

多工况下结构鲁棒性拓扑优化设计¹⁾

罗阳军^{*,2)} 亢 战[†] 邓子辰^{*}

^{*}(西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072)

[†](大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 针对工程中存在多个随机不确定工况载荷作用的情况, 将鲁棒性设计思想引入到连续体结构拓扑优化设计, 发展和完善不确定性优化理论和计算方法. 基于概率模型和 SIMP 方法, 提出以结构柔顺度标准差最小化为目标、具有体积约束的连续体鲁棒性拓扑优化数学模型. 通过对目标函数及其灵敏度计算公式的推导, 采用数学规划法实现优化问题的求解. 数值算例验证了所提优化模型的正确性及算法的有效性, 并通过与确定性优化结果的比较, 证明鲁棒性拓扑优化能够给出结构柔顺性变异更小的材料分布.

关键词 鲁棒性, 拓扑优化, 多工况, 标准差, 灵敏度分析

中图分类号: O342, TU311.4 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2011)01-0227-08

引 言

飞机、桥梁、机械设备等工程结构在设计、制造和使用中, 不可避免地会遇到载荷变化、材料特性改变、外界环境扰动等各种不确定性, 这些都将对结构的工作性能产生重要影响, 甚至导致结构失效. 因此, 设计者们尝试在设计时就考虑不确定性因素对结构性能的影响, 基于概率统计理论来选择合理的设计变量值, 以提高结构抵御不确定量波动变化的能力. 目前关于处理不确定性的结构设计思想主要包括结构可靠性设计优化 (reliability-based design optimization, RBDO) 和鲁棒性设计优化 (robust design optimization). 两者的主要差别在于侧重点不同, 其中, 可靠性设计优化的重点在于满足可靠性约束条件, 而鲁棒性设计最小化目标是性能的变异大小.

鲁棒性设计优化的基本原则^[1]是: 通过选择合理的设计变量值, 使得在各种不确定性因素的影响下, 结构目标性能对不确定性的扰动敏感性降低. 图 1 示意性地说明了鲁棒性优化的设计理念, 它不选取使目标性能指标 (目标函数) 极小化的设计点, 而是选用目标值波动范围最小的设计点. 鲁棒性设计最早由 Taguchi^[2] 在 20 世纪 80 年代末提出用于减少产品质量波动. 随后, 许多学者在结构鲁棒性理

论方法和应用研究方面开展了大量的工作. Lee 和 Park^[3] 对比确定性优化方程, 提出以名义值和标准差最小的多目标结构鲁棒性优化方法. Sandgren 和 Cameron^[4], Youn 等^[5], Lee 等^[6] 分别采用 Monte Carlo 方法, 性能矩积分方法和尺度缩减方法进行鲁棒性设计评估. Doltsinis 等^[7], Beer 和 Liebscher^[8] 研究了具有非线性特性和动力特性的结构鲁棒性优化问题. 在应用方面, António 和 Hoffbauer^[9], Hou 等^[10] 则进行了斜交复合板, 覆盖件内板冲压的鲁棒性设计. 近期更详细的研究工作可参见 Ben-Tal^[11] 和 Beyer 等^[12] 的综述. 应该指出, 已有的鲁棒性优化研究工作均着力于设计结构的形状或尺寸大小.

随着结构优化方法和理论研究的深入以及数值

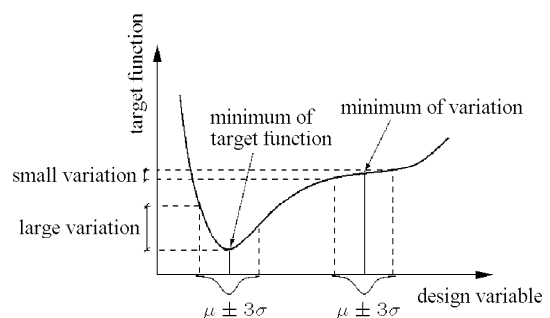


图 1 鲁棒性设计示意图

Fig.1 Schematic representation of robust design

2010-03-09 收到第 1 稿, 2010-08-30 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (51008248), 陕西省自然科学基金 (2010JQ1008) 和西北工业大学基础研究基金 (JC200936) 资助项目.

2) E-mail: yangjunluo@nwpu.edu.cn

计算能力的不断增强,人们已经不满足于仅仅根据经验初始构型来进行结构形状和尺寸设计.作为结构概念性设计的一种手段,连续体拓扑优化在设计域内寻找结构的某种最优材料分布,可为之后的详细尺寸优化提供合理的拓扑构型,有更大的经济效益.常用的拓扑优化数值方法有均匀化方法^[13]、SIMP(solid isotropic material with penalization)方法^[14-15]、ESO(evolutionary structural optimization)方法^[16]等.

有研究表明,结构参数的不确定性会对结构拓扑设计产生重要影响^[17-18].因此,有必要在结构的拓扑设计阶段考虑不确定性因素.现在,可靠性设计思想已经被用于结构拓扑优化,形成了可靠性拓扑优化设计(reliability-based topology optimization),它能根据需要的可靠性水平来寻找结构最优材料分布方案,已被用于微电子机械系统(micro-electro-mechanical systems, MEMS)^[19-20]、传热设备^[21]等多学科领域的拓扑设计.但是,目前关于鲁棒性的设计还局限于尺寸优化的层次上,在结构的拓扑设计阶段考虑鲁棒性的相关文章在国内外还未发表.

本文计划将鲁棒性设计思想引入到多工况下连续体结构拓扑优化中来,在结构概念设计阶段就考虑到所承载荷的随机波动变化,通过合理地判断材料有无,以使结构拓扑构型对存在的不确定性不敏感,从而保证最终设计出的结构具有良好可靠性和稳定性.文章基于 SIMP 模型,考虑多个随机不确定性载荷的情况,建立了以材料相对密度为设计变量、结构柔顺度标准差最小化为目标、具有体积约束的优化模型.通过推导设计灵敏度计算格式,采用移动渐近线法 MMA(method of moving asymptotes)求解优化问题.给出的数值算例验证了本文提出的优化模型及算法的有效性.

1 概率模型描述

概率模型可用于描述自然界中大多数不确定性的随机变异特征.在概率模型框架下,不确定性信息被描述为具有一定分布特征(通常为正态分布)的随机变量或随机场,结构目标性能(如结构位移、平均柔顺性、固有频率等)也是随机变量或随机场,本文采用概率分析理论来评估结构目标性能的分布情况.

假设 $\boldsymbol{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}^T$ 表示相互独立的正

态分布随机变量,记为

$$x_i \sim N(\bar{x}_i, \sigma_i^2), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

其中, $N(\cdot)$ 为正态分布符号, \bar{x}_i 和 σ_i 分别为 x_i 的期望值和标准差,则结构的目标性能可表示为随机变量 \boldsymbol{x} 的函数 $f(\boldsymbol{x})$,且服从正态分布 $N(\bar{f}, \sigma_f^2)$.这里, \bar{f} 和 σ_f 分别为目标性能函数的期望值和标准差.

许多数值方法可用来求解目标性能的分布参数,如 Monte Carlo 方法、随机有限元法等.为了方便计算处理,一般需要通过线性变换将其映射为标准正态随机变量,即

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

对于相互关联的非正态随机变量,可应用 Rosenblatt 变换^[22]进行标准化

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}^T = \\ \{ \Phi^{-1} [H_1(x_1)], \Phi^{-1} [H_2(x_2 | x_1)], \\ \dots, \Phi^{-1} [H_m(x_m | x_1, x_2, \dots, x_{m-1})] \}^T \end{aligned} \quad (3)$$

其中, $H_i(x_i | x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$ 称为边缘累积分布函数, $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态累积分布函数的反函数.通过式(3)的标准化变换后,所有不确定变量即变换为相互独立的标准正态分布变量.

2 多工况下结构鲁棒性拓扑优化问题

在整个连续体结构设计域 Ω 中,用 Ω_{solid} 表示具有实体材料的部分,结构拓扑设计可以采用以下表示设计域中某点 \boldsymbol{S} 处材料有无的离散方程式来描述

$$\chi(\boldsymbol{S}) = \begin{cases} 1, & \forall \boldsymbol{S} \in \Omega_{\text{solid}} \\ 0, & \forall \boldsymbol{S} \in \Omega \setminus \Omega_{\text{solid}} \end{cases} \quad (4)$$

连续体结构拓扑优化问题通常构造为指定设计域内给定材料体积(或结构重量)约束下的最小柔顺性(或最大刚度、最大固有频率)问题.将结构设计域进行有限元划分后,采用 SIMP 方法的插值模型,将每个单元的弹性模量表示为单元材料相对密度的指数函数,即

$$E_e = \rho_e^p E_0, \quad e = 1, 2, \dots, NE \quad (5)$$

其中, E_e 为第 e 个单元的弹性模量, $\rho_e \in [\rho_{\min}, 1]$ 为单元材料相对密度, E_0 为完全实心材料的弹性

模量, p 为惩罚因子, 用以实现对材料中间密度的惩罚, 一般取 $p \geq 3$; ρ_{\min} 是给定的材料相对密度下限, 其作用是为了避免有限元模型中单元弹性模量为零时造成数值困难. 对于多个工况载荷作用的情况, 本文将连续体结构拓扑优化表示为如下具有体积约束的各工况柔顺度之和的最小化问题

$$\left. \begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & C = \sum_{n=1}^{NC} \mathbf{F}_n^T \mathbf{d}_n \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K} \mathbf{d}_n = \mathbf{F}_n, \quad n = 1, 2, \dots, NC \\ & \sum_{e=1}^{NE} \rho_e V_e \leq f_r \cdot V_0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, 2, \dots, NE \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中, 目标函数 C 为结构各工况柔顺度之和, NC 为总工况数, \mathbf{F}_n 和 \mathbf{d}_n 分别为第 n 个工况下结构节点总载荷向量和位移向量, \mathbf{K} 为结构总刚度矩阵. 设计变量 $\boldsymbol{\rho} = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{NE}]$ 为单元的材料相对密度向量, V_e 和 V_0 分别为第 e 个单元的体积和设计域总体积, f_r 为给定的实心材料体积比.

鲁棒性设计同时强调目标函数的鲁棒性和约束函数的可靠性. 它一方面要求目标函数对各参数的波动变化不敏感, 即目标函数具有鲁棒性; 另一方面需要保证在各参数波动变化条件下, 设计点仍在可行域内, 即约束函数具有可靠性. 但对于仅考虑外载荷不确定性的拓扑优化问题, 体积约束条件与载荷不确定参数的波动无关, 因此, 结构鲁棒性拓扑优化问题可以定义为

$$\left. \begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & \sigma\{C\} = \sigma \left\{ \sum_{n=1}^{NC} \mathbf{F}_n^T(\mathbf{x}_n) \mathbf{d}_n(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{x}_n) \right\} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{K}(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{d}_n(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{x}_n) = \mathbf{F}_n(\mathbf{x}_n), \quad n = 1, 2, \dots, NC \\ & \sum_{e=1}^{NE} \rho_e V_e \leq f_r \cdot V_0 \\ & 0 < \rho_{\min} \leq \rho_e \leq 1, \quad e = 1, 2, \dots, NE \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中, $\mathbf{x}_n \in \mathbf{R}^{m_n}$ 为工况 n 时的载荷不确定性参数向量, m_n 为工况 n 时的不确定参数个数, $\sigma\{C\}$ 是结构总柔顺度的标准差, 代表了外载荷大小随机变化时目标函数的波动程度.

式 (7) 中结构工况总柔顺度的标准差无疑可采用 Monte Carlo 方法进行统计求得, 但计算量太大, 在优化问题中不可行. 本文针对载荷大小的随机不确定性情况, 采用随机有限元方法, 以实现对各工况

柔顺度标准差计算公式的推导.

将结构总柔顺度方程在载荷不确定参数期望值 $\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{NC}\}$ 处进行一阶 Taylor 级数展开, 得到

$$\begin{aligned} C = C(\boldsymbol{\rho}, \bar{\mathbf{x}}) + \left. \frac{\partial C}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\bar{\mathbf{x}}} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = & \\ & \sum_{n=1}^{NC} \mathbf{F}_n^T(\bar{\mathbf{x}}_n) \mathbf{d}_n(\boldsymbol{\rho}, \bar{\mathbf{x}}_n) + \\ & \sum_{n=1}^{NC} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial \mathbf{x}_n} \mathbf{d}_n + \mathbf{F}_n^T \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \right) \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_n} (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n) \end{aligned} \quad (8)$$

静载荷作用下的线性有限元平衡方程为 $\mathbf{K} \mathbf{d}_n = \mathbf{F}_n$, 对平衡方程关于各载荷不确定参数求导

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial \mathbf{x}_n} = \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{x}_n}, \quad n = 1, 2, \dots, NC \quad (9)$$

将式 (9) 代入式 (8) 中, 得到

$$\begin{aligned} C = \sum_{n=1}^{NC} \mathbf{F}_n^T(\bar{\mathbf{x}}_n) \mathbf{d}_n(\boldsymbol{\rho}, \bar{\mathbf{x}}_n) + & \\ \sum_{n=1}^{NC} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial \mathbf{x}_n} \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_n^T \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \mathbf{x}_n} \right) \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_n} (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n) = & \\ \sum_{n=1}^{NC} \mathbf{F}_n^T(\bar{\mathbf{x}}_n) \mathbf{d}_n(\boldsymbol{\rho}, \bar{\mathbf{x}}_n) + & \\ 2 \sum_{n=1}^{NC} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial \mathbf{x}_n} \mathbf{d}_n \right) \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_n} (\mathbf{x}_n - \bar{\mathbf{x}}_n) = & \\ \sum_{n=1}^{NC} \mathbf{F}_n^T(\bar{\mathbf{x}}_n) \mathbf{d}_n(\boldsymbol{\rho}, \bar{\mathbf{x}}_n) + & \\ 2 \sum_{n=1}^{NC} \sum_{i=1}^{m_n} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial x_{n,i}} \mathbf{d}_n \right) \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_n} (x_{n,i} - \bar{x}_{n,i}) \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $x_{n,i}$ 表示第 n 个工况时第 i 个不确定参数.

假设经过 Rosenblatt 变换后, 各载荷随机变量相互独立, 根据概率统计的计算公式, 结构总柔顺度的方差表示为

$$\text{var}\{C\} = 4 \sum_{n=1}^{NC} \sum_{i=1}^{m_n} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial x_{n,i}} \mathbf{d}_n \right) \Big|_{\bar{\mathbf{x}}_n} \cdot \text{var}\{x_{n,i}\} \right\} \quad (11)$$

因此

$$\begin{aligned} \sigma\{C\} &= \sqrt{\text{var}\{C\}} = \\ &= 2\sqrt{\sum_{n=1}^{NC} \sum_{i=1}^{m_n} \left\{ \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial x_{n,i}} \mathbf{d}_n \right)^2 \Big|_{\bar{x}_n} \cdot \sigma_{x_{n,i}}^2 \right\}} = \\ &= 2\sqrt{\sum_{n=1}^{NC} \sum_{i=1}^{m_n} \left\{ (d_{x_{n,i}})^2 \Big|_{\bar{x}_n} \cdot \sigma_{x_{n,i}}^2 \right\}} \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $d_{x_{n,i}} = \frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial x_{n,i}} \mathbf{d}_n$ 表示第 n 个工况下, 第 i 个随机载荷 $x_{n,i}$ 作用点处的位移值, $\sigma_{x_{n,i}}$ 为不确定载荷 $x_{n,i}$ 的标准差.

3 目标函数灵敏度分析

连续体结构鲁棒性拓扑优化问题 (7) 可采用移动渐进线方法 [23] 来求解, 因此需要进行式 (12) 所示目标函数对设计变量的灵敏度分析. 灵敏度分析主要有两种方法, 即直接法和伴随法. 直接法的计算量与设计变量的个数直接相关, 而伴随法主要计算量在于求解伴随方程, 与设计变量个数无关. 对于以单元相对密度为设计变量的拓扑优化问题, 设计变量个数多, 不宜采用直接法求解. 因此, 本文采用伴随法, 实现结构总柔顺度标准差对设计变量 (材料相对密度) 的灵敏度分析.

根据式 (12), 当目标函数对第 e 个设计变量求导时, 利用复合函数的求导法则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma\{C\}}{\partial \rho_e} &= \frac{4 \sum_{n=1}^{NC} \sum_{i=1}^{m_n} \left\{ \left(d_{x_{n,i}} \frac{\partial d_{x_{n,i}}}{\partial \rho_e} \right) \Big|_{\bar{x}_n} \cdot \sigma_{x_{n,i}}^2 \right\}}{\sigma\{C\}}, \\ e &= 1, 2, \dots, NE \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

考虑在第 n 个工况下不确定参数取其期望值 \bar{x}_n 时, 结构有限元平衡方程为

$$\mathbf{K} \mathbf{d}_n = \mathbf{F}_n \quad (14)$$

将式 (14) 对设计变量求导得

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{d}_n \quad (15)$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial d_{x_{n,i}}}{\partial \rho_e} &= \frac{\partial \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial x_i} \mathbf{d}_n \right)}{\partial \rho_e} = \frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial \rho_e} = \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}_n^T}{\partial x_{n,i}} \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{d}_n \right), \quad i = 1, 2, \dots, m_n \end{aligned} \quad (16)$$

引入伴随向量 $\lambda_{n,i} (i = 1, 2, \dots, m_n)$, 令其分别满足

$$\mathbf{K} \lambda_{n,i} = \frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial x_{n,i}}, \quad i = 1, 2, \dots, m_n \quad (17)$$

代入式 (16), 得到

$$\frac{\partial d_{x_{n,i}}}{\partial \rho_e} = \lambda_{n,i}^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}_n}{\partial \rho_e} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{d}_n \right), \quad i = 1, 2, \dots, m_n \quad (18)$$

这里考虑外载荷与结构形状无关, 有 $\partial \mathbf{F}_n / \partial \rho_e = \mathbf{0}$. 由于结构总刚度矩阵对设计变量的导数可通过单元刚度矩阵的导数组装而形成, 因此式 (18) 可进一步写为

$$\frac{\partial d_{x_{n,i}}}{\partial \rho_e} = -(\lambda_{n,i}^e)^T \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial \rho_e} \mathbf{d}_n^e, \quad i = 1, 2, \dots, m_n \quad (19)$$

其中, $\lambda_{n,i}^e$ 和 \mathbf{d}_n^e 分别表示单元伴随向量和单元位移向量, \mathbf{K}^e 表示单元刚度矩阵.

因此, 结合式 (13) 和式 (19), 便可得到结构柔顺度方差对于设计变量的灵敏度公式如下

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma\{C\}}{\partial \rho_e} &= \\ &= \frac{-4 \sum_{n=1}^{NC} \sum_{i=1}^{m_n} \left\{ \left(d_{x_{n,i}} (\lambda_{n,i}^e)^T \frac{\partial \mathbf{K}^e}{\partial \rho_e} \mathbf{d}_n^e \right) \Big|_{\bar{x}_n} \cdot \sigma_{x_{n,i}}^2 \right\}}{\sigma\{C\}}, \\ e &= 1, 2, \dots, NE \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

可见, 目标函数对设计变量的灵敏度只需要求解 $\sum_{n=1}^{NC} m_n$ 个伴随方程即可全部得到, 具有较高计算效率.

4 数值算例

4.1 平面吊架结构拓扑设计

如图 2 所示的某平面吊架结构矩形设计域, 设计域上边和右边固支, 尺寸为 $20\text{m} \times 20\text{m}$, 厚度为 0.05m . 实体材料的弹性模量为 200GPa , 泊松比为 0.3 . 矩形域下边正中央具有水平和竖直两集中载荷作用, 载荷大小 F_1, F_2 均服从正态随机分布, 期望值为 $\bar{F}_1 = 50\text{kN}, \bar{F}_2 = 200\text{kN}$, 标准差为 $\sigma_1 = \sigma_2 = 2\text{kN}$. 考虑结构承受两种工况作用, 工况 1 作用水平载荷 F_1 , 工况 2 作用竖直载荷 F_2 . 给定材料体积比为 0.15 , 对该两工况结构进行拓扑优化设计.

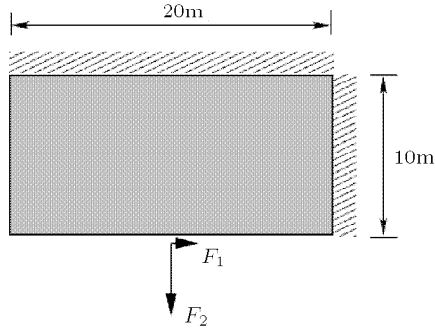


图 2 吊架结构的设计域

Fig.2 Design domain for a hanger structure

将整个设计域离散为 800(40×20) 个 8 节点平面应力有限元单元. 选取惩罚因子 $p = 3$, 初始设计中材料相对密度为 0.5. 图 3 所示分别为确定性和鲁棒性拓扑优化结果的材料相对密度灰度云图, 黑色区域代表结构优化后材料保留的部位. 与确定性结果相比, 为降低不确定性因素对结构柔顺度的影响程度, 鲁棒性结果的拓扑形式发生了显著变化. 采用 2×10^6 次 Monte Carlo 模拟进行结果验证, 两种设计结果的柔顺度频率分布情况见图 4(a) 和图 4(b) 所示, 其中, 确定性设计的柔顺度期望值为 35.03 Nm, 标准差为 0.94 Nm; 鲁棒性设计的柔顺度期望值为 35.91 Nm, 标准差减少为 0.71 Nm. 可见, 尽管后者设计柔顺度期望值略有增加, 但其标准差更小, 因而具有更好的鲁棒性.

为考察不确定参数随机特征对结构拓扑的影响, 在其他条件不变的情况下, 本文分别对第 1 个工况载荷标准差 $\sigma_1 = 5 \text{ kN}, 10 \text{ kN}$ 的情况进行鲁棒性拓扑设计. 随着载荷标准差的逐渐增大, 图 5(a) 和图 5(b) 显示最优拓扑形状逐步发生改变. 表 1 所列为各种情况下优化设计的 Monte Carlo 模拟结果, 当 $\sigma_1 = 2 \text{ kN}$ 时, 柔顺度标准差比确定性设计减少 24.5%, 而当 $\sigma_1 = 10 \text{ kN}$ 时, 柔顺度标准差减少了 66.8%, 说明在不确定性变异程度越大时, 鲁棒性拓扑优化的效果越明显. 图 6 给出了各种情况下的优化迭代历程, 表明本文鲁棒性拓扑优化算法收敛性良好.

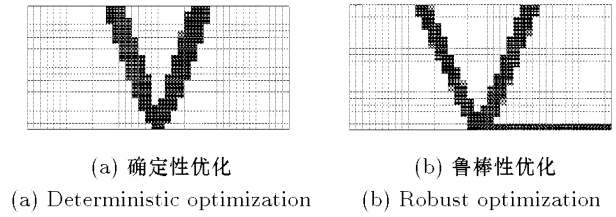
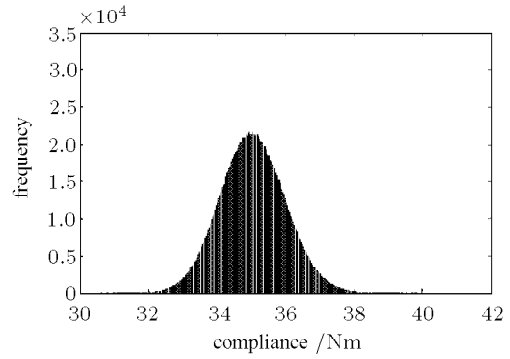


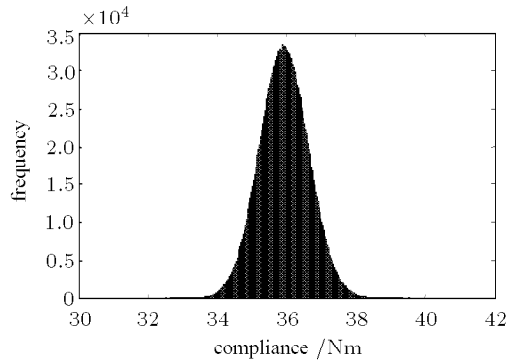
图 3 拓扑优化结果比较

Fig.3 Comparison of optimal layouts



(a) 确定性设计

(a) Deterministic solution



(b) 鲁棒性设计

(b) Robust solution

图 4 结构柔顺度频率分布 (Monte Carlo 模拟)

Fig.4 Frequency distribution of structural compliance (by Monte Carlo simulation)

表 1 结构柔顺度 Monte Carlo 模拟结果比较

Table 1 Comparison of results for the structural compliance by Monte Carlo simulation

Case	Deterministic design		Robust design		Reduction ratio of standard deviation
	Mean value/ Nm	Standard deviation/ Nm	Mean value/ Nm	Standard deviation/ Nm	
$\sigma_1 = 2 \text{ kN}$	35.03	0.94	35.91	0.71	24.5%
$\sigma_1 = 5 \text{ kN}$	35.12	2.04	30.28	0.92	54.9%
$\sigma_1 = 10 \text{ kN}$	35.41	4.01	36.69	1.33	66.8%

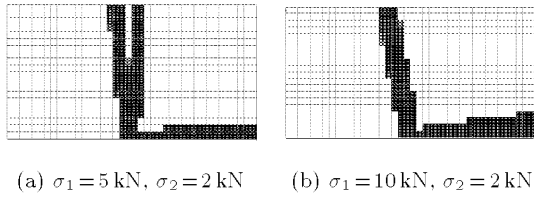


图 5 不同随机特征时鲁棒性拓扑优化结果

Fig.5 Robust optimal layouts under different stochastic characteristics

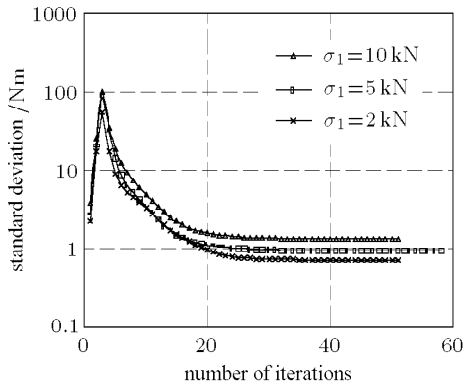


图 6 鲁棒性拓扑优化迭代历史

Fig.6 Iteration history of robust topology optimization

4.2 悬臂梁结构拓扑设计

某悬臂梁结构的设计区域如图 7(a) 所示, 该正方形设计域左边固支, 尺寸为 30 m×30 m, 所采用实体材料的弹性模量 $E_0 = 200 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.3$. 结构共受两种工况作用, 工况 1 在结构右上角作用大小为 F_1 的竖直向上载荷, 有 $F_1 \sim N(1000 \text{ N}, 20^2)$; 工况 2 在结构右下角作用大小为 F_2 的竖直向下载荷, 分布特征为 $F_2 \sim N(1000 \text{ N}, 50^2)$.

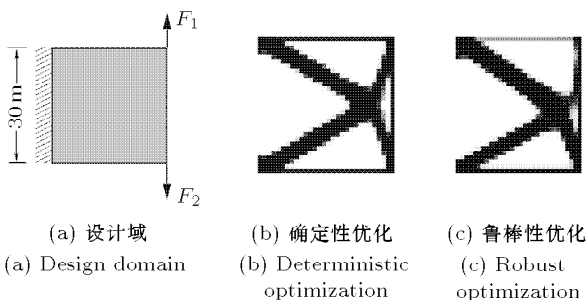


图 7 悬臂梁结构拓扑优化

Fig.7 Topology optimization of a cantilever beam

拓扑优化设计中, 将整个设计域共划分为 900(30×30) 个 8 节点平面应力单元, 选取惩罚因子 $p = 3$, 初始材料相对密度为 0.5, 给定材料体积比为 0.4. 图 7(b) 为确定性多工况优化结果, 若考虑工况载荷不确定性, 其结构总柔顺度标准差为 1.85×10^4 ;

图 7(c) 为鲁棒性优化结果, 其结构总柔顺度标准差为 1.78×10^4 . 比较发现, 鲁棒性优化的最优拓扑不再具有确定性优化所呈现的上下对称性, 由于工况 2 的载荷变异系数更大, 鲁棒性优化的最优解通过对支撑工况 2 的杆件进行加粗, 以减少结构总柔顺度在不确定载荷随机变化下的扰动程度.

4.3 悬臂梁结构拓扑设计

如图 8 所示, 某三维空间梁结构的设计区域为一立方体, 尺寸为 1.0 m×0.4 m×0.4 m, 实体材料的弹性模量 $E_0 = 1.333 \text{ MPa}$, 泊松比 $\nu = 0.333$. 结构底部 4 个角点铰支, 共受两种工况作用, 工况 1 在结构顶部正中间作用一个大小为 F_1 的向下载荷, $F_1 \sim N(50 \text{ N}, 10^2)$; 工况 2 在结构顶部距离两端 $l = 0.125 \text{ m}$ 的位置同时作用两个大小均为 F_2 的载荷, 分布特征为 $F_2 \sim N(200 \text{ N}, 2^2)$.

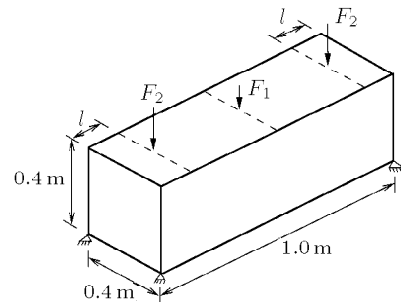


图 8 设计域

Fig.8 Design domain

考虑结构及载荷的对称性, 取设计域的一半进行分析设计, 设定单元尺寸 0.025 m, 共划分为 $20 \times 16 \times 16$ 个 8 节点六面体单元, 选取惩罚因子 $p = 4$, 初始材料相对密度为 0.5, 给定材料体积比为 0.15. 图 9(a) 和图 9(b) 分别为确定性优化和本文鲁棒性

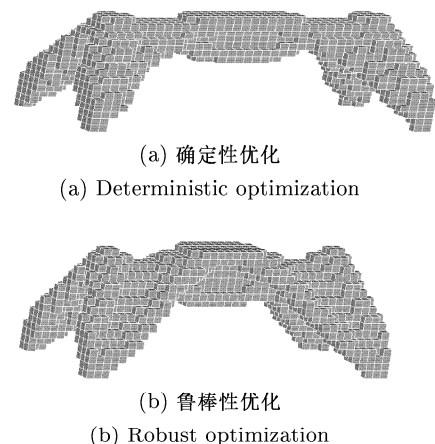


图 9 拓扑优化结果比较

Fig.9 Comparison of optimal layouts

优化结果. 同样, 由于确定性设计以结构柔顺度最小为设计目标, 而鲁棒性设计以柔顺度标准差最小化为目标, 相同体积约束下两者的最优拓扑模型表现出明显不同, 后者在中部具有更多的斜向支撑. 算例进一步证明本文优化模型的正确性和算法的有效性.

5 结 论

本文研究了多工况下连续体结构鲁棒性拓扑优化设计问题的数学模型和数值算法. 通过考虑载荷的随机不确定性因素, 建立了以工况柔顺度之和的标准差最小化为目标、具有体积约束的优化数学模型. 文章利用随机有限元和伴随法实现目标函数计算及其对设计变量的灵敏度分析, 并采用 MMA 算法求解优化问题. 算例结果表明, 采用鲁棒性拓扑优化方法, 可以给出结构柔顺度波动更小的材料分布形式. 这种新的结构拓扑设计理念不同于传统的结构确定性拓扑优化, 具有重要的理论和实际工程意义.

参 考 文 献

- Doltsinis I, Kang Z. Robust design of structures using optimization methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(23-26): 2221-2237
- Taguchi G. Taguchi on Robust Technology Development: Bringing Quality Engineering Upstream. New York: ASME Press, 1993
- Lee KH, Park GJ. Robust optimization considering tolerances of design variables. *Computers and Structures*, 2001, 79(1): 77-86
- Sandgren E, Cameron TM. Robust design optimization of structures through consideration of variation. *Computers and Structures*, 2002, 80(20-21): 1605-1613
- Youn BD, Choi KK, Yi K. Performance moment integration (PMI) method for quality assessment in reliability-based robust design optimization. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, 2005, 33(2): 185-214
- Lee I, Choi KK, Du L, et al. Dimension reduction method for reliability-based robust design optimization. *Computers and Structures*, 2008, 86(13-14): 1550-1562
- Doltsinis I, Kang Z, Cheng GD. Robust design of non-linear structures using optimization methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, 194(12-16): 1779-1795
- Beer M, Liebscher M. Designing robust structures — a nonlinear simulation based approach. *Computers and Structures*, 2008, 86(10): 1102-1122
- António CC, Hoffbauer LN. An approach for reliability-based robust design optimization of angle-ply composites. *Composite Structures*, 2009, 90: 53-59
- Hou B, Wang W, Li S, et al. Stochastic analysis and robust optimization for a deck lid inner panel stamping. *Materials and Design*, 2010, 31: 1191-1199
- Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust optimization — methodology and applications. *Mathematical Programming*, 2002, 92(3): 453-480
- Beyer HG, Sendhoff B. Robust optimization - A comprehensive survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(33-34): 3190-3218
- Bendsøe MP, Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1988, 71(2): 197-224
- Bendsøe MP. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1989, 1(4): 193-202
- Zhou M, Rozvany GIN. The COC algorithm II: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1991, 89(1-3): 309-336
- Xie YM, Steven GP. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, 1993, 49(5): 885-896
- Guest JK, Igusa T. Structural optimization under uncertain loads and nodal locations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2008, 198(1): 116-124
- Kharmanda G, Olhoff N. Reliability-based topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization*. Denmark: Institute of Mechanical Engineering, Aalborg University, December 2001
- Allen M, Rauli M, Maute K, et al. Reliability-based analysis and design optimization of electrostatically actuated MEMS. *Computers and Structures*, 2004, 82(13-14): 1007-1020
- Maute K, Frangopol DM. Reliability-based design of MEMS mechanisms by topology optimization. *Computers and Structures*, 2003, 81(8-11): 813-824
- Moon H, Kim C, Wang S. Reliability-based topology optimization of thermal systems considering convection heat transfer. In: *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*. Albany, New York, 2004
- Rosenblatt M. Remarks on a multivariate transformation. *Annals of Mathematical Statistics*, 1952, 23(3): 470-472
- Svanberg K. The method of moving asymptotes — A new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24(2): 359-373

ROBUST TOPOLOGY OPTIMIZATION DESIGN OF STRUCTURES WITH MULTIPLE LOAD CASES¹⁾

Luo Yangjun^{*,2)} Kang Zhan[†] Deng Zichen^{*}

^{*}(School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

[†](State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract In practical engineering, the structural performance always exhibit some degree of variations due to the fact that the applied loads fluctuate dramatically throughout its service life-cycle. Thus, the need is highlighted to account for uncertainties in topology optimization stage of the structural design. Conventional deterministic topology optimization searches for minimum compliance without considering the uncertainties in operating processes. Recently, the robust structural design has attracted intensive attentions because it can reduce the variability of structural performance. However, existing robust design methods are confined to the size and shape optimization problems. This paper aims to incorporate the robust design strategy into the continuum topology optimization problem under multiple uncertain load cases by minimizing variation of the objective performance. Following the SIMP approach, an artificial isotropic material model with penalization for elastic constants is assumed and elemental relative density variables are used for describing the structural layout. The considered robust topology optimization problem is thus formulated as to find the optimal structural topology that minimizes the standard deviation of structural total compliance under the constraint on material volume. To avoid the difficulties associated with directly evaluating the standard deviation of the structural compliance, a convenient computing formula of the objective function is presented based on the stochastic finite element method. In addition, an adjoint variable method is employed for the efficient sensitivity analysis of the objective function. Then, the gradient based optimization algorithm (Method of Moving Asymptotes, MMA) is used to update the design variables in the optimization loop. Finally, three numerical examples for topology optimization of 2D and 3D structures illustrate the applicability and the validity of the present model as well as the proposed numerical techniques. The computational results reveal that the robust topology optimization could yield a material layout with less variation of structural compliance than the conventional deterministic approach. The novelty of the proposed robust topology optimization approach lies in that it introduces the conception of robustness into earlier stage of the structural design, which may be considered as especial useful in some circumstances.

Key words robustness, topology optimization, multiple load cases, standard deviation, sensitivity analysis

Received 9 March 2010, revised 30 August 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (51008248), the Natural Science Basic Research Plan in Shaanxi Province of China (2010JQ1008) and the NPU Foundation for Fundamental Research (JC200936).

2) E-mail: yangjunluo@nwpu.edu.cn