

# 一种基于物理机制的后继屈服面演化模型<sup>1)</sup>

付 强<sup>2)</sup> 刘 芳 张 晶 梁乃刚

(中国科学院力学研究所非线性力学国家重点实验室, 北京 100190)

**摘要** 考虑滑移为晶体塑性的主要变形机制, 推广晶体塑性理论至多晶体, 建立滑移构元模型, 研究了后继屈服面的移动和畸变等演化规律. 基于滑移构元的潜在硬化和包氏效应的影响, 后继屈服面的前端凸出, 尾部缩进, 呈现“前凸后扁”的特征. 计算了单轴拉伸、纯扭转和拉-扭组合比例 / 非比例加载下的后继屈服面演化过程, 与已有实验结果相符合.

**关键词** 滑移构元模型, 后继屈服面, 包氏效应, 潜在硬化, 非比例加载

**中图分类号:** O344.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2010)05-0880-09

## 引 言

在经典塑性理论中, 屈服面及其演化占有至关重要的地位. 经典塑性理论认为存在屈服面, 且塑性应变率的方向始终垂直于屈服面, 屈服面位置及形状的确直接决定着塑性应变的预测. 对于初始屈服面, Tresca 屈服准则、von Mises 屈服准则和双剪理论已得到广泛的认可<sup>[1]</sup>. 而对于后继屈服面的演化, 大量实验<sup>[2-17]</sup>显示, 它们不仅会膨胀、移动, 同时也会发生畸变. 经典理论中的等向、随动及混合硬化模型均无法描述后继屈服面的畸变. 能否合理解释这些实验现象, 精确描述材料的屈服面演化过程是对理论模型预测材料塑性行为能力的一种全面考查. 另一方面, 在工程应用中, 汽车制造等现代工业生产常常遇到板材成型中的回弹问题. 为了使构件达到所需要的形状, 关键之一是得到成型过程中回弹量的大小, 这需要系统研究材料的加载和卸载过程, 即需要确定材料的屈服面演化过程<sup>[17]</sup>.

回顾屈服面演化的典型实验<sup>[2-17]</sup>, 后继屈服面的膨胀、移动和畸变等与屈服点的定义紧密相关<sup>[18]</sup>. 一般采用比例极限或小的偏移应变, 如  $5\sim 10\mu\varepsilon$ , 后继屈服面会出现移动和畸变; 而采用回推屈服点或大的偏移应变, 如 0.2%, 得到的后继屈服面则会膨胀, 也有研究者采用的偏移应变介于上述两者之间, 后继屈服面会同时出现膨胀、移动和畸变. 多数实验采用了小偏移应变来定义屈服点. 一

方面可以较真实地反映材料从弹性进入塑性屈服; 另一方面, 只需用一根试件即可测得当前加载路径下的所有后继屈服面. 根据该屈服定义方法, 后继屈服面发生移动和畸变, 前端凸出, 尾部缩进, 呈现“前凸后扁”的特征.

为了精确描述屈服面及其演化过程, 许多学者对此进行了理论分析研究<sup>[19-24]</sup>. 目前, 典型的理论分析方法可分为代数法和几何法两种<sup>[21,24]</sup>. 在代数法中, 使用各向异性材料张量定义的屈服函数来描述后继屈服面的膨胀、移动和畸变等现象; 在几何法中, 后继屈服面的移动、畸变等主要采用几何上的拟合来实现, 即通过几何映射的方法, 将后继屈服面分为前端和尾部两部分来分别计算. 虽然一些模型可以再现后继屈服面的演化过程, 但存在描述复杂、材料参数繁多且缺乏明确物理意义, 或者无法描述非比例加载下的屈服面演化等问题<sup>[21,24]</sup>.

本文考虑滑移为晶体塑性的主要变形机制, 将晶体塑性理论推广至多晶体, 建立滑移构元模型. 滑移构元是大量随机分布的滑移系按取向的分组, 它描述了不同晶粒内部具有相同运动学特点的滑移系宏观平均性质. 与经典塑性理论不同, 滑移构元模型不需要预先设定屈服面, 而是给出每个滑移构元的屈服条件, 以及正负分解剪应力临界值等状态变量的演化方程, 综合所有滑移构元的力学响应即可计算出材料的屈服面. 利用滑移构元模型分析了

2009-05-14 收到第 1 稿, 2010-02-02 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10572140, 10721202).

2) E-mail: fuq@lnm.imech.ac.cn

后继屈服面移动和畸变等现象. 采用几何法, 基于滑移构元的潜在硬化和包氏效应的影响, 后继屈服面由一个“凸出”的前端和一个“平坦”的尾部组成. 为了验证模型的有效性, 分别计算了: (1) 304 不锈钢薄壁圆管在单轴拉伸、纯扭转和拉-扭组合比例加载; (2) 1100-0 纯铝圆管在拉-扭组合非比例加载下的后继屈服面演化, 并与已有实验结果<sup>[9,13]</sup>进行对比.

### 1 滑移构元模型

由位错导致的滑移是多晶金属材料的主要塑性变形机制之一. 实验表明, 对于任意方向加载的多晶金属试件, 尽管细观滑移不规则, 但最早出现的滑移线一般总是剪应力最大的剖面与试件表面的交线. 因此, 从宏观平均意义来看, 多晶材料内的任意剖面都可能作为滑移面, 而沿滑移面的滑动是大量微小组分群体行为的平均<sup>[25]</sup>. 推广单晶滑移系至多晶体, 称为滑移构元. 滑移构元是大量随机分布的滑移系按取向的分组, 它描述了不同晶粒内部具有相同运动学特点的滑移系宏观平均性质. 类似的简化最早可追溯到 20 世纪 40 年代末, Batdorf 与 Budiansky<sup>[26]</sup>提出的简单滑移模型, 即假设每个晶粒只有一个滑移系. Wang<sup>[27]</sup>也提出了一种宏观滑移理论, 具有 8 个滑移系, 数值计算简洁有效. 在前期工作中<sup>[28-31]</sup>, 滑移构元模型基本框架的建立已完成.

基于滑移构元的多晶塑性本构关系与传统晶体塑性理论类似, 下面给出小变形情形下的塑性本构关系建立过程. 图 1 所示为滑移构元模型的离散示意图, 记第  $\alpha$  个滑移构元的滑移面法向单位矢量为  $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ , 滑移方向单位矢量为  $\mathbf{s}^{(\alpha)}$ , 定义二阶张量

$$\mathbf{P}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}(\mathbf{s}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{n}^{(\alpha)} + \mathbf{n}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{s}^{(\alpha)}) \quad (1)$$

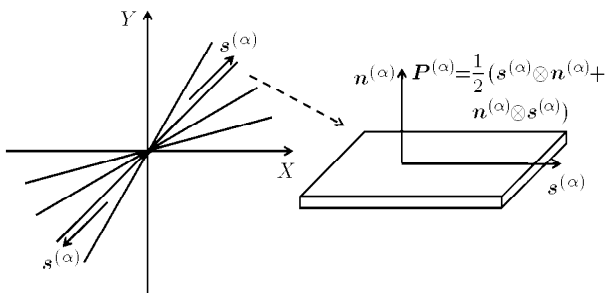


图 1 滑移构元模型示意图

Fig.1 A schematic diagram for the slip-component model

$\mathbf{P}^{(\alpha)}$  称为滑移构元的取向张量. 对于同一个滑移面, 沿正反两个方向滑移, 具有相同的取向张量, 计作一个滑移构元.

第  $\alpha$  个滑移构元的分解剪应力  $\tau^{(\alpha)}$  与宏观应力场  $\boldsymbol{\sigma}$  的关系 (率形式) 为

$$\dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{P}^{(\alpha)} \quad (2)$$

由广义 Schmid 定理, 当第  $\alpha$  个滑移构元的分解剪应力  $\tau^{(\alpha)}$  达到其临界值  $\tau_{\pm cr}^{(\alpha)}$  时, 滑移构元处于临界状态 (率无关情形); 当  $\tau_{-cr}^{(\alpha)} < \tau^{(\alpha)} < \tau_{+cr}^{(\alpha)}$  时, 滑移构元处于非临界状态. 对于进一步的增量变形, 为了使滑移构元继续开动, 分解剪应力的增量必须跟上其临界值的增量; 另一方面, 建立临界分解剪应力率与滑移剪切率的关系, 较常见的是线性关系. 因此, 当临界状态的滑移构元持续开动时, 有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} = b \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} \\ \dot{\gamma}^{(\alpha)} > 0 \quad (\dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} > 0) \\ \dot{\tau}^{(\alpha)} = \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} = b \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} \\ \dot{\gamma}^{(\alpha)} < 0 \quad (\dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} < 0) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

对于临界状态的滑移构元停止开动时, 有

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}^{(\alpha)} \leq \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} = b \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} \\ \dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0 \quad (\dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} > 0) \\ \dot{\tau}^{(\alpha)} \geq \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} = b \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} \\ \dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0 \quad (\dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} < 0) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

对非临界状态的滑移构元, 恒有  $\tau_{-cr}^{(\alpha)} < \tau^{(\alpha)} < \tau_{+cr}^{(\alpha)}$ , 或

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} = b \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} \\ \dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0 \quad (\dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} > 0) \\ \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)}, \quad \dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)} = b \dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)} \\ \dot{\gamma}^{(\alpha)} = 0 \quad (\dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} < 0) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中,  $h_{\alpha\beta}$  为滑移硬化模量, 表示第  $\beta$  个滑移构元滑移一单位时对第  $\alpha$  个滑移构元临界分解剪应力的影响.  $h_{\alpha\alpha}$  为自硬化模量,  $h_{\alpha\beta} (\alpha \neq \beta)$  为潜在硬化模量.  $b$  为包氏效应影响系数, 表示滑移

构元主动方向上分解剪应力临界值的改变对被动方向上分解剪应力临界值的影响. 式 (3)~(5) 中, 当  $\dot{\gamma}_{cr}^{(\alpha)} = \sum_{\beta} h_{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{(\beta)} > 0$  时, 第  $\alpha$  个滑移构元正分解剪应力临界值  $\tau_{+cr}^{(\alpha)}$  由于硬化而改变, 正方向为主动方向, 此时, 根据包氏效应影响系数  $b$ , 可得其负分解剪应力临界值  $\tau_{-cr}^{(\alpha)}$ ; 反之, 亦然.

材料宏观塑性应变是所有滑移构元滑移的结果, 即

$$\dot{\epsilon}^p = \sum_{\alpha} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \mathbf{P}^{(\alpha)} \quad (6)$$

根据式 (2), (3) 和 (6), 可得塑性应变和应力之间的关系为

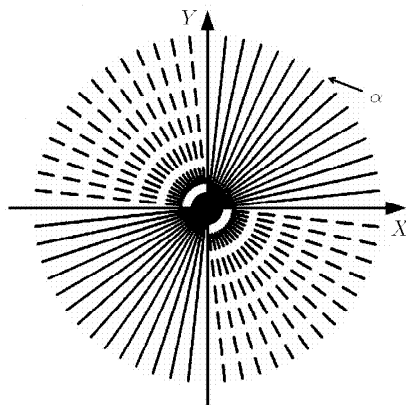
$$\dot{\epsilon}^p = \mathbf{S}^p : \dot{\sigma} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} [h_{\alpha\beta}]^{-1} \mathbf{P}^{(\alpha)} \otimes \mathbf{P}^{(\beta)} : \dot{\sigma} \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{S}^p$  为塑性柔度张量, 上式对所有开动的滑移构元求和.

## 2 基于滑移构元的后继屈服面演化模型

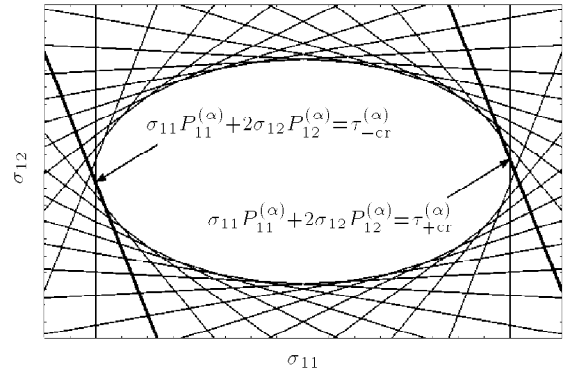
滑移构元模型可以描述任意二维应力空间的屈服面演化, 大多数实验也在此范围. 为了方便起见, 限制在正应力-剪应力空间.

在多晶体中, 滑移构元的数目主要影响屈服面的光滑度. 采用的数目越多, 屈服面越光滑, 计算所耗的时间也越多. 图 2(a) 为滑移构元平面离散示意图, 在  $0^{\circ} \sim 180^{\circ}$  内均匀取 30 个滑移构元, 与  $x$  轴夹角分别为  $6^{\circ}, 12^{\circ}, \dots, 180^{\circ}$ . 可以证明, 当两个滑移构元夹角成  $90^{\circ}$  时, 它们的取向张量  $\mathbf{P}$  相反, 因此实际上采用 15 个独立的滑移构元 (图 2(a) 中第 1,3 象限).



(a) 滑移构元平面离散示意图

(a) The configuration of planar discrete slip components



(b) 基于滑移构元的屈服面模型示意图

(b) A typical example of yield surface predicted by the slip-component model

图 2

Fig.2

基于滑移构元的屈服面演化模型, 需要预先设定每个滑移构元的屈服条件. 模型采用的 (后继) 屈服准则为, 滑移构元上的分解剪应力达到其临界值时, 滑移构元开动, 材料屈服. 第  $\alpha$  个滑移构元的屈服函数可表示为

$$f^{(\alpha)} = \tau^{(\alpha)} - \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} = \sigma : \mathbf{P}^{(\alpha)} - \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} = 0 \quad (8)$$

在正应力-剪应力空间, 上式可写为

$$\sigma_{11} P_{11}^{(\alpha)} + 2\sigma_{12} P_{12}^{(\alpha)} = \tau_{\pm cr}^{(\alpha)} \quad (9)$$

由上式可知, 对于第  $\alpha$  个滑移构元 (图 2(a) 中所示), 其两个状态变量 (正负分解剪应力临界值  $\tau_{+cr}^{(\alpha)}$  和  $\tau_{-cr}^{(\alpha)}$ ) 可以确定屈服面的两个边界 (图 2(b) 中所示). 这样, 遍历所有滑移构元形成的内包络面就是屈服面. 因此, 若确定了所有滑移构元的状态变量  $\tau_{+cr}$  和  $\tau_{-cr}$ , 屈服面就被唯一确定.

### 2.1 初始屈服面 (initial yield surface, IYS)

对于初始屈服面, 滑移构元的两个状态变量为其正负初始分解剪应力临界值  $\tau_{+cr}^0$  和  $\tau_{-cr}^0$ , 且一般有  $\tau_{-cr}^0 = -\tau_{+cr}^0$ . 图 3 为模型计算出的初始屈服面 (为方便起见, 只显示由包络线形成的屈服面, 下同), 很显然与 Tresca 准则一致.

滑移构元正初始分解剪应力临界值  $\tau_{+cr}^0$  由拉伸屈服应力  $\sigma_s$  或剪切屈服应力  $\tau_s$  确定

$$\tau_{+cr}^0 = \frac{\sigma_s}{2} \quad \text{或} \quad \tau_{+cr}^0 = \tau_s \quad (10)$$

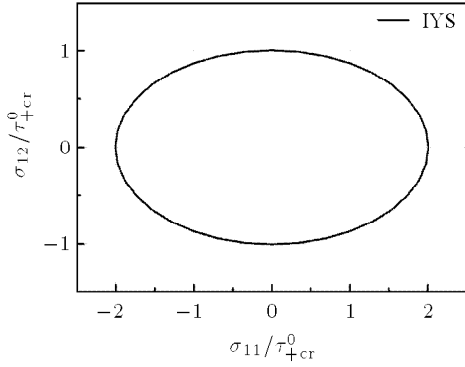


图 3 基于滑移构元的初始屈服面

Fig.3 The initial yield surface predicted by the slip-component model

### 2.2 后继屈服面 (subsequent yield surface, SYS)

对于后继屈服面，影响滑移构元状态变量  $\tau_{+cr}$  和  $\tau_{-cr}$  的因素很多，模型主要考虑了滑移构元的潜在硬化和包氏效应影响来描述后继屈服面的变形。

#### 2.2.1 潜在硬化的影响

确定后继屈服面的演化，即需要确定材料的硬化准则。晶体滑移的硬化模式很多，其中，梁-王-徐耦合硬化模式<sup>[32]</sup>为

$$h_{\alpha\beta} = h + \bar{h} \mathbf{P}^{(\alpha)} : \mathbf{P}^{(\beta)} + h_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \quad (11)$$

式中第 1 项表征 Taylor 各向同性硬化，第 2 项反映随动耦合硬化，第 3 项则表征位错塞积引起的切线模量硬化。由于采用小偏移应变定义屈服点，后继屈服面一般不出现膨胀的现象，即没有各向同性硬化 ( $h = 0$ )，因此，上式可进一步写为

$$\left. \begin{aligned} h_{\alpha\alpha} &= h_s^{(\alpha)} \mathbf{P}^{(\alpha)} : \mathbf{P}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} h_s^{(\alpha)} \\ h_{\alpha\beta} &= h_l^{(\alpha,\beta)} \mathbf{P}^{(\alpha)} : \mathbf{P}^{(\beta)}, \quad \alpha \neq \beta \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

其中， $h_s^{(\alpha)}$  和  $h_l^{(\alpha,\beta)}$  分别为自硬化系数和潜在硬化系数。

考虑到采用幂次硬化模型可以较好地描述宏观的应力应变关系，因此，对于滑移构元的响应关系，类似地采用幂指数的自硬化系数，即对于开动的滑移构元有

$$h_s^{(\alpha)} = c(|\dot{\gamma}^{(\alpha)}| + \gamma_0)^{m-1} \quad (13)$$

式中  $c$  和  $m$  是自硬化参数，通过拟合应力-塑性应变曲线来标定。 $\gamma_0$  由初始分解剪应力临界值来确定， $\gamma_0 = \left(\frac{2m}{c} \tau_{+cr}^0\right)^{1/m}$ 。对于未开动的滑移构元，认为其自硬化系数为无穷大。

考虑先开动的滑移构元影响次开动或未开动的滑移构元，以及硬化矩阵的对称性，定义潜在硬化系数为

$$h_l^{(\alpha,\beta)} = q \min(h_s^{(\alpha)}, h_s^{(\beta)}) \quad (14)$$

其中， $q$  反映了潜在硬化影响的大小，一般情况下， $0 \leq q \leq 1$ 。

图 4 为单轴拉伸下，考虑不同  $q$  值计算出的后继屈服面，其中包氏效应影响系数均为  $b = 1.0$ 。可以看出后继屈服面的尾部缩进相同，而前端具有不同程度的“角”。当  $q = 0$  时，即只考虑自硬化影响，屈服面的前端具有最大程度的“尖角”；当  $q = 1.0$  时，与初始屈服面相比，后继屈服面前端没有变化，只是沿加载方向的平移；当  $0 < q < 1.0$  时，后继屈服面前端处于上述两个边界之间。因此，模型可以根据不同的  $q$  值，得到后继屈服面前端不同程度的“角”。需要说明的是，当包氏效应影响系数  $b \neq 0$  时， $q$  对后继屈服面尾部的变形也有影响，但对前端的影响更明显。

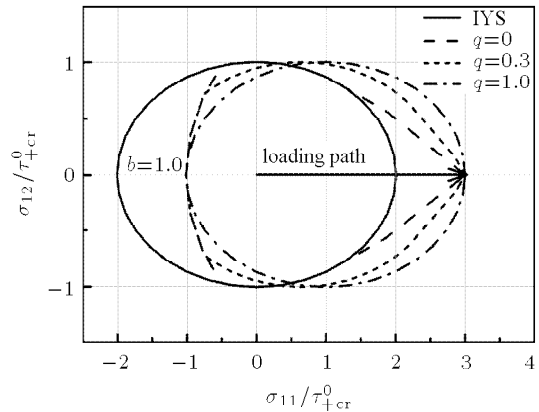


图 4 单轴拉伸下考虑不同潜在硬化参数  $q$  计算出的后继屈服面

Fig.4 The effect of latent-hardening parameter  $q$  on subsequent yield surfaces under uniaxial tension

#### 2.2.2 包氏效应影响

包氏效应是指拉伸时的硬化引起压缩时弱化的现象。对于滑移构元，包氏效应反映了主动方向的分解剪应力临界值改变对被动方向的分解剪应力临界值的影响。定义包氏效应影响系数  $b$  为被动方向上临界值的增量与主动方向上临界值增量的比值，即

$$\left. \begin{aligned} b^{(\alpha)} &= \frac{\dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)}}{\dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)}}, \quad \dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} > 0 \\ b^{(\alpha)} &= \frac{\dot{\tau}_{+cr}^{(\alpha)}}{\dot{\tau}_{-cr}^{(\alpha)}}, \quad \dot{\tau}_{cr}^{(\alpha)} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

理论上每个滑移构元的包氏效应影响系数  $b$  均不同, 且是其滑移量的函数  $b^{(\alpha)} = b^{(\alpha)}(\gamma^{(\alpha)})$ . 在小变形情况, 考虑每个滑移构元的包氏效应影响系数  $b$  均相同, 且为常数. 图 5 是单轴拉伸下, 潜在硬化参数为一定值时 ( $q = 0.3$ ), 考虑不同  $b$  值计算出的后继屈服面. 可以看出, 后继屈服面的前端一致, 而尾部的缩进程度不同. 当  $b = 0$  时, 即为不考虑包氏效应影响;  $b = 1$ , 为经典包氏效应. 当  $b$  为其他值时, 统称为附加包氏效应 [29]. 包氏效应影响系数  $b$  一般没有确定的取值区间, 由后继屈服面的尾部缩进距离与前端移动距离的比值来确定.

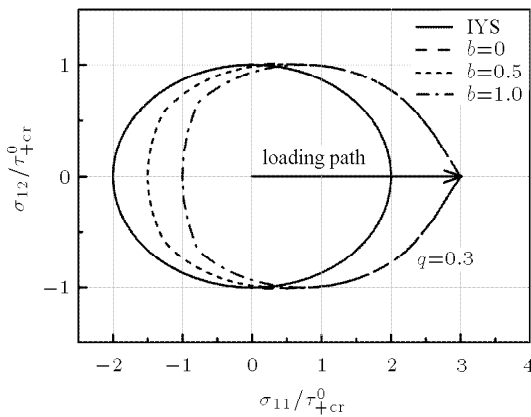


图 5 单轴拉伸下考虑不同包氏效应影响系数  $b$  计算出的后继屈服面

Fig.5 The effect of Bauschinger effect parameter  $b$  on the subsequent yield surfaces under uniaxial tension

上述内容显示, 模型将后继屈服面分为前端和尾部两部分来分别描述其变形和移动, 即:

(1) 对于前端的变形, 由滑移构元的潜在硬化参数  $q$  来控制.

(2) 对于前端的移动 (由尖点处的应力值确定), 分为预应变加载和预应力加载两种情况. 预应变加载下, 由给定的预应变确定出对应的应力状态, 即为尖点处的应力值. 滑移构元的自硬化、潜在硬化参数以及包氏效应影响系数 (反向加载时) 均对前端位置的确定有影响. 预应力加载下, 由给定的预应力直接确定尖点处的应力值.

(3) 对于尾部的变形, 同样受潜在硬化参数  $q$  的影响 ( $b \neq 0$  时). 但  $q$  对前端变形的影响更明显.

(4) 对于尾部的移动, 由滑移构元的包氏效应影响系数  $b$  决定.

### 3 算 例

为了验证模型的有效性, 分别计算了单轴拉伸、纯扭转和拉-扭组合比例 / 非比例加载下的屈服面演化, 并与已有实验结果进行对比 [9,13].

#### 3.1 比例加载

Wu 等 [13] 采用 3 根试件 (YA, YS 和 YB) 进行了系统的屈服面演化实验研究, YA 和 YS 分别为预应变单轴拉伸和纯扭转加载; YB 为预应力拉-扭组合加载, 在  $(\sigma_{11}-\sigma_{12})$  应力空间, 沿着  $45^\circ$  的方向加载, 定义屈服点为偏移应变  $5 \mu\epsilon$ .

模型参数  $\tau_{+cr}^0 = 75 \text{ MPa}$  由试件 YS 和 YB (实验未测得试件 YA 的结果) 的不同方向的屈服应力综合考虑来确定. 图 6 为计算得到的初始屈服面与实验结果的对比.

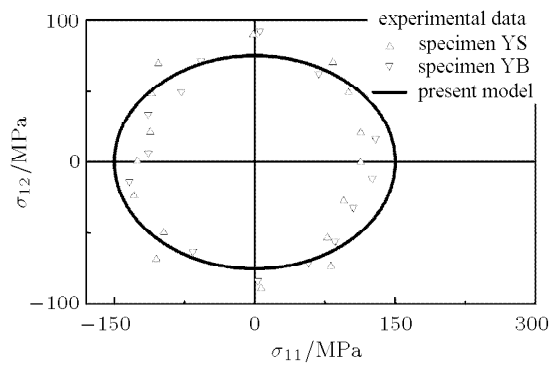


图 6 模型计算的初始屈服面与实验结果对比

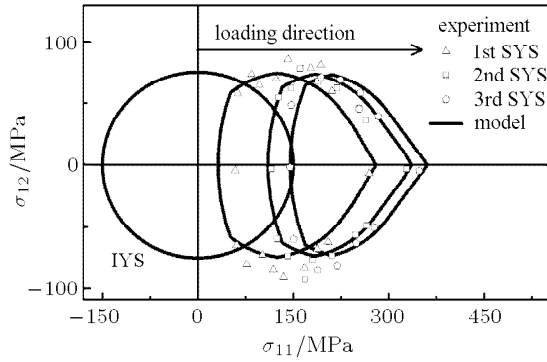
Fig.6 Comparison of the initial yield surface between the model and experiments

根据单轴拉伸下的后继屈服面变形确定出  $q$  和  $b$ , 然后通过拟合应力-塑性应变曲线, 确定自硬化参数  $c$  和  $m$ , 标定出的模型参数如表 1 所示. 单轴拉伸情况为预应变加载, 根据给定的预应变计算出对应的应力状态, 即为后继屈服面前端的应力值. 图 7(a) 和图 7(b) 所示分别为加载和卸载时, 单轴拉伸下的后继屈服面演化计算结果与实验结果的对比.

表 1 计算中所采用的模型参数

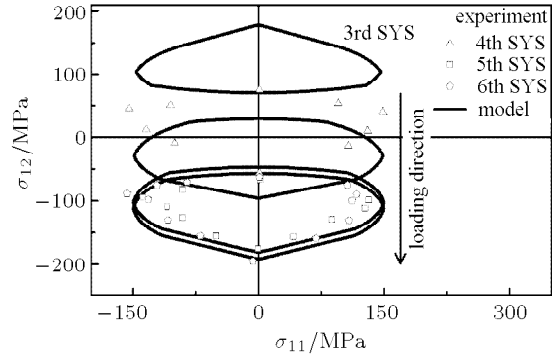
Table 1 Parameters for simulation of the evolution of the yield surfaces of annealed AISI type 304 stainless steel

$\tau_{+cr}^0 / \text{MPa}$	$c / \text{MPa}$		$m$	$q$	$b$	
	Loading	Unloading			Loading	Unloading
75	51.0	86.0	0.1	0.3	1.4	0.9



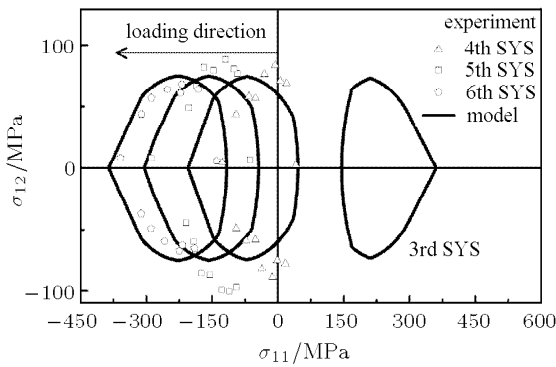
(a) 加载

(a) Initial loading



(b) 卸载

(b) Unloading conditions

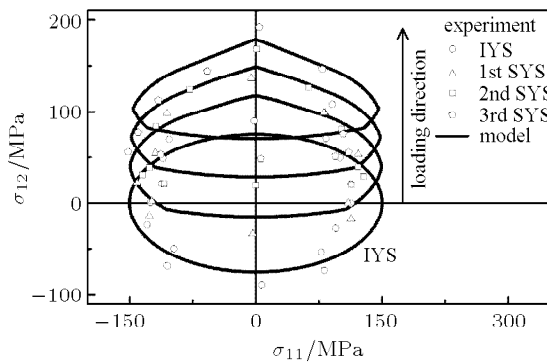


(b) 卸载

(b) Unloading conditions

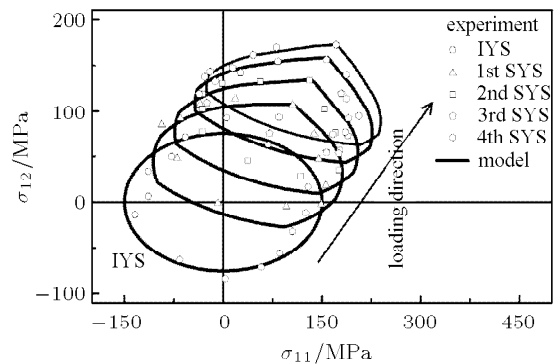
图 7 单轴拉伸下，模型计算的屈服面演化结果与实验结果的对比  
Fig.7 Comparisons between experiments and predicted results under tension for the evolution of yield surfaces

对于预应变纯扭转加载情况，根据标定的模型参数以及给定的预应变，计算出对应的应力状态，即为后继屈服面前端的应力值。然后，分别计算加载和卸载时的后继屈服面演化，并与实验结果对比，如图 8(a) 和图 8(b) 所示。



(a) 加载

(a) Initial loading



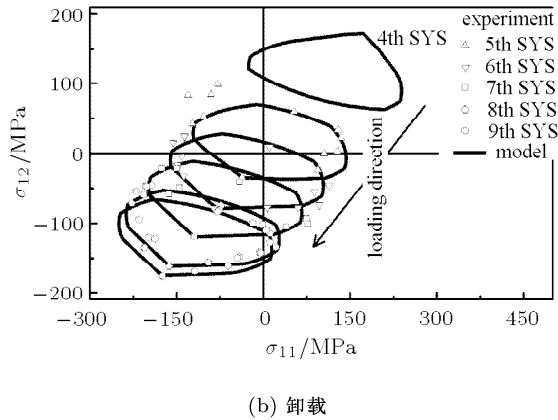
(a) 加载

(a) Initial loading

图 8 纯扭转下，模型预测的屈服面演化结果与实验结果的对比  
Fig.8 Comparisons between experiments and predicted results under pure torsion for the evolution of yield surfaces

对于预应力拉-扭组合加载，首先根据给定的预应力直接确定后继屈服面前端的应力值。然后利用标定的模型参数计算加载和卸载时的后继屈服面演化，并与实验结果对比，如图 9(a) 和图 9(b) 所示。  
总体来看，模型计算结果与实验结果符合较一致，模型较好地描述出后继屈服面的移动以及“前凸后扁”的特征。另一方面，实验结果与模型计算结果，都没有观察到交叉效应，即后继屈服面没有垂直于加载方向的横向收缩。对于纯扭转加载，计算结果与实验结果的误差相比较较大，这主要是因为试

图 9 拉-扭组合加载下，模型预测的屈服面演化结果与实验结果的对比  
Fig.9 Comparisons between experiments and predicted results under combined axial-torsional loading condition for the evolution of yield surfaces



(b) Unloading conditions

图 9 拉-扭组合加载下, 模型预测的屈服面演化结果与实验结果的对比 (续)

Fig.9 Comparisons between experiments and predicted results under combined axial-torsional loading condition for the evolution of yield surfaces (continued)

件 YA 与 YS 的材料性质本身存在的差异较大 [13]. 模型参数远远少于 Yeh 等的内时理论模型 [24] 所采用的参数, 后者对于不同的加载路径, 需要重新标定其模型参数.

### 3.2 非比例加载

Phillips 等 [9] 采用 1100-0 纯铝圆管进行了拉-扭非比例加载下的屈服面演化实验. 预应力加载路径如图 10 中虚线所示. 定义屈服点为偏移应变  $2\sim 3\mu\epsilon$ . 模型参数  $\tau_{+cr}^0 = 8.0$  MPa, 由试件不同方向的初始屈

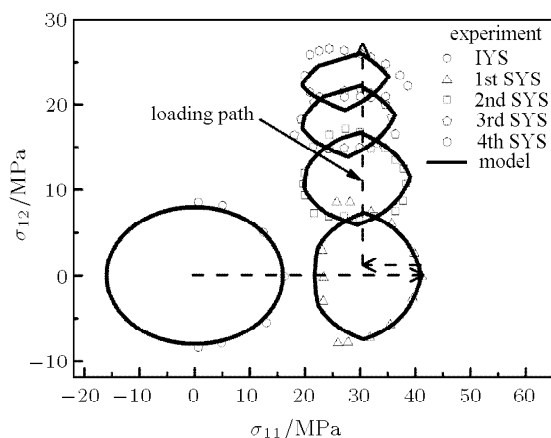


图 10 拉-扭组合非比例加载下, 模型计算的屈服面演化结果与实验结果的对比

Fig.10 Comparisons between experiments and predicted results under combined axial-torsional loading condition for the evolution of yield surfaces

服应力综合考虑来确定. 根据单轴拉伸下的第 1 个后继屈服面变形确定  $q$  和  $b$ , 通过拟合单轴拉伸应力-塑性应变曲线, 确定自硬化参数  $c$  和  $m$ , 标定出的模型参数如表 2 所示.

表 2 计算中所采用的模型参数

Table 2 Parameters for simulation of the evolution of the yield surfaces of 1100-0 aluminum

$\tau_{+cr}^0$ /MPa	$c$ /MPa	$m$	$q$	$b$
8.0	5.7	0.078	0.72	1.45

基于标定的模型参数计算预应力拉-扭组合加载下的后继屈服面演化, 图 10 是模型计算结果与实验结果的对比. 结果显示, 模型计算结果与实验结果符合得较一致. Chiang 等 [21] 的分布单元模型与 Yeh 等 [24] 的内时理论模型都无法描述非比例加载下的屈服面演化, 因为它们无法考虑加载路径的改变或者缺乏塑性变形历史信息. 在滑移构元模型中, 每个滑移构元的状态变量 (正负临界分解剪应力值) 在每一加载步进行更新. 不同的滑移构元, 由于取向张量的不同, 经历的变形历史也不同, 最终的状态变量也会不同. 因此可以描述复杂加载路径下的屈服面演化.

### 4 总 结

介绍了晶体塑性理论的推广——滑移构元模型, 建立了基于滑移构元的后继屈服面演化模型. 本模型不需要预先设定屈服面, 只需要给定每个构元的屈服条件及其分解剪应力临界值等状态变量的演化方程就可以计算出屈服面. 分析了实验中后继屈服面出现“前凸后扁”特征的力学机制, 分别得到了是由于滑移构元不同程度潜在硬化和滑移构元不同大小包氏效应影响的结论. 计算了单轴拉伸、纯扭转和拉-扭组合比例及非比例加载下的后继屈服面演化, 并与已有的典型实验结果吻合较好, 初步证明了滑移构元模型的有效性. 滑移构元模型基于材料塑性变形的物理机制, 数学表述简单, 模型参数少, 且具有明确物理意义, 便于标定. 本文的研究限于小变形的情形, 对于有限变形情况需要进一步研究.

致谢 感谢台湾中大机械工程研究所叶维馨 (Yeh, W.C.) 教授和 University of Iowa 吴汉津 (Wu, H.C.) 教授提供的 304 不锈钢薄壁圆管的实验数据.

### 参 考 文 献

- 1 王仁, 黄文彬, 黄筑平. 塑性力学引论. 北京大学出版社, 1992 (Wang Ren, Huang Wenbin, Huang Zhuping. Introduction of Plasticity. Beijing: Peking University Press, 1992 (in Chinese))
- 2 Naghdi PM, Essengurg F, Koff W. An experimental study of initial and subsequent yield surfaces in plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 1958, 25(2): 201-209
- 3 Ivey HJ. Plastic stress-strain relations and yield surfaces for aluminium alloys. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1961, 3(1): 15-31
- 4 Bertsch PK, Findley WN. An experimental study of subsequent yield surface-corners, normality, Bauschinger and allied effects. In: Proceedings of the Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics, New York: ASME, 1962. 893-907
- 5 Phillips A, Liu CS, Justusson JW. An experimental investigation of yield surfaces at elevated temperatures. *Acta Mechanica*, 1972, 14(2): 119-146
- 6 Phillips A, Tang JL. The effect of loading path on the yield surface at elevated temperatures. *International Journal of Solids Structures*, 1972, 8: 463-474
- 7 Phillips A, Tang JL, Ricciuti M. Some new observations on yield surfaces. *Acta Mechanica*, 1974, 20(1-2): 23-39
- 8 Phillips A, Moon H. An experimental investigation concerning yield surfaces and loading surfaces. *Acta Mechanica*, 1977, 27(1-4): 91-102
- 9 Phillips A, Lee CW. Yield surfaces and loading surfaces. experiments and recommendations. *International Journal of Solids Structures*, 1979, 15: 715-729
- 10 Phillips A, Lu WY. An experimental investigation of yield surfaces and loading surfaces of pure aluminum with stress-controlled and strain-controlled paths of loading. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the ASME*, 1984, 106(4): 349-354
- 11 Phillips A, Das PK. Yield surfaces and loading surfaces of aluminum and brass: An experimental investigation at room and elevated temperatures. *International Journal of Plasticity*, 1985, 1(1): 89-109
- 12 Helling DE, Miller AK, Stout MG. An experimental investigation of the yield loci of 1100-0 aluminum, 70:30 brass, and an overaged 2024 aluminum alloy after various prestrains. *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the ASME*, 1986, 108: 313-320
- 13 Wu HC, Yeh WC. On the experimental determination of yield surfaces and some results of annealed 304 stainless steel. *International Journal of Plasticity*, 1991, 7(8): 803-826
- 14 Khan AS, Wang XW. An experimental study on subsequent yield surface after finite shear prestraining. *International Journal of Plasticity*, 1993, 9(8): 889-905
- 15 Brown AA, Casey J, Nikkel DJ. Experiments conducted in the context of the strain-space formulation of plasticity. *International Journal of Plasticity*, 2003, 19(11): 1965-2005
- 16 苏莉, 张克实, 张光等. 多晶铜后继屈服面的试验分析. *机械强度*, 2008, 30(4): 565-570(Su Li, Zhang Keshi, Zhang Guang, et al. Experimental analysis on subsequent yield surface of polycrystalline copper. *Journal of Mechanical Strength*, 2008, 30(4): 565-570(in Chinese))
- 17 Khan AS, et al. Evolution of subsequent yield surfaces and elastic constants with finite plastic deformation. Part-I: A very low work hardening aluminum alloy (Al6061-T6511). *International Journal of Plasticity*, 2009, 25(9): 1611-1625
- 18 张泽华, 吕桂英. 塑性本构关系的实验研究, 见: 王仁, 黄克智, 朱兆祥. 塑性力学进展, 北京: 中国铁道出版社, 1988. 144-178(Zhang Zehua, Lü Guiying. The experimental study of plastic constitutive relations. In: Wang Ren, Hwang Kehchih, Zhu Zhaoxiang, eds. The Advances in Plasticity. Beijing: China Railway Publishing House, 1988. 144-178(in Chinese))
- 19 Kalidindi SR, Schoenfeld SE. On the prediction of yield surfaces by the crystal plasticity models for fcc polycrystals. *Materials Science and Engineering A*, 2000, 293(1-2): 120-129
- 20 Francois M. A plasticity model with yield surface distortion for non proportional loading. *International Journal of Plasticity*, 2001, 17(5): 703-717
- 21 Chiang DY, Su KH, Liao CH. A study on subsequent yield surface based on the distributed-element model. *International Journal of Plasticity*, 2002, 18(1): 51-70
- 22 Mollica F, Srinivasa AR. A general framework for generating convex yield surfaces for anisotropic metals. *Acta Mechanica*, 2002, 154(1-4): 61-84
- 23 Zattarin P, Lipinski P, Rosochowski A. Numerical study of the influence of microstructure on subsequent yield surfaces of polycrystalline materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2004, 46(9): 1377-1398
- 24 Yeh WC, Lin HY. An endochronic model of yield surface accounting for deformation induced anisotropy. *International Journal of Plasticity*, 2006, 22(1): 16-38
- 25 Martin JB. Plasticity: Fundamentals and General Results. The MIT Press, 1975
- 26 Budiansky B, Dao NJ, Peter RW, et al. Experimental studies of polyaxial stress-strain laws of plasticity. In: Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics, New York: ASME, 1951. 503-511
- 27 Wang TC. Macro slip theory of plasticity for polycrystalline solids. *Acta Mechanica Sinica*, 1991, 7(4): 323-334
- 28 梁乃刚, 程品三. 多晶金属材料的三维组集式弹塑性本构模型. *力学学报*, 1990, 22(6): 680-688 (Liang Naigang, Cheng Pinsan. A 3-D composite constitutive model of elastoplasticity for polycrystalline materials. *Acta Mechanica Sinica*, 1990, 22(6): 680-688 (in Chinese))
- 29 Liang NG, Liu HQ, Wang TC. A meso elastoplastic constitutive model for polycrystalline metals based on equivalent slip systems with latent hardening. *Science in China, Ser A*, 1998, 41: 887-896
- 30 Deng SC, Liu JX, Liang NG, et al. Validation of component assembly model and extension to plasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2007, 47(3): 244-259



- 31 邓守春. 构元组集模型及其对材料弹、塑性损伤变形过程的描述. [博士论文]. 北京: 中国科学院力学研究所, 2007(Deng Shouchun. Component assembling model and its application to model material elasto-plastic damage deformation. [PhD Thesis]. Beijing: Institute of Mechanics, CAS, 2007(in Chinese))
- 32 王自强. 理性力学基础. 北京: 科学出版社, 2000. 280-286(Wang Tzuchiang. The Fundamental of Rational Mechanics. Beijing: Science Press, 2000. 280-286(in Chinese))

(责任编辑: 陶彩军)

## A PHYSICALLY MOTIVATED MODEL FOR THE EVOLUTION OF SUBSEQUENT YIELD SURFACES<sup>1)</sup>

Fu Qiang<sup>2)</sup> Liu Fang Zhang Jing Liang Naigang

(LNM, Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

**Abstract** Slip is the main plastic deformation mechanism. Considering slip is the main plastic deformation mechanism, the single crystal plasticity is extended to polycrystalline. In the present study, the single crystal plasticity is extended to polycrystalline. The slip-component model is thus set up, and the translation and distortion of subsequent yield surfaces are investigated. Based on the Bauschinger effect and latent-hardening of the slip components, the subsequent yield surface can be described that the rear part deflates and the forward part inflates so that the subsequent yield surface has a sharp front and blunt rear. The numerical simulations are performed under uniaxial, torsional and combined axial-torsional proportional/non-proportional loading conditions. The results show that the agreement between the predictions and experiments is quite satisfactory.

**Key words** slip-component model, subsequent yield surface, Bauschinger effect, latent-hardening, non-proportional loading

---

Received 14 May 2009, revised 2 February 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10572140, 10721202).

2) E-mail: fuq@lnm.imech.ac.cn