

周期性多孔材料等效剪切模量与尺寸效应研究¹⁾

张卫红²⁾ 骆金威 戴高明 张 进

(西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室, 西安 710072)

摘要 提出了以圆筒扭转力学模型为基础, 预测周期性多孔材料等效剪切模量及其研究尺寸效应的一种简单有效计算方法. 以方形孔和圆形孔两种典型多孔材料为例进行了数值计算求解; 同时, 建立了几何参数随胞体尺寸缩放因子 n 的解析关系, 证明了两种构型的周期性多孔材料的等效剪切模量均随尺寸缩放因子 n 的增大而减小. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 即胞体尺寸相对整体结构无限小时, 多孔材料的等效剪切模量趋近收敛于一个恒定值; 当胞体的材料体分比增大时, 多孔材料等效剪切模量也随之增大. 此外, 依据周期性多孔材料的结构对称特性, 使用胞体子结构有限元计算模型进行等效剪切模量及其尺寸效应的预测, 极大地提高了计算效率.

关键词 周期性多孔材料, 等效剪切模量, 尺寸效应, 材料体分比, 胞体子结构

中图分类号: 0341 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2011)01-0144-10

引 言

蜂窝夹芯材料以其高比强度、高比刚度、良好的减震吸能和吸音性能日益受到众多学者和工程技术人员的关注与青睐, 在航空航天如火箭和导弹弹体结构、液体储存罐、潜艇舱体等结构中具有广泛

的应用. 因此, 开展蜂窝夹芯材料的力学性能研究具有十分重要的学术意义和工程应用价值. 蜂窝夹芯结构一般由上下蒙皮和夹芯组成, 如图 1 所示^[1]. 其中上下蒙皮主要承受弯曲载荷; 夹芯结构通常由波纹、褶皱或者开孔轻质材料组成, 主要承担剪切载荷.

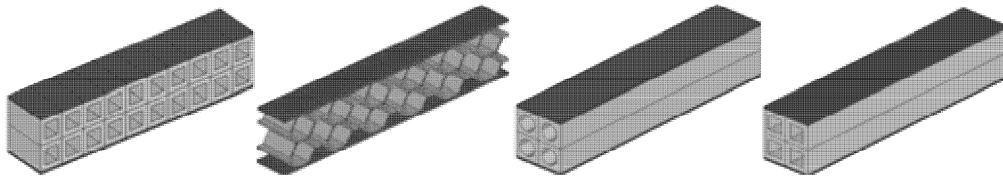


图 1 具有不同构型的周期性多孔蜂窝材料

Fig.1 Periodical cellular materials with different configurations

目前, 有关夹层材料的力学行为研究国内外学者已做了大量的工作. Gibson 等^[2]采用 Timoshenko 梁理论建立了等壁厚六角形夹芯蜂窝模型在面内拉压与剪切作用下的变形模式, 导出了等效弹性常数 $E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ 的计算公式, 并进行了实验验证, 发现理论和实际的误差较大, 特别是等效剪切模量 G_{xy} 的数值偏小达 20% 以上. 而 G_{xy} 是蜂窝夹芯结构的一个重要物性参数, 直接影响到蜂窝材料设计的准确性. 王颖坚^[3]认为 Gibson 的剪切变形模型的不合理性在于不

满足平衡条件. 为此, 通过假设各截面弯矩相等, 建立了满足平衡条件的等壁厚蜂窝平芯在面内剪力作用下的变形模式, 推导出新的 G_{xy} 计算公式, 其精度虽然有所改善, 但又比实验偏高. 富明慧等^[4]认为 Gibson 公式在计算弹性矩阵时忽略了蜂窝壁板的变形刚度, 在重新考虑蜂窝壁板伸缩变形对面内刚度影响的基础上, 提出一种修正 Gibson 公式的简化方案. 此外, Evans 等^[5]采用数值计算和实验验证相结合的方法研究了夹芯微结构构型对结构性能的影响, 提出通过优

2009-11-17 收到第 1 稿, 2010-03-22 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金项目 (10925212, 90916027) 和 111 项目 (B07050) 资助.

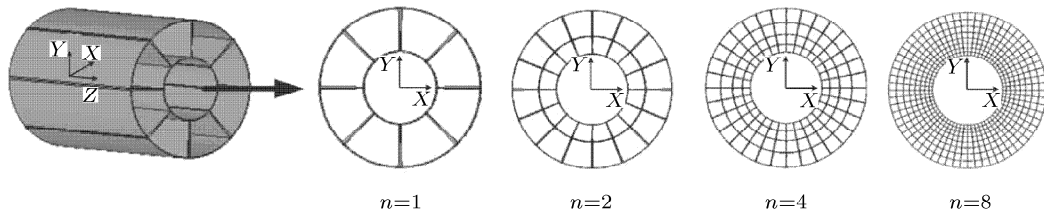
2) E-mail: zhangwh@nwpu.edu.cn

化微结构构型来改善夹芯结构设计思路。

然而，上述方法的一个共同特点就是无法反映材料胞的尺寸效应，即计算获得的等效弹性常数与材料胞尺寸的大小无关，仅取决于胞微结构的构型与材料体分比。换言之，上述方法对于材料胞的尺寸不敏感，仅当材料胞相对其组成的宏观结构的尺寸足够小时，此类模型与方法在实际应用中才有效；而当胞尺寸与宏观结构尺寸在同一数量级范围时，计算结果将不再真实。

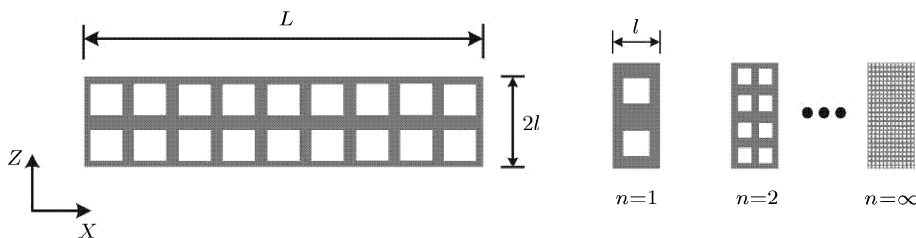
为了形象说明尺寸效应，图 2 假设结构的宏观尺寸、组成宏观结构的微结构构型和体分比保持恒定。当材料胞随着尺寸缩放因子 n 的增大逐渐变小时，宏观结构的等效剪切模量以及加载后的力学响应将发生变化，说明对于具有同样材料体分比与构型的胞，随着其尺寸的变化，等效弹性常数也会随之发生变化。关于这类问题，Onck 等 [6] 阐述了尺寸效应产生的两种原因。一是当试件尺寸一定时，由于胞尺寸的变化引起试件边界上多孔材料的胞壁的约束状况发生了变化；二是当胞尺寸一定时，试件尺寸的变化改变了试件边界上表面胞的数量与分布状况。并对蜂窝六边形结构轴向加载、局部失效、剪切工况下的尺寸效应进行了研究。Tantikom 等 [7] 对周期排列圆孔形体胞结构进行了

压缩实验研究，同样证实了尺寸效应的存在以及对等效杨氏模量的影响。发现当试样长度与宽度不变且胞沿高度方向阵列的数目小于 5 层时 ($L/d < 5$ ，其中 d 为胞尺寸， L 为宏观测试样件的高度)，不同蜂窝层数的试件所得到的应力-应变曲线在线弹性阶段的曲线斜率，即等效弹性模量，存在显著的差异。Lestari 等 [8] 提出了基于动力学响应的蜂窝夹芯梁结构的等效杨氏模量和剪切模量的逆向求解方法，根据一阶固有频率实验测试结果并采用 Timoshenko 梁模型理论，建立了等效杨氏模量和剪切模量计算与固有频率的函数关系；通过逐渐增加梁的长度，而非相对减小胞尺寸的间接方式反映了等效杨氏模量和剪切模量与胞尺寸的依赖关系。发现当梁长度相对胞尺寸满足 $L/d > 7$ 时，模量趋于一个定值，验证了胞的尺寸效应。其他学者 [9-11] 也有类似的工作。此外，Wang 与 McDowell [12] 开展了蜂窝夹芯圆筒的优化设计。孙士平等 [13] 采用基于超单元子结构概念的尺度关联一体化设计方法开展了平面蜂窝夹芯结构与循环对称多孔材料圆环结构的拓扑优化设计研究。以宏观结构的最大刚度为目标函数，优化结果表明尺度关联的一体化设计方法能够有效地完成蜂窝构型的拓扑优化设计，揭示了材料表征胞尺寸对蜂窝构型优化结果的影响。



(a) 循环对称多孔圆筒结构

(a) Cellular hollow cylinder with cyclic symmetry



(b) 平面多孔结构

(b) Planar cellular structure

图 2 两类周期性多孔结构及其尺寸效应示意图

Fig.2 Illustration of two kinds of cellular structures and size effects

然而,以上工作在预测理论与方法上对等效剪切模量及尺寸效应尚缺乏深入系统的研究.作为本文的重点,提出了薄壁圆筒扭转模型以及应用体胞子结构进行有限元分析计算的方法.数值计算结果说明,该方法简单实用,能有效揭示周期性多孔材料的等效剪切模量随体胞尺寸缩放因子 n 的变化规律.

1 周期性多孔材料的圆筒扭转模型与等效剪切模量的计算

1.1 基本假设

为了预测周期性多孔材料的等效剪切模量,本文采用图 2(a) 所示的圆筒计算模型.该模型的一个显著特点是其通用性,即当圆筒半径趋于无穷大,圆筒厚度(内外半径差 $R - r$) 不变时,自然退化为图 2(b) 所示的平面夹芯结构.由材料力学扭转变形理论^[14]可知,长度为 l 的等截面圆轴的截面扭转刚度可表示为

$$GI_p = \frac{Tl}{\phi} \quad (1)$$

其中, T 为扭矩, ϕ 为变形相对转角.

假设夹芯圆筒截面的等效扭转刚度为 $G_H I_H$, 则可建立以下关系式

$$G_H I_H = GI_p = \frac{Tl}{\phi} \quad (2)$$

其中等效截面极惯性矩 I_H 为

$$I_H = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4) \quad (3)$$

G_H 为待求的等效剪切模量,其表达式可由式(2)获得

$$G_H = \frac{Tl}{\phi I_H} \quad (4)$$

相对等效剪切模量 G_m 可表示为等效剪切模量与材料原始剪切模量 G_s 的比值

$$G_m = \frac{G_H}{G_s} \quad (5)$$

由式(4)可知,计算等效剪切模量时,可以首先对蜂窝夹芯圆筒直接进行有限元网格剖分离散建模,计算扭矩 T 作用下的扭转角 ϕ , 然后代入公式获得.为了建立等效剪切模量与体胞尺寸缩放因子 n 和材料体分比 v 的物理关系,揭示尺寸效应的影响,需要给出不同尺寸缩放因子和材料体分比下循环对称周期性多孔圆筒的详细几何特征参数表达式,确定几何模型,这是有限元建模的前提,也是本工作的关键之一.为此,给出以下假设:

(1) 在结构随尺寸缩放因子 n 的变化过程中,假设体胞微结构构型与材料体分比保持不变;

(2) 当尺寸缩放因子取 $n = 1$ 的初值时,圆筒沿圆周分成 8 等份,即组成圆筒的体胞所对的圆心角为 $\alpha_1 = \pi/4$.

如图 2(a) 所示,随着尺寸缩放因子 n 的变化,周期性多孔结构在径向所含体胞的层数也相应增加.对于不同形式的体胞构型(如蜂窝六边形、圆形孔、四边形孔等),虽然其模型几何参数的确定需要区别对待,但是周期性多孔结构沿圆筒径向的体胞层数随尺寸缩放因子 n 的变化是一致的,亦即各层对应的半径大小的确定方法是一致的.由理论推导可知,只有当各层体胞之间的半径以等比规律变化时,材料体分比就可保持不变,满足假设条件(1).

假设圆筒沿径向的各蜂窝层半径随 n 变化的公比为 q_n , 根据等比定理,周期性多孔圆筒的内外半径 r 和 R 满足以下关系式

$$R = r q_n^n \quad (6)$$

其中各层间的公比 q_n 可以通过式(6)确定

$$q_n = \sqrt[n]{\frac{R}{r}} \quad (7)$$

则各层内径可按下式确定

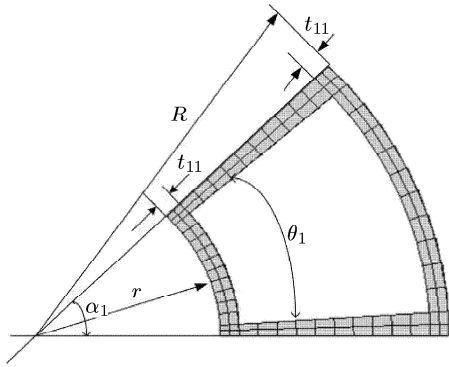
$$r_{nm} = r_{n1} q_n^{m-1} = r q_n^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

依据以上各层半径的确定原则,本文以典型方形孔和圆形孔为例,确定相对于尺寸缩放因子 n 的模型几何参数.

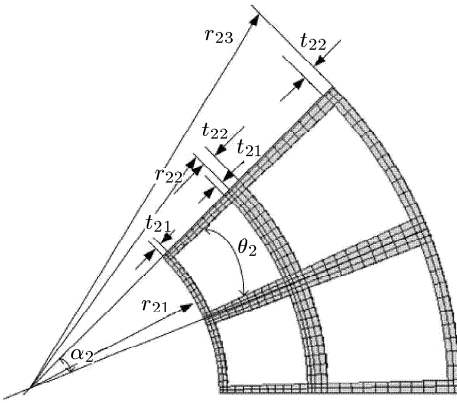
1.2 方形孔几何模型参数的确定

图 3(a) 所示为周期性方形孔圆筒体胞,根据假设条件,当 $n=1$ 时的体胞圆心角 $\alpha_1 = \pi/4$.若已知实体材料所占的体分比为 v ,则建立该体胞模型还需要确定内外壁的厚度 t_{11} 以及方形孔所跨角度 θ_1 .为了便于区分不同尺寸缩放因子下的各个参数,用下角标 $m(m = 1, 2, \dots, n)$ 加以区分.根据定义,材料体分比可表示为

$$\frac{\theta_1}{2\pi} \cdot \pi [(R - t_{11})^2 - (r + t_{11})^2] \frac{\alpha_1}{2\pi} \cdot \pi (R^2 - r^2) = 1 - v \quad (9)$$



(a) $n = 1$



(b) $n = 2$

图 3 方形孔胞结构示意图

Fig.3 Illustration of the rectangle-hole unit cells

由式 (9) 可得壁厚为

$$t_{11} = \frac{R - r}{2} \left[1 - \frac{(1 - \nu) \alpha_1}{\theta_1} \right] \quad (10)$$

实际计算中， θ_1 的取值必须满足 $0 < \theta_1 < \alpha_1$ 。可以看出，壁厚与方形孔所跨圆心角是两个相互依赖的未知量。

由于胞尺寸变化过程中，微结构构型必须满足相似性条件，则可以得到如下关系式

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_n} = \frac{\theta_1}{\theta_n} = n \quad (11)$$

即方形孔的圆心角为

$$\alpha_n = \frac{\alpha_1}{n} = \frac{\pi}{4n}, \quad \theta_n = \frac{\theta_1}{n} \quad (12)$$

当 $n = 2$ 时，沿径向有两层孔，圆筒均分成 16 等分 ($\alpha_2 = \pi/8, \theta_2 = \theta_1/2$)，如图 3(b) 所示。同时，依据式 (8)，各层半径为

$$\left. \begin{aligned} r_{21} &= r \\ r_{22} &= r_{21} q_2 = \sqrt{Rr} \\ r_{23} &= r_{21} q_2^2 = R \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

若各层的壁厚分别为 t_{21} 和 t_{22} ，各层方形孔占胞体的材料体分比可表示为

$$\frac{\frac{\theta_2}{2\pi} \cdot \pi [(r_{22} - t_{21})^2 - (r_{21} + t_{21})^2]}{\frac{\alpha_2}{2\pi} \cdot \pi (r_{22}^2 - r_{21}^2)} = 1 - \nu \quad (14)$$

$$\frac{\frac{\theta_2}{2\pi} \cdot \pi [(r_{23} - t_{22})^2 - (r_{22} + t_{22})^2]}{\frac{\alpha_2}{2\pi} \cdot \pi (r_{23}^2 - r_{22}^2)} = 1 - \nu \quad (15)$$

由此可得各层壁厚为

$$t_{21} = \frac{r_{22} - r_{21}}{2} \left[1 - \frac{(1 - \nu) \alpha_2}{\theta_2} \right] \quad (16)$$

$$t_{22} = \frac{r_{23} - r_{22}}{2} \left[1 - \frac{(1 - \nu) \alpha_2}{\theta_2} \right] \quad (17)$$

依此类推，对于含 n 层孔的圆筒，第 m 层方形孔胞体的材料体分比可表示为

$$\frac{\frac{\theta_n}{2\pi} \cdot \pi [(r_{n(m+1)} - t_{nm})^2 - (r_{nm} + t_{nm})^2]}{\frac{\alpha_n}{2\pi} \cdot \pi (r_{n(m+1)}^2 - r_{nm}^2)} = 1 - \nu \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

该层的壁厚则为

$$t_{nm} = \frac{r_{n(m+1)} - r_{nm}}{2} \left[1 - \frac{(1 - \nu) \alpha_n}{\theta_n} \right] \quad (m = 1, 2, \dots, n) \quad (19)$$

1.3 圆形孔几何模型参数的确定

图 4(a) 为一周期性圆形孔圆筒胞体，建模的思想与方形孔基本一样。设圆筒的外径为 R ，内径为 r ，当 $n = 1$ 时，仍然取一个胞体的圆心角为 $\alpha_1 = \pi/4$ 。若实体材料的体分比为 ν ，则建立该胞体模型还需要知道圆孔的半径 $r_{c(11)}$ 。同理，由体分比的关系可以得到下面等式

$$\frac{\pi r_{c(11)}^2}{\frac{\alpha_1}{2\pi} \cdot \pi (R^2 - r^2)} = 1 - \nu \quad (20)$$

于是可以求出圆孔的半径

$$r_{c(11)} = \sqrt{\frac{1}{8} (R^2 - r^2) (1 - \nu)} \quad (21)$$

同理，在一般情况下，如图 4(b) 所示，第 m ($m = 1, 2, \dots, n$) 层结构的体分比关系为

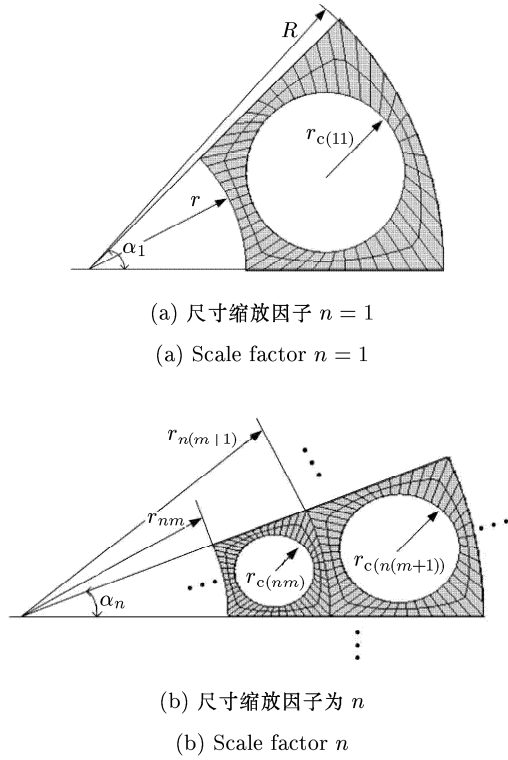


图 4 圆形孔胞结构示意图

Fig.4 Illustration of the circle-hole unit cells

$$\frac{\pi r_{c(nm)}^2}{\frac{\alpha_n}{2\pi} \cdot \pi (r_{n(m+1)}^2 - r_{nm}^2)} = 1 - \nu, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

这样，第 m 层的圆孔半径可以确定为

$$r_{c(nm)} = \sqrt{\frac{1}{8n} (r_{n(m+1)}^2 - r_{nm}^2) (1 - \nu)}, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad (23)$$

2 算 例

为了实现等效剪切模量的高效求解，多孔夹芯材料的建模是一个关键问题。使用有限元方法计算式 (4) 中的扭转角时可以充分利用圆筒模型的周期性循环对称特点，只需研究某个体胞子结构，对其加上周期对称约束（沿轴向两侧面对应点具有完全相同的边界条件和自由度）和载荷条件（图 5），即可计算出整个结构的扭转位移。图 6 所示为方形孔和圆形孔胞子结构的有限元模型。通过把原来庞大

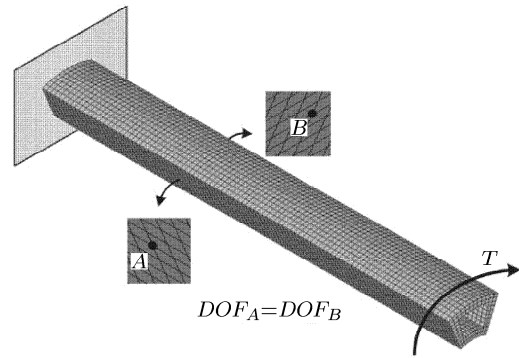


图 5 圆筒扭转模型体胞子结构边界条件及载荷

Fig.5 Boundary condition and the load of the substructure of cylinder torsional modeling

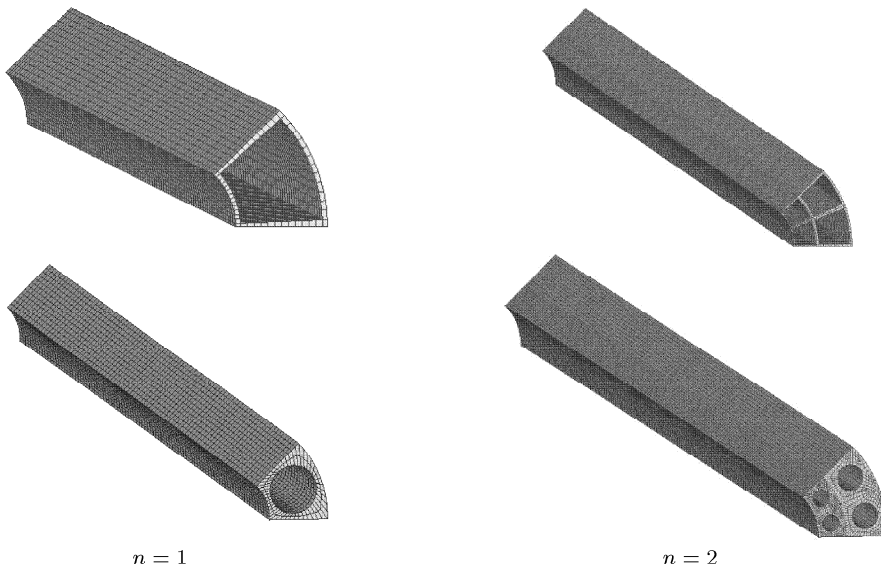


图 6 体胞子结构有限元网格模型

Fig.6 Finite element mesh model of the unit cell substructure

的单元数目等效大幅度减小，大大提高了有限元分析求解效率。否则直接进行整体圆筒模型的有限元离散势必造成问题复杂化与计算量过大。

本文在计算时考虑了两种情况：(1) 材料体分比 v 不变，改变尺寸缩放因子 n ，研究相对转角和相对剪切模量与 n 之间的依赖关系；(2) 保持尺寸因子 n 不变，改变材料体分比 v ，研究相对剪切模量与 v 之间的依赖关系。使用如下具体参数值并假设单位一致：扭矩 $T = 2.0 \times 10^7 \text{ N}\cdot\text{m}$ ，外径 $R = 0.45 \text{ m}$ ，内径 $r = 0.20 \text{ m}$ ，圆筒长度 $l = 4.50 \text{ m}$ ，材料杨氏模量 $E_s = 3.5 \times 10^9 \text{ GPa}$ ，泊松比 $\mu = 0.34$ 。同时，方形孔

圆筒和圆形孔圆筒的网格划分如图 6 所示。

通过有限元数值计算，得到不同体分比与不同尺寸缩放因子下的相对扭转角以及相对剪切模量，如图 7 所示。这些结果的渐进变化有力地说明等效剪切模量存在尺寸效应以及尺寸效应对转角的影响。

理论上讲，当圆筒内外半径均趋于无穷大时，其极限状态为平面体胞。为此，在保持体胞夹心层厚度不变的情况下，同时增大模型的外径和内径，得到了图 8 所示的计算结果。可以发现，随着内外半径的增大，当体胞大小随着 n 的增大也逐渐减小时，相对等效剪切模量逐渐趋于采用传统均匀化方

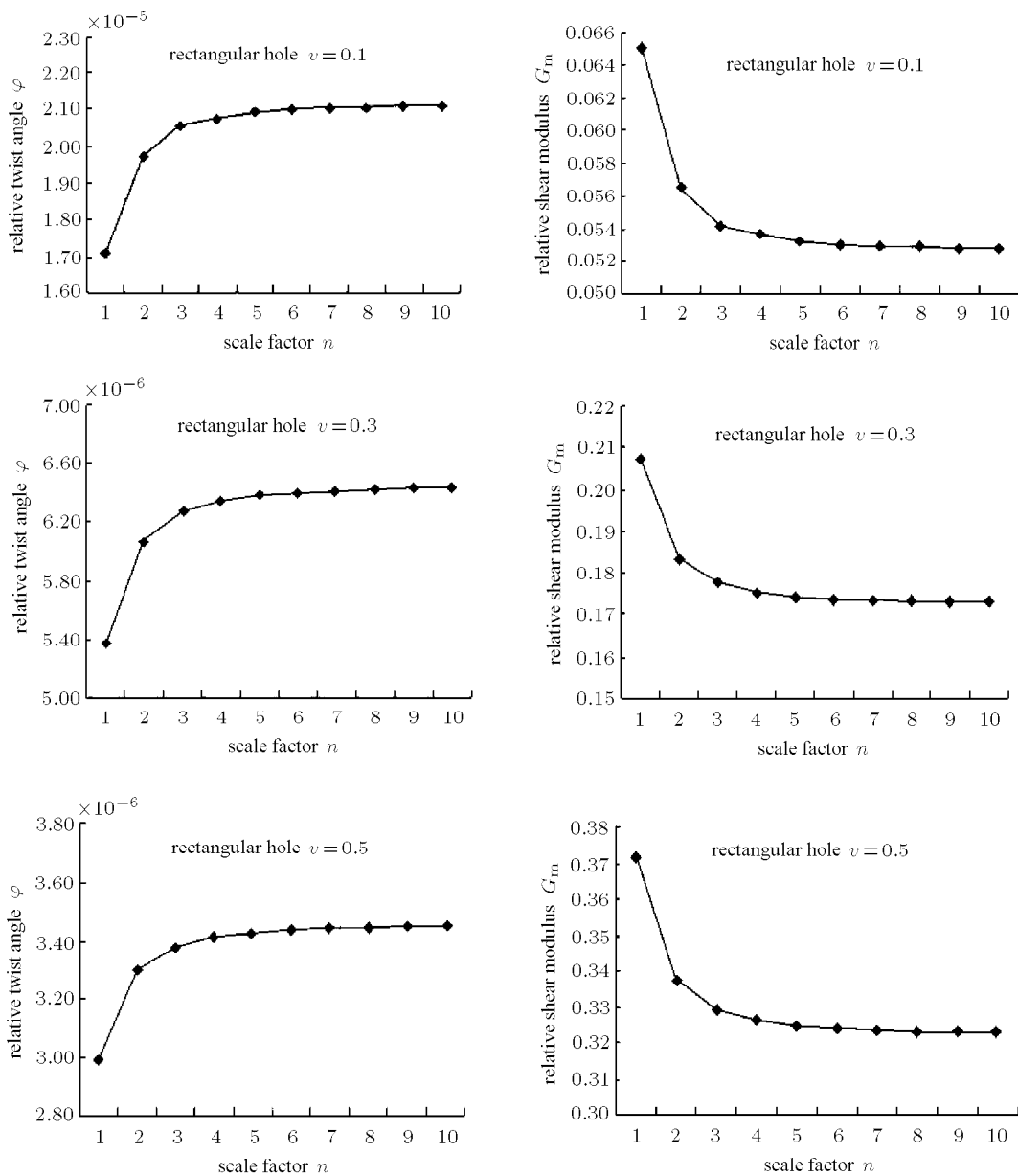


图 7 不同材料体分比下两种构型体胞的相对剪切模量及相对扭转角

Fig.7 Relative shear modulus and the relative twist angle of two kinds of cell configurations with different volume fractions

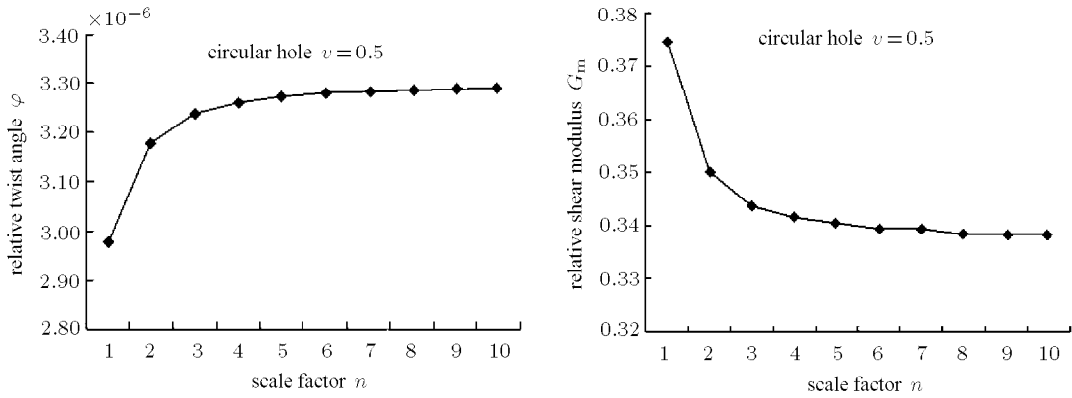


图 7 不同材料体分比下两种构型胞的相对剪切模量及相对扭转角 (续)

Fig.7 Relative shear modulus and the relative twist angle of two kinds of cell configurations with different volume fractions (continued)

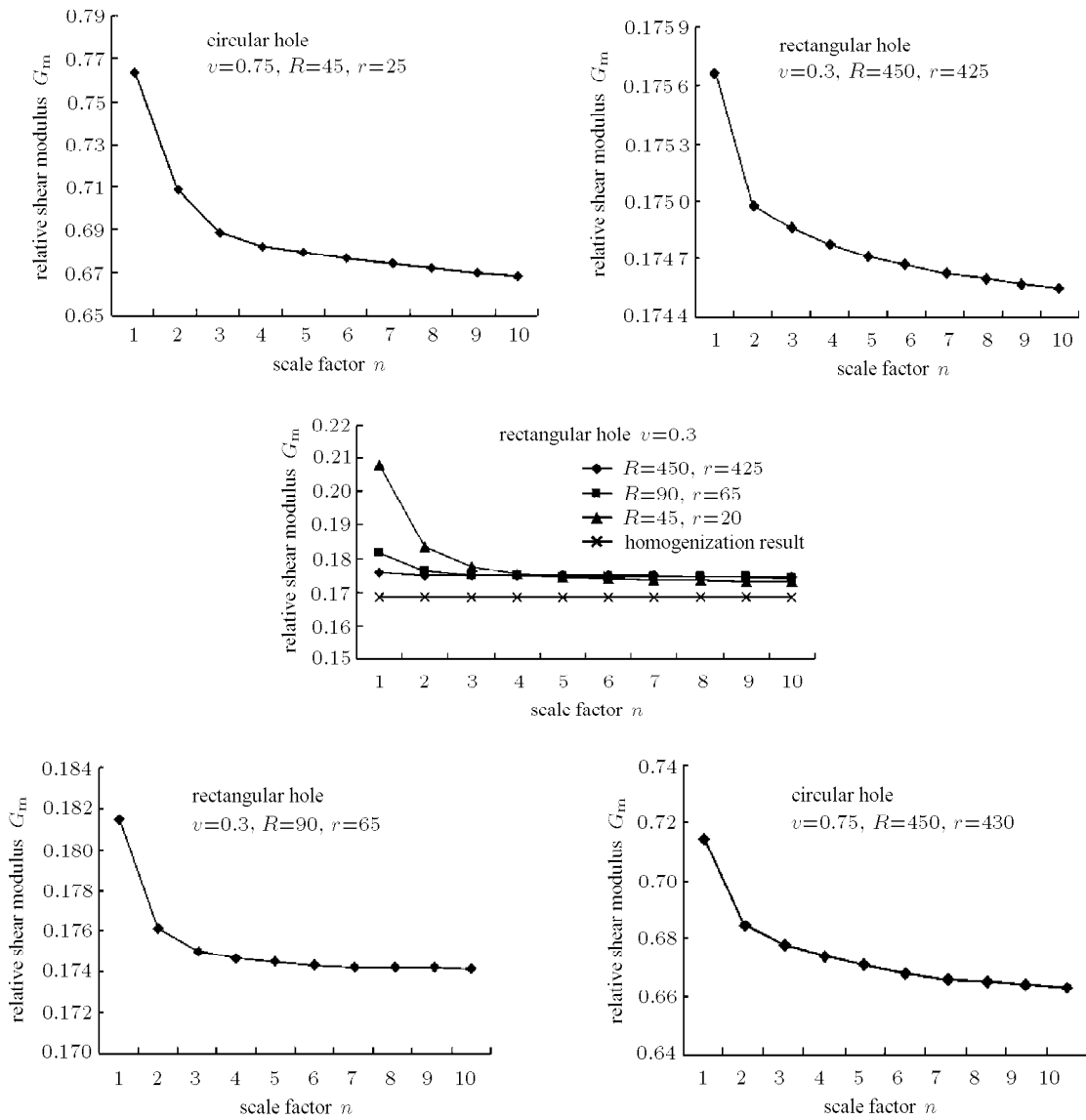


图 8 增大圆筒内外半径时, 方形孔与圆形孔胞相对剪切模量的尺寸效应

Fig.8 Size effects of the relative shear modulus of rectangle-hole unit cell and circle-hole unit cell with the increase of inner and outer radius of the cylinder

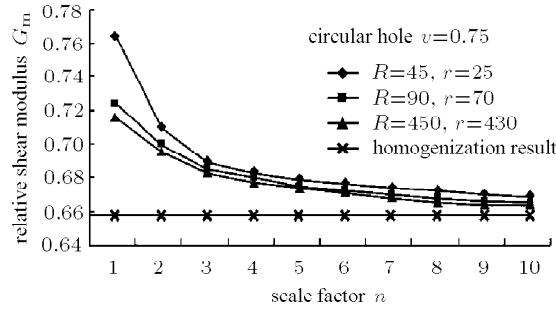


图 8 增大圆筒内外半径时，方形孔与圆形孔胞相对剪切模量的尺寸效应 (续)

Fig.8 Size effects of the relative shear modulus of rectangle-hole unit cell and circle-hole unit cell with the increase of inner and outer radius of the cylinder (continued)

法^[15]所得到的平面多孔材料计算结果。一方面反映了圆筒模型预测平面多孔材料等效剪切模量的有效性以及与均匀化方法的关系；另一方面说明了平面多孔材料胞的等效剪切模量也存在尺寸效应，是现有均匀化方法无法预测的。

以上结果表明，两种构型的多孔材料都具有尺寸效应。当圆筒半径尺寸较小时，随着尺寸缩放因子 n 的变化，周期性多孔材料等效剪切模量的尺寸效应是关于圆筒半径、尺寸缩放因子 n 两个变量的函数，因此尺寸效应明显。当圆筒半径尺寸较大时，

圆筒半径变化对于结构的尺寸效应影响减小，计算结果主要反映了尺寸缩放因子的影响。可见，对于两种多孔结构，当 $n < 5$ 时，相对剪切模量的变化比较明显。其中，方形孔变化略小，约为 0.63%；圆形孔随尺寸变化明显，约为 7.74%。可见尺寸效应与微结构构型关系密切。当尺寸缩放因子 $n > 5$ 时，相对剪切模量逐渐趋于一个稳定的值。此外，在尺寸缩放因子 n 不变的情况下，蜂窝的等效相对剪切模量与材料的体分比之间的关系如图 9 所示，很明显其随着体分比的增大而增大。

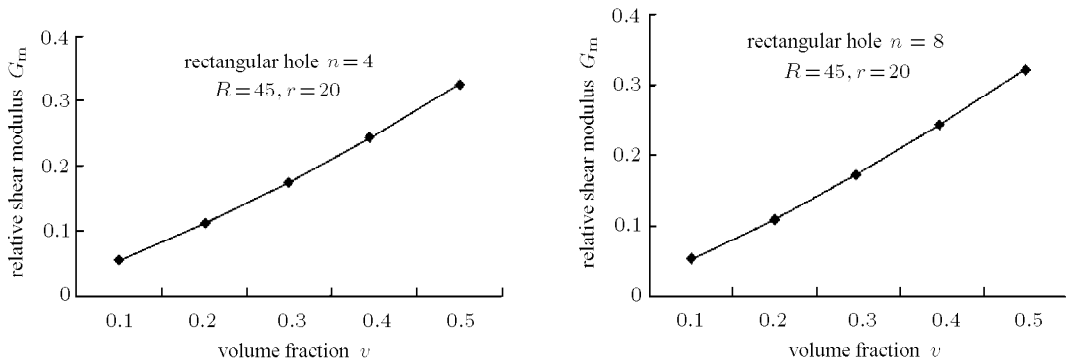


图 9 相对等效剪切模量与体分比之间的关系

Fig.9 The relationship between the relative equivalent shear modulus and the volume fraction

对于尺寸效应的机理研究，以上工作表明，在材料体分比用量与试件尺寸一定的情况下，胞尺寸随尺寸缩放因子的增大导致材料的分布状况发生变化；材料逐渐由外向内分布，胞壁厚变小、数目增多，引起圆筒剖面的极惯性矩变化，最终改变剖面的等效剪切刚度与胞的等效剪切模量。事实上，由于论文中采用的圆筒扭转模型为细长轴，具有足够的长度，因此边界效应可以忽略。此时，可以认为材料分布状况的变化是尺寸效应产生的基本原因。

3 结 论

本文研究了周期性多孔材料等效剪切模量的有效计算方法以及尺寸效应，提出了循环对称圆筒扭转通用计算模型和胞子结构计算模型，以方形和圆形孔胞为例，建立了尺寸缩放因子与微结构几何特征参数的解析表达式，通过对两种常见孔形的多孔材料进行有限元建模和分析计算，得到了等效剪切模量。数值结果表明，在体分比一定的条

件下, 随着体胞的尺寸逐渐减小, 即尺度缩放因子 n 逐渐增大, 两种材料构型的相对剪切模量逐渐减小; 当尺寸缩放因子 n 增大到一定值时, 相对剪切模量趋于一个稳定值. 在尺寸缩放因子 n 保持不变时, 结构的相对剪切模量随着材料体分比的增大而增大, 充分验证了剪切模量尺寸效应的存在.

参 考 文 献

- 1 戴高明, 张卫红. 周期性多孔材料等效拉伸模量的尺度效应研究. 中国科学 (G 辑: 物理、力学、天文学), 2009, 39(7): 955-963 (Dai Gaoming, Zhang Weihong. Size effects of effective Young's modulus for periodic cellular materials. *Science in China (Series G: Physics, Mechanics & Astronomy)*, 2009, 39 (7): 955-963 (in Chinese))
- 2 Gibson LJ, Ashby MF, Schjer GS. The mechanics of two-dimensional cellular materials. *Proc R Soc Lond*, 1982, 382: 25-42
- 3 王颖坚. 蜂窝结构在面内剪切力作用下的变形模式. 北京大学学报, 1991, 27(3): 302-306 (Wang Yingjian. Deformation models of honeycomb cell under in-plane shear. *Acta Scientiarum Naturalium Vniversitatis Pekinensis*, 1991, 27(3): 302-306 (in Chinese))
- 4 富明慧, 尹久仁. 蜂窝芯层的等效弹性参数. 力学学报, 1999, 31(1): 113-118 (Fu Minghui, Yin Jiuren. Equivalent elastic parameters of the honeycomb core. *Acta Mechanica Sinica*, 1999, 31(1): 113-118 (in Chinese))
- 5 Evans AG, Hutchinson JW, Fleck NA, et al. The topological design of multifunctional cellular metal. *Progress in Materials Science*, 2001, 46: 309-327
- 6 Onck PR, Andrews EW, Gibson LJ. Size effects in ductile cellular solids. Part I: modeling. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, 43: 681-699
- 7 Tantikom K, Aizawa T, Mukai T. Symmetric and asymmetric deformation transition in the regularly cell-structured materials Part I: experimental study. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42: 2199-2210
- 8 Lestari W, Qiao PZ, Song GB, et al. Evaluation of bending and shear moduli of sandwich structures by dynamic response based technique. In: 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Norfolk, Virginia, USA, 2003-4-7-10, USA: American Inst. Aeronautics and Astronautics Inc. 2003. 4747-4755
- 9 Pecullan S, Gibiansky LV, Torquato S. Scale effects on the elastic behavior of periodic and hierarchical two dimensional composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1999, 47: 1509-1542
- 10 Fish J, Shek K. Multi-scale analysis of composite materials and structures. *Composites Science and Technology*, 2000, 60: 2547-2556
- 11 Kouznetsova V, Geers MGD, Brekelmans WAM. Multi-scale constitutive modeling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, 54: 1235-1260
- 12 Wang AJ, McDowell DL. Optimization of a metal honeycomb sandwich beam-bar subjected to torsion and bending. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, 40: 2085-2099
- 13 孙士平, 张卫红, 邱克鹏等. 蜂窝夹芯圆环的拓扑优化设计及尺度效应研究. 力学学报, 2007, 39(6): 788-795 (Sun Shiping, Zhang Weihong, Qiu Kepeng, et al. Integrated topology optimization and scale effect analysis of cyclic symmetry sandwich structures. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(6): 788-795 (in Chinese))
- 14 Budynas RG. Advanced strength and applied stress analysis. *McGraw-Hill*, 1999
- 15 Hassani B, Hinton E. A review of homogenization and topology optimization I-homogenization theory for media with periodic structure. *Computer & Structures*, 1998, 69(6): 707-717

(责任编辑: 周冬冬)

NUMERICAL PREDICTIONS OF EFFECTIVE SHEAR MODULUS AND SIZE EFFECT FOR PERIODIC CELLULAR MATERIALS ¹⁾

Zhang Weihong²⁾ Luo Jinwei Dai Gaoming Zhang Jin

(Key Laboratory of Contemporary Design & Integrated Manufacturing Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract Based on the classical cylinder torsion model, a simple and efficient method is proposed in this paper to predict the effective shear modulus and the size effect of periodic cellular materials. As representative examples, square-hole and circle-hole unit cells are used to clarify the problem and computing. Analytical expressions are established to determine the geometrical parameters of the cell in terms of the cell size factor n . Following conclusions can be drawn out from numeral results. The effective shear moduli of the two types of unit cells decrease as the scale factor n increases; when $n \rightarrow \infty$, i.e., the size of the unit cell is small enough with respect to the size of the whole structure, the effective shear modulus tends to be a constant value. The increase of the material volume fraction of the unit cell will result in an increase of the effective shear modulus of the cellular material. Meanwhile, the unit cell substructure concept is proposed to predict the effective shear modulus and the size effect of the periodic cellular material based on its characteristic of structural symmetry. This modeling can greatly increase the computing efficiency.

Key words periodical cellular materials, effective shear modulus, size effect, volume fraction, unit cell substructure

Received 17 November 2009, revised 22 March 2010.

1) The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10925212, 90916027) and the 111project(B07050).

2) E-mail: zhangwh@nwpu.edu.cn