# 一类非连续阻尼力分段线性系统的分岔研究 1)

任传波*,2)，周继磊+,2)

*（山东理工大学交通与车辆工程学院，淄博 255049）

+（大连理工大学 工程力学系 工业装备结构分析国家重点实验室，大连 116024）

**摘要：**以某货车的主副钢板弹簧后悬架系统为模型，建立了一类两自由度具有非连续阻尼力分段线性系统的微分方程。建立 Poincaré映射，推导了系统在各分界面处的跳跃矩阵，经分析得知跳跃矩阵与系统的弹簧刚度无关，只有与阻尼力有关。通过数值方法进一步揭示了系统发生的 Neimark-Sacker 分岔现象。分析了在单边横截穿越情况下阻尼系数对系统稳定性的影响。对该类碰撞系统分岔和混沌的研究，有助于工程中此类弹性碰撞系统的优化设计。

**关键词：**非连续阻尼力；分段线性；Poincaré映射；跳跃矩阵；分岔

**中图分类号：O322**　　**文献标识码：A**　　**文章编号：**

## 引　言

含间隙、约束、摩擦、迟滞等分段非光滑动力系统是当前振动工程界广泛重视的研究领域。随着科学技术的发展，非光滑和不连续因素对工程问题的影响越来越引起人们的关注和研究，并取得了一些重要的成果。胡海岩[1]对分段线性系统动力学行为进行了非光滑分析，并采用局部平滑模型来克服由二阶可微的丧失带来的数值仿真困难。陆启韶[2]等利用 Floquet 特征乘子算法来分析刚性约束的非线性动力系统周期运动的稳定性，并应用于弹性约束系统。谢建华、徐慧东等人[3,4]通过建立碰撞系统 Poincaré映射，建立分界面切换矩阵等方法详细研究了碰撞振动系统的周期解的分岔行为，取得了一些重要成果。Sagar Deshpande 等[5]利用平均法得到了在稳定状态条件下分段线性系统频率响应的隐函数曲线，确定了稳定区域和不稳定区域，并对系统参数进行了最优化设计；R. I. Leine 等[6,7]分析了非光滑系统周期解的非连续折叠分岔；于雯等 [8]利用平均法得出分段线性悬架系统的振幅变化过程，并转化为自治系统，判断自治系统奇点的稳定性，从而得到周期解的稳定性。胡海岩、金栋平[9]详细介绍了碰撞振动的近期研究成果，包括碰撞振动的间断和连续分析，碰撞振动控制，以及分析所采取的数值方法和实验研究情况。

本文针对弹性碰撞中存在阻尼的两自由度分段线性非光滑系统，通过建立 Poincaré映射，求出各分界面出跳跃矩阵，分析非连续阻尼力对系统分界面处跳跃矩阵的影响，利用数值方法研究系统周期解的稳定性和分岔现象。研究在单边横截穿越情况下阻尼系数对系统稳定性的影响。

## 1 物理模型及动力学分方程

图 1 是一个两自由度分段线性 1/4 车悬架模型

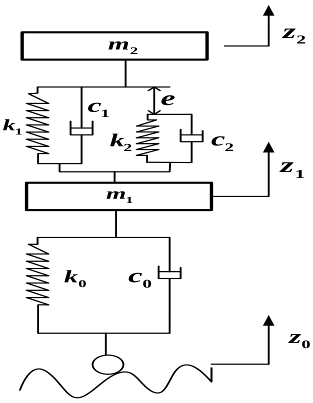



图 1 1/4 货车后悬架模型

Fig.1 1/4 rear suspension model

其中：

$m_1$—轮胎质量　　$m_2$—车身质量

$k_1, c_1$—主钢板弹簧的刚度和阻尼系数

$k_2, c_2$—副钢板弹簧的刚度和阻尼系数

$k_0, c_0$—轮胎刚度和阻尼系数 $e$—弹簧间隙

— — 收到第 1 稿，　　— — 收到修改稿.

1）山东省自然科学基金(ZR2009FL016)资助项目

2）E-mail： chuanboren@sina.com ， zhjl521@163.com

$z_1, z_2$—轮胎和车身的绝对位移
$z_0$—路面不平度函数，取 $z_0 = r\sin\Omega T'$ ，$r$ 为不平度激励幅值，$\Omega$ 为时间角频率，$T'$ 为时间。
建立两自由度分段光滑线性系统的微分方程：

$$\begin{cases} m_2\ddot{z}_2 - k_1 z_{12} - c_1\dot{z}_{12} - f(z_{12}, \dot{z}_{12}) = 0 \\ m_1(\ddot{z}_2 + \ddot{z}_{12}) + k_1 z_{12} + c_1\dot{z}_{12} + f(z_{12}, \dot{z}_{12}) \\ +k_0(z_2 + z_{12} - z_0) + c_0(\dot{z}_2 + \dot{z}_{12} - \dot{z}_0) = 0 \end{cases}$$

式中：$z_{12}$ 为轮胎与车身相对位移，$f(z_{12}, \dot{z}_{12})$ 为由副簧作用引起的分段线性力函数。

则 $f(z_{12}, \dot{z}_{12}) = \begin{cases} 0 & z_{12} < e \\ k_2(z_{12} - e) + c_2\dot{z}_{12} & z_{12} \ge e \end{cases}$

为了描述该系统的运动过程，引入一分界面函数

$$h_\alpha(z_{12}, \dot{z}_{12}) = z_{12} - e, h_\beta(z_{12}, \dot{z}_{12}) = k_2(z_{12} - e) + c_2\dot{z}_{12}$$

$$\Sigma_\alpha = \left\{(z_{12}, \dot{z}_{12}) \in R^2 \middle| h_\alpha = 0, h_\beta \ge 0\right\},$$

$$\Sigma_\beta = \left\{(z_{12}, \dot{z}_{12}) \in R^2 \middle| h_\alpha \ge 0, h_\beta = 0\right\},$$

两截面的法向量分别为

$$n_\alpha = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, n_\beta = \begin{bmatrix}k_2 & c_2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

这样系统的状态空间被分成两部分，如图 2 所示。
区域 $V_+ = \left\{(z_{12}, \dot{z}_{12}) \in R^2 \middle| h_\alpha > 0, h_\beta > 0\right\}$
表示车身与副簧保持接触状态；
区域 $V_- = \left\{(z_{12}, \dot{z}_{12}) \in R^2 \middle| h_\alpha < 0, h_\beta < 0\right\}$
表示车身与副簧保持分离状态；

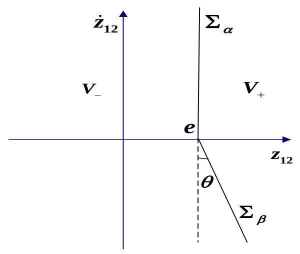



图 2 分段线性系统相平面图
Fig.2 Phase plane for piecewise linear System

为方便分析，选取线性无关的系统参数 $m_1, k_1, r$ 作为基本物理量，对微分方程进行无量纲化处理得：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 0 & \mu_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_{12} \\ \ddot{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2(\varsigma_1 + \varsigma_0) & 2\varsigma_0 \\ -2\varsigma_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_{12} \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 + \mu_0 & \mu_0 \\ -1 & 0\end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix}x_{12} \\ x_2\end{bmatrix} + f'\begin{bmatrix}1 \\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mu_0\sin\omega t + 2\varsigma_0\omega\cos\omega t \\ 0\end{bmatrix}$$

相应的分界面函数：

$$v_- = \left\{(x_{12}, \dot{x}_{12})^T \in R^2 \middle| H_\alpha < 0, \ H_\beta < 0\right\}$$

$$v_+ = \left\{(x_{12}, \dot{x}_{12})^T \in R^2 \middle| H_\alpha > 0, \ H_\beta > 0\right\}$$

$$H_\alpha = x_{12} - b, \ H_\alpha = x_{12} - b$$

式中的无量纲量为：

$$\mu_m = \frac{m_2}{m_1}, \ \mu_0 = \frac{k_0}{k_1}, \ \mu_2 = \frac{k_2}{k_1}, \ t = T'\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \ x_{12} = \frac{z_{12}}{r}$$

$$\varsigma_i = \frac{c_i}{2\sqrt{k_1 m_1}} \ (i = 0,1,2), \ x_2 = \frac{z_2}{r}, \ x_0 = \frac{z_0}{r}, \ \omega = \Omega\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}$$

$$f' = \begin{cases} 0, & [x_{12}, \dot{x}_{12}]^{\mathrm{T}} \in v_- \\ \mu_2(x_{12} - b) + 2\varsigma_2\dot{x}_{12}, & [x_{12}, \dot{x}_{12}]^{\mathrm{T}} \in v_+ \end{cases}, \quad b = \frac{e}{r}$$

## 2 非光滑系统的基解矩阵

考虑分段光滑系统

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) = \begin{cases} f_-(t, x(t)), x \in V_- \\ f_+(t, x(t)), x \in V_+ \end{cases} \quad (2)$$

假设轨迹线在时间 $t = t_p$ 时穿越超平面 $\Sigma$ 。系统在 $D = \left\{t \in R \middle| t_0 \le t \le t_p\right\}$ 的区间内，基解矩阵关于时间的变化，可以从下面初值问题中得到：

$$\Phi(t, t_0) = \frac{\partial f(t, x(t))}{\partial x}\Phi(t, t_0), \quad \Phi(t_0, t_0) = \Phi_0 = I, t_0, t \in D \quad (3)$$

当 $t = t_p$ 时，$x(t_p)$ 在超平面 $\Sigma$ 上，基解矩阵产生跳跃(或不连续)。我们引入一个跳跃矩阵 $S$ ，反映基解矩阵从跳跃前到跳跃后的变化情况：

$$\Phi(t_{p^+}, t_0) = S\Phi(t_{p^-}, t_0) \quad (4)$$

以构造跳跃后的基解矩阵：

$$\Phi(t_q, t_0) = \Phi(t_q, t_{p^+})S\Phi(t_{p^-}, t_0) \quad (5)$$

这里切换矩阵 S 的求法可参阅文献[10]。

下面求各分界面出的跳跃矩阵。将系统写成如下范式形式

$$\dot{X} = f(t, X(t)) = \begin{cases} f_-(t, X(t)), & [x_{12}, \dot{x}_{12}]^T \in v_- \\ f_+(t, X(t)), & [x_{12}, \dot{x}_{12}]^T \in v_+ \end{cases}$$

$$f_-(t, X(t)) = \begin{bmatrix} X_2 \\ -(1 + \mu_0 + \frac{1}{\mu_m})X_1 - 2(\varsigma_0 + \varsigma_1 + \frac{\varsigma_1}{\mu_m})X_2 - \mu_0 X_3 - 2\varsigma_0 X_4 \\ + \mu_0\sin(\omega t) + 2\varsigma_0\omega\cos(\omega t) \\ X_4 \\ \frac{1}{\mu_m}X_1 + \frac{2\varsigma_1}{\mu_m}X_2 \end{bmatrix}$$

$$f_+(t,X(t))=\begin{bmatrix} X_2 \\ -(1+\mu_0+\mu_2+\frac{1+\mu_2}{\mu_m})X_1-2(\varsigma_0+\varsigma_1+\varsigma_2+\frac{\varsigma_2+\varsigma_1}{\mu_m})X_2-\mu_0X_3 \\ -2\varsigma_0X_4+\mu_0\sin(\omega t)+2\varsigma_0\omega\cos(\omega t)+(1+\frac{1}{\mu_m})\mu_2 b \\ X_4 \\ \frac{1+\mu_2}{\mu_m}X_1+\frac{2(\varsigma_1+\varsigma_2)}{\mu_m}X_2-\frac{\mu_2 b}{\mu_m} \end{bmatrix}$$

1)从区域$V_-$通过$\Sigma_\alpha$进入区域$V_+$($X_2>0$)

设一轨迹线$X(t)$在$t=t_1$时刻穿越$\Sigma_\alpha$，从区域$V_-$进入$V_+$。则跳跃矩阵为

$$S_1=I+\frac{(f_+(t_1,X(t_1))-f_-(t_1,X(t_1))n_\alpha^T}{n_\alpha^T f_-(t_1,X(t_1))}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\varsigma_2(1+\frac{1}{\mu_m}) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2\varsigma_2}{\mu_m} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同理可得

$$S_2=I+\frac{(f_-(t_2,X(t_2))-f_+(t_2,X(t_2))n_\alpha^T}{n_\alpha^T f_+(t_2,X(t_2))}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\varsigma_2(1+\frac{1}{\mu_m}) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2\varsigma_2}{\mu_m} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2)从区域$V_-$通过$\Sigma_\beta$进入区域$V_+$

设轨迹线$X(t)$在$t=t_3$时刻穿越$\Sigma_\beta$，从区域$V_-$进入$V_+$。则跳跃矩阵为

$$S_3=I+\frac{(f_+(t_3,X(t_3))-f_-(t_3,X(t_3))n_\beta^T}{n_\beta^T f_-(t_3,X(t_3))}=I$$

同理可得

$$S_4=I+\frac{(f_-(t_4,X(t_4))-f_+(t_4,X(t_4))n_\beta^T}{n_\beta^T f_+(t_4,X(t_4))}=I$$

结果显示，跳跃矩阵与副簧刚度$k_2$无关，只与阻尼系数有关。因为当车身刚与副簧接触的瞬间，其弹性力为零，与不接触时相同；但阻尼力在没有接触之前为零，由于接触时速度一般不为零，接触后的阻尼力不相等。由于系统从不接触到接触的转换过程中，其所受的总接触力是连续的，故跳跃矩阵$S_3$、$S_4$为单位矩阵。如果阻尼系数$\varsigma_2$等于零，$\Sigma_\alpha$与$\Sigma_\beta$的夹角为零，$\Sigma$为一光滑的平面，则跳跃矩阵为单位矩阵。

下面求各光滑区域的基解矩阵。在区域$V_-$，系统的运动方程

$$\dot{X}=f_-(t,X)=A_-X+P_-$$

其中

$$A_-=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(1+\mu_0+\frac{1}{\mu_m}) & -2(\varsigma_0+\varsigma_1+\frac{\varsigma_1}{\mu_m}) & -\mu_0 & -2\varsigma_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\mu_m} & \frac{2\varsigma_1}{\mu_m} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

相应的基解矩阵为$\Phi_-(t,t_0)=e^{A_-(t-t_0)}$。同理可求出在区域$V_+$相应的$\Phi_+(t,t_0)$和$A_+$。

如果系统的整个周期解在区域$V_-$中，可由矩阵$\Phi_-(T+t_0,t_0)=e^{A_-T}$的特征值来判断周期解的稳定性，这里$T=2\pi/\omega$。

如果系统的周期解穿越分界面，由于阻尼系数$\varsigma_2$较小(图 2 中夹角$\theta$为小量)，只考虑单边横截穿越的情况，通过上面分析可得全局的单值矩阵

$$\Phi(T+t_0,t_0)=\Phi_-(T+t_0,t_2)S_2\Phi_+(t_2,t_1)S_1\Phi_-(t_1,t_0)$$

这里$T=2n\pi/\omega$为激振力周期的整数倍，$t_1$，$t_2$为从不同区域到达分界面的时间。

## 3 稳定性分析

选取系统的无量纲参数为：$\mu_m=3.189$，$\mu_0=3.179$，$\mu_2=3.7$，$\varsigma_0=0.178$，$\varsigma_1=0.02$，$\varsigma_2=0.008$，$b=2$。

以激振力频率$\omega$作为变化参数。在分界面$X_1=b$选取 Poincaré截面，即：

$$\sigma=\{(X_1\quad X_2\quad X_3\quad X_4\quad \phi)\in R^4\times S, X_1=b, X_2>0\}$$

这里$\phi=\omega t$，$S=R(\text{mod}\,2\pi)$，得出分界面速度$X_2$随激振力频率$\omega$变化的分岔图，如图 3a 所示。图 3b 为相应的最大 Floquet 乘子模随激励频率$\omega$变化的情况。现取$\omega=1.65$时，非光滑系统基解矩阵$\Phi(T+t_0,t_0)$的 Floquet 特征乘子模为：

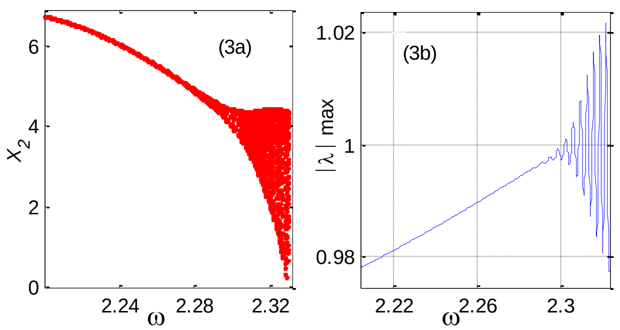



图 3(a)系统的分岔图(b)最大 Floquet 乘数的模

Fig.3 (a) bifurcation diagram of system(b) module of max Floquet multiplier

$|\lambda_{1,2}|=0.946366$，$|\lambda_{3,4}|=0.478553$，均小于 1，仍在单位圆内，系统是稳定的，由于特征值为复数，在时间 Poincare 映射上表现为稳定的焦点，交界面处的速度收敛于常数如图 4 所示。纵坐标为分界面速度$X_2$，横坐标(4a)为位移$X_1$，(4b)为碰撞次数 N(次)。

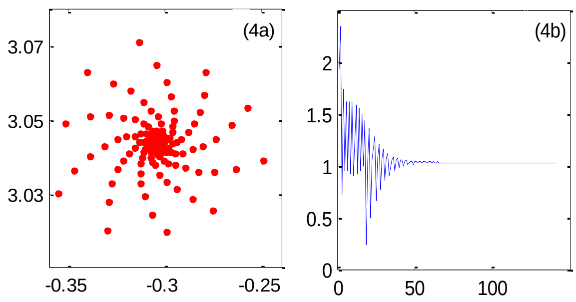



图 4　$\omega=1.65$ 时（a）时间 Poincaré;（b）分界面速度与碰撞次数关系曲线

Fig.4　$\omega=1.65$（a）Poincaré map;（b）curves of impact times for interface velocity

当 $\omega=2.297$，非光滑系统基解矩阵的 Floquet 特征乘子模：$|\lambda_{1,2}|=0.570936$，仍在圆内。$|\lambda_{3,4}|=0.9992$ 已接近单位圆，系统发生了 Neimark-Sacker 分岔，由单周期分岔出拟周期运动。

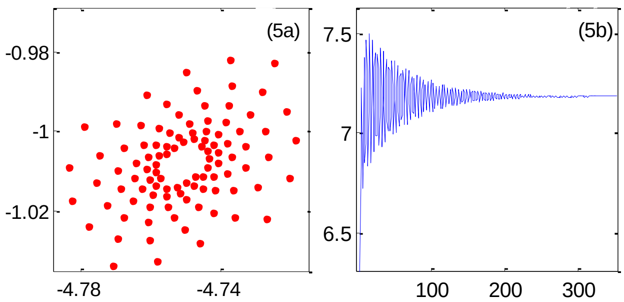
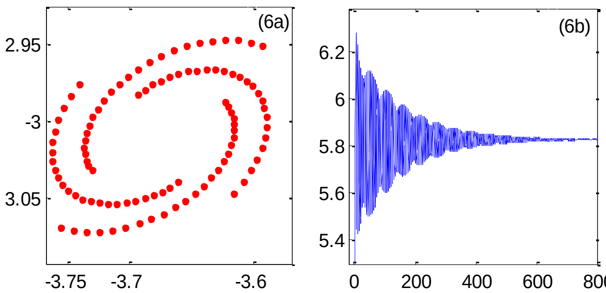



图 5　$\omega=2.297$ 时（a）时间 Poincaré;（b）分界面速度与碰撞次数关系曲线

Fig.5　$\omega=2.297$ 时（a）Poincaré map;（b）curves of impact times for interface velocity

系统由稳定的焦点演变为吸引不变圈，碰撞面速度经过长周期运动基本收敛于某一常数，如图 5 所示。随着激励频率的增大，其拟周期运动的吸引不变圈增大(图 6 $(a)$)，其相图是有很多耦合的极限环而形成环面(图 6$(c)$、$(d)$)，分界面的速度也随着碰撞次数的增加不断发生变化(图 6$(b)$)。频率继续增大，吸引不变圈开始破裂，出现杂乱无章的运动，产生了混沌现象（图 7）。



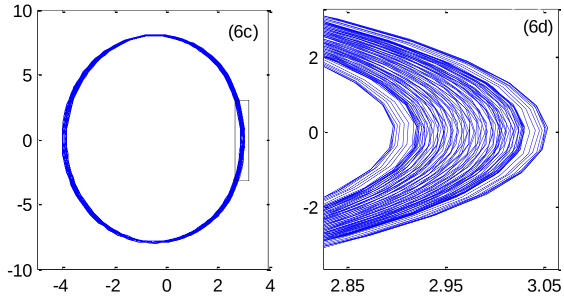




图 6　$\omega=2.35$ (a) 时间 Poincaré映射 (b) 分界面速度与碰撞次数关系曲线 (c) 相图 $X_1-X_2$ (d) 相图 $X_1-X_2$ 的局部放大

Fig.6　$\omega=2.35$ (a) time Poincaré mapping (b) Curves of impact times for velocity (c) Phase diagram $X_1-X_2$ (d) Magnified Phase diagram $X_1-X_2$

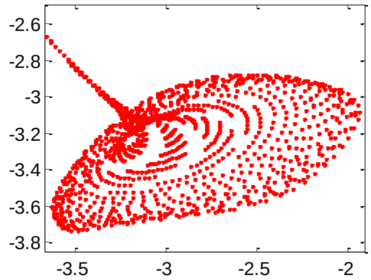



图 7 相平面 $X_1-X_2$

Fig.7 Phase diagram $X_1-X_2$

## 4 结　论

对于系统中分段光滑系统，由于副簧存在阻尼，其分界面是不光滑的，将导致其 Floquet 乘子随参数 $\omega$ 变化的不连续，进而使得 Floquet 乘子以跳跃的形式穿越单位圆，且在单位圆上反复跳跃(如图 4 所示，围绕 1 上下波动)，造成了系统的不连续分岔，从而使系统的动力学分岔特性更加丰富。对于非连续阻尼力分段线性系统稳定性的研究，可为主副钢板弹簧悬架系统非线性振动的参数识别、稳定区域的分析研究和优化设计提供了理论依据。

## 参 考 文 献

[1] 胡海岩．分段线性系统动力学的非光滑分析[J].力学学报,1996,28(4):483-488.(Hu Haiyan. Non-smooth Analysis of Dynamics of A Piecewise Linear System. Acta Mechanic Sinica,1996,28(4):483-488（in Chinese）)

[2] 金俐 陆启韶. 非光滑动力系统 Floquet 特征乘子的计算方法[J].应用力学学报，2004,21（3）：21-26.(Jin Li, Lu Qishao. Calculation Methods of Floquet multipliers for Non-Smooth Dynamic System. Chinese Journal of Applied Mechanics,2004,21（3）：21-26（in Chinese）)

[3] 徐慧东,谢建华. 一类两自由度分段线性非光滑系统的分岔与混沌[J].

振动工程学报，2008，21（3）：279-285.(Xu Huidong,Xie Jianhua. Bifurcation and chaos of a two-degree-of-freedom non-smooth system with piecewise-linearity .Journal of Vibration Engineering, 2008，21（3）：279-285（in Chinese））

[4] 乐 源,谢建华. 两自由度碰撞振动系统的 Poincaré 映射的对称性及分岔[J].振动工程学报，2008，21（4）：276-380.(Yue Yuan,Xie Jianhua. Symmetry of the Poincaré map and bifurcations of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. Journal of Vibration Engineering，2008，21（4）：276-380（in Chinese））

[5]Sagar Deshpande, Sudhir Mehta, G. Nakhaie Jazar. Optimization of secondary suspension of piecewise linear vibration isolation systems[J]. International Journal of Mechanical Sciences , 2006, 48: 341-377

[6]R. I. Leine, D. H. van Campen. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems[J]. Archive of Applied Mechanics, 2002, 72: 238-246

[7]R. I. Leine, D. H. van Campen, and B. L. van De Vrande. Bifurcations in Nonlinear Discontinuous Systems[J]. Nonlinear Dynamics, 2000, 23:105-164.

[8] 于雯, 贾启芬, 刘习军等. 汽车分段线性悬架系统的运动稳定性分析[J]. 机械科学与技术, 2005, 24(3):327-334.(YU Wen, JIA Qi-fen, LIU Xi-jun, etc. Motion Stability Analysis of Piecewise-Linear Vehicle Suspension System[J] MECHANICAL SCIENCE AND TECHNOLOGY, 2005, 24(3):327-334(in Chinese))

[9] 胡海岩，金栋平. 机械系统的碰撞振动与控制[R].中国科学基金：学科进展，1998，21（4）：276-380.(Hu Haiyan, Jin Dongping. Advances in vibro-impact Dynamics and Control of Mechanical Systems. China Science fund,1998，21（4）：276-380（in Chinese））

[10] Leine R I, Nijmeijer H. Dynamics and Bifurcation of Non-Smooth Mechanical Systems[M].Berlin;Springer,2004:101—118.

# BIFURCATION RESEARCH FOR PIECEWISE LINEAR SYSTEM INVOLVED IN DISCONTINUOUS DAMPING FORCE

REN Chuan-bo, ZHOU Ji-lei

(School of Traffic and Vehicle Engineering, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China)

**Abstract:** Based on some truck suspension model consisting of primary and subsidiary spring, a two-degree-of-freedom system with piecewise-linearity involved in discontinuous damping force is established The stroboscopic Poincaré map is established，and saltation matrix is deduced by zero-time discontinuity mapping method at the interface. The result indicates that the saltation matrix is independent on spring rate, but is not independent on damping force. The Neimark-Sacker bifurcation point is investigated by the numerical calculation. The research of bifurcation and chaos can contribute to optimizing design in impacting systems.

**Keywords:** discontinuous damping force，piecewise-linearity，Poincaré map，saltation，bifurcation

**Received** ，Revised

1）The project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province (ZR2009FL016)

2）E-mail：chuanboren@sina.com , zhjl521@163.com