanjio, B., *A Catalogue of the Chinese Translations of the Buddhist Tripiṭaka*, with index by Ross (3).
N *Nature*
NA *Nautical Almanac*
NALC *Nova Acta; Abhdl. d. kaiserl. Leop.-Carol. deutsch. Akad. Naturf. Halle*
NAP *Nova Acta Acad. Petropol.*
NAW *Nieuw Archief voor Wiskunde*

NC *Numismatic Chronicle*
NCH *North China Herald*
NCNA New China News Agency.
NCM *North China Mail*
NCR *New China Review*
NGWG/PH *Nachrichten v. d. k. Gesellsch. (Akademie) d. Wiss. z. Göttingen* (Phil.-hist. Klasse)
NQ *Notes and Queries*
NTBB *Nordisk Tidskrift för Bok- och Bibliotheksväsen*
NW *Naturwissenschaften*
O *Observatory*
OAA *Orientalia Antiqua*
OAZ *Ostasiatische Zeitschrift*
OE *Oriens Extremus* (Hamburg)
OLZ *Orientalische Literatur-Zeitung*
OMO *Österreichische Monatschrift f. d. Orient*
OR *Oriens*
ORA *Oriental Art*
ORE *Orientalia* (Rome)
ORT *Orient*
OSIS *Osiris*
P Pelliot numbers of the Chhien-fo-tung cave temples.
PA *Pacific Affairs*
PAAS *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences.*
PAI *Paideuma*
PAAS *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences*
PBA *Proceedings of the British Academy*
PC *People's China*
PDM *Periodico di Matematiche*
PHR *Philosophical Review*
PIAJ *Proceedings of the Imperial Academy, Japan*
PJ *Pharmaceutical Journal*
PMASAL *Papers of the Michigan Academy of Science, Arts and Letters*
PMG *Philosophical Magazine*
PNHB *Peking Natural History Bulletin*
PPMST *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan* (Tokyo) (continuation of *PTMS*)
PQ *Philological Quarterly*
PRDA *Priroda* (Moscow)
PRIA *Proceedings of the Royal Irish Academy*
PRSA *Proceedings of the Royal Society* (Ser. A)

PRSB *Proceedings of the Royal Society* (Ser. B)
PSA *Proceedings of the Society of Antiquaries*
PTMS *Proceedings of the Tokyo Mathematico-Physical Society* (cont. as *Phys.-Math. Soc. Japan*, *PPMST*)
PTRS *Philosophical Transactions of the Royal Society*
QBCB/C *Quarterly Bulletin of Chinese Bibliography* (Chinese ed.; *Thu Shu Chhi Khan*)
QBCB/E *Quarterly Bulletin of Chinese Bibliography* (English ed.)
QMSF *Quaderni del Museo di Storia delle Scienze, Firenze*
QSGM/A *Quellen u. Studien z. Geschichte d. Mathematik* (Abt. A, Mathematik)
QSGM/B *Quellen u. Studien z. Geschichte d. Mathematik* (Abt. B, Astronomie u. Physik)
QSGNM *Quellen u. Studien z. Geschichte d. Naturwiss. u. d. Medizin* (contin. of *Archiv f. Gesch. d. Math., d. Naturwiss. u. d. Technik* (*AGMNT*) formerly *Archiv f. d. Gesch. d. Naturwiss. u. d. Technik* (*AGNT*))
RA *Revue archéologique*
RAA/AMG *Revue des Arts asiatiques (Annales du Musée Guimet)*
RAL/FMN *Rendiconti d. Accademia* (*r.* now *naz.*) *dei Lincei* (Cl. Sci. Fis. Mat. e Nat.)
RAL/MFS *Rendiconti d. Accademia* (*r.* now *naz.*) *dei Lincei* (Cl. Sci. Mor. Stor. e Filol.)
RCB *Revue coloniale Belge*
REI *Revue des Etudes islamiques*
RGM *Revista General de Marina* (Spain)
RGS *Revue générale des Sciences pures et appliquées*
RHM *Revue d'Histoire des Missions*
RM *Reflets du Monde* (Brussels)
RQS *Revue des Questions scientifiques* (Brussels)
RSISI *Rivista Scientifico-Industriale delle principali Scoperte ed Invenzioni fatti nelle Scienze e nelle Industrie*
RSO *Rivista di Studi Orientali*
S Schlegel, G., *Uranographie Chinoise;* number-references are to the list of asterisms.
SA *Sinica (originally Chinesische Blätter f. Wissenschaft u. Kunst)*
SAM *Scientific American*
SBE *Sacred Books of the East* Series
SC *Science*
SCI *Scientia*
SCSML *Smith College Studies in Modern Languages*

SG *Shinagaku* (*Sinology*)

SGZ *Shigaku Zasshi* (*Historical Journal*)

SHAW/PH *Sitzungsber. d. Heidelberg Akad. d. Wissenschaften* (Phil.-hist. Klasse)

SHR *Scottish Historical Review*

SHTC *Shih-Hsüeh Tsa Chih* (*Historical Journal*)

SHST *Ssu-Hsiang yü Shih-Tai* (*Thought and the Age; Journal of Chekiang University*)

SIR *Sirius*

SK *Sanjutsu Kyōiku* (*Mathematical Education*)

SM *Scientific Monthly* (formerly *Popular Science Monthly*)

SMA *Scripta Mathematica*

SPAW/PH *Sitzungsber. d. preuss. Akad. Wiss. Berlin* (Phil.-hist. Klasse)

SPCK Society for the Promotion of Christian Knowledge (London)

SPMSE *Sitzungsber. d. physik. med. Soc. Erlangen*

SPR *Science Progress*

SPRDS *Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society*

SR *Shirin* (*Journal of History*)

SS *Science and Society* (New York)

SSA *Scripta Serica, Bulletin bibliographique* (Centre franco-chinois d'Etudes sinologiques, Peking)

SSE *Hua-Hsi Ta-Hsüeh Wên Shih Chi Khan* (*Studia Serica; West China Union University Literary and Historical Journal*)

SSE/M *Studia Serica* Monograph Series

ST *Die Sterne*

STTC *Shih Ti Tsa Chih* (*Chekiang University Journal of History and Geography*)

SUHVS *Skrifter utgifna of K. Humanistiska Vetenskaps Samfundet i Upsala*

SWAW/MN *Sitzungsber. d. (österreichischen) Akad. Wiss. Wien* (Vienna) (Math.-nat. Klasse)

SWAW/PH *Sitzungsber. d. (österreichischen) Akad. Wiss. Wien* (Vienna) (Phil.-hist. Klasse)

SWYK *Shuo Wên Yüeh Khan* (*Philological Monthly*)

SYR *Syria*

T Tunhuang Archaeological Research Institute numbers of the Chhien-fo-tung cave temples. In the present work we follow as far as possible the numbering of Hsieh Chih-Liu in his *Tunhuang I Shu Hsü Lu* (Shanghai, 1955) but give the other numbers also.

TAPS *Transactions of the American Philosophical Society*

TAS/B *Transactions of the Asiatic Society of Bengal* (Asiatick

Researches)

TASJ *Transactions of the Asiatic Society of Japan*

TBGZ *Tōkyō Butsuri Gakko Zasshi* (*Journal of the Tokyo College of Physics*)

TCAAS *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*

TFTC *Tung Fang Tsa Chih* (*Eastern Miscellany*)

TG/K *Tōhō Gakuhō, Kyoto* (*Kyoto Journal of Oriental Studies*)

TG/T *Tōhō Gakuhō, Tōkyō* (*Tokyo Journal of Oriental Studies*)

TH Wieger, L., *Textes Historiques.*

TH *Thien Hsia Monthly* (Shanghai)

TIYT *Trudy Instituta Istorii Yestestvoznania i Tekhniki* (Moscow)

TM *Terrestial Magnetism and Atmospheric Electricity* (continued as *Journal of Geophysical Research*)

TMB *Bulletin du Musée ethnogr. du Trocadéro*

TNH *Tōa no Hikari* (*Light of East Asia*)

TNS *Transactions of the Newcomen Society*

TNZI *Transactions of the New Zealand Institute*

TOCS *Transactions of the Oriental Ceramic Society*

TP *T'oung Pao* (*Archives concernant l'Histoire, les langues, la Géographie, l'Ethnographie et les Arts de l'Asie Orientale*, Leiden)

TSBA *Transactions of the Society of Biblical Archaeology*

TSSC *Transactions of the Science Society of China*

TSYK *Thu Shu Yüeh Khan* (*Library Monthly*)

TT Wieger, L. (6), *Tao Tsang* (catalogue of the works contained in the Taoist Patrology)

TTB *Tekn. Tidskr. Bergsvetenskap*

TW Takakusu, J. & Watanabe, K., *Tables du Taishō Issaikyō* (*nouvelle édition* (*Japonaise*) *du Canon bouddhique chinoise*). Indexcatalogue of the Tripitaka.

TYG *Tōyō Gakuhō* (*Reports of the Oriental Society of Tokyo*)

TYKK *Thien Yeh Khao Ku Pao Kao* (*Reports on the History of Agriculture*)

UBHJ *University of Birmingham Historical Journal*

UMN *Unterrichtsblätter f. Math. u. Naturwiss.*

UNESC *Unesco Courier*

VBW *Vorträge d. Bibliothek Warburg*

VKAWA/L *Verhandelingen d. Koninklijke* (*Nederl.*) *Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam* (Afd. Letterkunde)

VS *Variétés Sinologiques* Series

WNZ *Wiener numismatische Zeitschrift*

YCHP *Yenching Hsüeh Pao* (*Yenching University Journal of Chinese*

Studies)
Z *Zalmoxis: Revue des Etudes religieuses*
ZAE *Zeitschrift f. angew. Entomologie*
ZASS *Zeitschr. f. Assyriologie*
ZDMG *Zeitschrift d. deutsch. morgenländischen Gesellschaft*
ZDPV *Zeitschrift d. deutsch. Palästina-Vereins*
ZGEB *Zeitschrift d. Gesellschaft f. Erdkunde* (Berlin)
ZMNWU *Zeitschrift f. Math. u. Naturwiss. Unterricht*
ZMP *Zeitschrift f. Math. u. Physik*
ZSF *Zeitschrift f. Sozialforschung*

索　　引

（按笔画排列）

一　　画

二　　画

三　　画

四　　画

五　　画

六 画

七 画

八　　画

九 画

十 画

十一画

十二画

十三画

十 四 画

十五画以上