

开口薄壁梁的扭转理论与应用¹⁾

王兆强²⁾ 赵金城

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

摘要 以 Vlasov 薄壁构件理论为基础, 推导了开口薄壁构件一阶扭转理论. 该理论考虑了翘曲剪应力对截面转角的影响, 截面的转角分为自由翘曲转角和约束剪切转角, 在约束扭转中, St. Venant 扭矩仅仅与自由翘曲转角有关, 而翘曲扭矩仅与约束剪切转角有关. 利用半逆解方法求出了约束扭转中薄壁构件的 St. Venant 扭矩表达式; 依据能量方法, 建立了约束剪切转角和翘曲扭矩之间的关系, 并提出了翘曲剪切系数概念, 给出了一阶扭转理论的微分方程. 为了有效求解微分方程, 给出了求解微分方程的初参数法方程和相应的影响函数矩阵; 当 St. Venant 扭矩可以忽略时, 得到与一阶弯曲理论 (Timoshenko 梁理论) 相似的一阶扭转理论简化形式. 最后利用算例证明了一阶扭转理论和简化理论的有效性.

关键词 剪切变形, 薄壁构件, 扭转, 翘曲, St. Venant 扭矩

中图分类号: O342, TU311.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 0459-1879(2011)05-0963-05

引 言

薄壁构件广泛应用于土木、航空、造船、海洋工程、桥梁等领域^[1-2]. 其最大的优点就是重量轻而强度高. 因此, 薄壁构件理论的建立受到人们极大的关注.

Vlasov 建立了经典薄壁构件理论^[3-4], 但此理论忽略了剪切变形的影响. Back 和 Will^[5] 指出, 传统薄壁梁理论和试验结果之间存在着显著的差异. 当梁长较短或截面为开口薄壁截面时, 剪切变形对梁弯扭特性的影响变得非常显著^[6]. 剪切变形对梁横向弯曲的影响, 在一阶 (Timoshenko 梁理论)、二阶、三阶梁弯曲理论中已经有考虑^[7-8]. 李国强等^[9] 建立了考虑剪切变形的压杆刚度方程, 通过在一些实际问题上的应用, 说明了杆件剪切变形对杆系结构变形的影响. 考虑剪切变形影响的约束扭转理论首先由 Benscoter 和 Umansky 针对闭口薄壁杆件提出^[10], 他们假设约束扭转中的翘曲位移与 Vlasov 理论中的翘曲位移具有相同的形式. Pavazza^[11] 假设剪应力沿开口薄壁梁长为常数, 建立了考虑剪切变形影响的开口薄壁构件扭转理论. 基于 Kollbrunner 和 Hajdin 理论, Hu 等^[12] 推导了非对称截面薄壁梁的四阶控制微分方程, 考虑了弯曲和扭转的耦合作用. 基于 Bernoulli-Euler 梁和 Vlasov 薄壁构件理

论, Wang 等^[13] 利用虚功原理推导出了薄壁截面空间梁单元的弯扭耦合刚度矩阵.

本文以 Vlasov 梁理论为基础, 假设剪切变形在截面上均匀分布, 推导了开口薄壁构件的约束扭转理论, 并考虑到剪切变形对 St. Venant 扭矩的影响, 用扭转剪切系数来修正约束扭转中约束剪切变形在截面均匀分布的假设, 使得一阶扭转理论与一阶弯曲理论具有一定的类比性, 得到了考虑剪切变形影响的扭转微分方程.

1 薄壁梁的位移场和截面内力

薄壁梁一阶扭转理论采用下面几条假设:

(1) 横截面在自身平面内不发生变形;

(2) 横向剪切变形 γ_{zx} 和 γ_{zy} 不能忽略, 在整个截面上为一常数;

(3) 横截面的总转角 θ 可以分解为自由翘曲转角 θ_w 和约束剪切转角 θ_s . 自由翘曲转角 θ_w 仅产生翘曲变形不产生剪应变, 约束剪切转角 θ_s 仅产生剪切变形不产生翘曲变形;

(4) 构件的变形为小变形.

1.1 截面位移场

为了描述薄壁梁的位移场需要 3 个坐标系: 整

2011-03-28 收到第 1 稿, 2011-05-14 收到修改稿.

1) 上海市科研计划资助项目 (072012028).

2) E-mail: zqwang2007@yahoo.com

体坐标系 (x, y, z) , 局部坐标系 (η, ξ, z) 和沿横截面中线的曲线坐标系 s . 其中, η 和 ξ 分别为截面中线任一点 P 的法线和切线方向, 如图 1 所示.

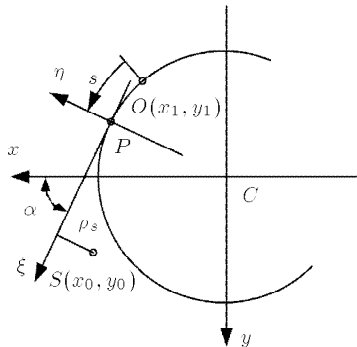


图 1 薄壁构件截面坐标系

Fig.1 Coordinate systems of thin-walled beam cross section

选取剪心 $S(x_0, y_0)$ 为截面极点, 极点 S 在形心主轴 x 和 y 方向的位移分别为 $u(z)$ 和 $v(z)$, 截面绕 S 点的转角为 $\theta(z)$.

根据假设 (1)~(3), 截面上任一点 P 的切向位移 $v_s(s, z)$ 为

$$v_s(s, z) = u(z) \frac{dx}{ds} + v(z) \frac{dy}{ds} + \theta(z) \rho_s \quad (1)$$

在纯扭状态下, 截面中面上任一点 P 剪应变可表示为

$$\gamma_{zs}^R = \theta'_s \rho_s \quad (2)$$

考虑到剪切变形 γ_{zs} 的定义, 可得到在纯扭状态下, 截面上任一点 P 的轴向位移 $w(s, z)$ 为

$$w(s, z) = w_0(z) - \theta'_\omega(z) \omega(s) \quad (3)$$

式中, $w_0(z)$ 为截面平均轴向位移, (\prime) 表示对 z 求一阶导数, $\omega(s)$ 是关于极点 S 和原点 O 的扇性坐标.

1.2 中面正应力和剪应力

假设薄壁梁中面内的 s 向正应力可以忽略, 可得截面任一点的正应力和剪应力 [3,10]

$$\sigma_\omega = -E\omega\theta''_\omega \quad (4)$$

$$\tau_\omega t = E\theta'''_\omega S_\omega \quad (5)$$

式中, S_ω 为截面的扇性面积矩.

由双力矩 B 和翘曲扭矩 M_ω 的定义 [2-3], 可得

$$\left. \begin{aligned} B &= -EI_\omega \theta''_\omega \\ M_\omega &= \frac{dB_\omega}{dz} = -EI_\omega \theta'''_\omega \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

相应的中面正应力和剪应力为

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \omega, \quad \tau_\omega t = -\frac{M_\omega S_\omega}{I_\omega} \quad (7)$$

由式 (4)~(6) 可知, 与传统的 Vlasov 理论相比, 一阶扭转理论中的双力矩 B 和翘曲扭矩 M_ω 用截面自由翘曲转角代替了截面总转角.

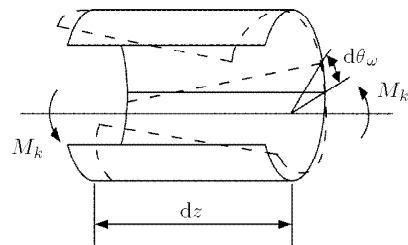
2 薄壁梁约束扭转中的 St. Venant 扭矩

当梁发生约束扭转时, 由假设 (3) 知, 转角可以分为自由翘曲转角 $\theta_\omega(z)$ 和约束扭转转角 $\theta_s(z)$

$$\theta(z) = \theta_\omega(z) + \theta_s(z) \quad (8)$$

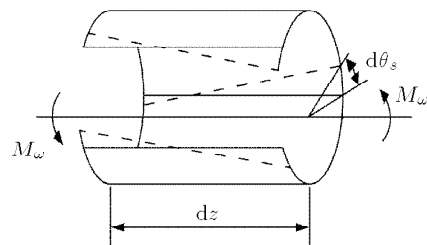
在薄壁梁中取出长度为 dz 微段, 自由翘曲转角 $\theta_\omega(z)$ 和约束扭转转角 $\theta_s(z)$ 如图 2 所示. 根据假设 (1) 和 (3) 以及式 (3) 和式 (8), 在微段右侧截面上任一点 P 的位移可表示为

$$\begin{Bmatrix} du(s, z) \\ dv(s, z) \\ dw(s, z) \end{Bmatrix} = \theta'_\omega(z) \begin{Bmatrix} -y dz \\ x dz \\ \omega(s) \end{Bmatrix} + \theta'_s(z) \begin{Bmatrix} -y dz \\ x dz \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9)$$



(a) 自由翘曲角

(a) Free warping rotation



(b) 约束剪切转角

(b) Restrained shear rotation

图 2 开口薄壁梁中面的扭转角

Fig.2 Rotation of middle surface of open thin-walled beam

由假设 (3) 可知, St. Venant 扭矩仅与自由翘曲有关, 因此由 St. Venant 扭矩在截面上任一点 P 产生的位移可以表示为

$$\begin{cases} du(s, z) \\ dv(s, z) \\ dw(s, z) \end{cases} = \theta'_\omega(z) \begin{cases} -ydz \\ xdz \\ \omega(s) \end{cases} \quad (10)$$

开口薄壁梁 St. Venant 扭矩 M_k 和应力可以利用半逆解方法求出^[14]

$$M_k = GI_k \theta'_\omega \quad (11)$$

St. Venant 扭矩在任一点产生的应力为

$$\tau_{zs} = \frac{2M_k}{I_k} \eta \quad (12)$$

式中, I_k 为 St. Venant 扭转常量, η 为 P 点处沿板件厚度 (法线) 方向 η 的坐标值.

由式 (11) 可知, 与传统的 Vlasov 理论相比, 一阶扭转理论中 St. Venant 扭矩利用自由翘曲转角扭率代替了总转角的扭率.

3 约束剪切转角和扭转剪切系数

根据假设 (3), 约束剪切转角 θ_s 可以看作翘曲扭矩 M_ω 的广义应变. 在如图 2(b) 所示的微段中总应变能 $\Delta U = \frac{1}{2} \int_s \gamma_\omega \tau_\omega t ds dz$ 与翘曲扭矩做功 $\Delta W = \frac{1}{2} M_\omega \theta'_s dz$ 相等, 考虑胡克定律 $\tau_\omega = G\gamma_\omega$, 可得

$$M_\omega \theta'_s = \frac{1}{G} \int_s \tau_\omega^2 t ds \quad (13)$$

将式 (7) 代入式 (13), 可得

$$\theta'_s = \frac{M_\omega}{I_\omega^2 G} \int_s \frac{S_\omega^2}{t} ds = \frac{f_\omega M_\omega}{I_{\rho s} G} \quad (14)$$

其中, f_ω 是一个新的参数, 称为扭转剪切系数, $I_{\rho s}$ 为切向极惯性矩, 它们由下式给出

$$f_\omega = \frac{I_{\rho s}}{I_\omega^2} \int_s \frac{S_\omega^2}{t} ds, \quad I_{\rho s} = \int_s \rho_s^2 t ds \quad (15)$$

由式 (15) 可以看出, f_ω 是无量纲的量, 仅仅与截面几何特性有关.

如同 Timoshenko 梁理论中的横向剪切系数, 扭转剪切系数克服了一阶剪切扭转理论中平截面假设的不足, 说明了真实的翘曲剪应力在截面上的分布情况.

4 扭转微分方程和边界条件

4.1 扭转微分方程

在约束扭转中, 截面总扭矩 M_z 为自由翘曲转角产生的扭矩和约束剪切转角产生的扭矩之和, 根据式 (6) 和式 (11), 可得

$$GI_k \theta'_\omega - EI_\omega \theta''_\omega = M_z \quad (16)$$

当薄壁梁承受均布外扭矩时, 式 (16) 变为

$$GI_k \theta''_\omega - EI_\omega \theta''_\omega = -m \quad (17)$$

根据式 (14), 约束剪切转角的微分方程为

$$\theta'_s = \frac{f_\omega M_\omega}{GI_{\rho s}} \quad (18)$$

式 (8), 式 (17) 和式 (18) 给出了薄壁梁约束扭转的微分方程. 与 Vlasov 微分方程^[2-3] 不同, 式 (17) 仅包含自由翘曲转角, 由此为基础可分别计算自由翘曲转角和约束剪切转角. 由式 (6), 式 (8) 和式 (18) 可得, 总扭转角与自由翘曲转角之间的关系为

$$\theta' = \theta'_\omega - \mu \theta''_\omega \quad (19)$$

式中, $\mu = \frac{f_\omega EI_\omega}{GI_{\rho s}}$.

4.2 初参数方法和影响函数

与直接求解微分方程的方法相比, 初参数方法具有简单的形式和确定的力学意义. 利用初参数方法求解约束扭转微分方程是非常有效的. 为了简化初参数方程, 引入参数 $\kappa^2 = \frac{GI_k}{EI_\omega}$, $\mu_1 = 1 - \mu\kappa^2$.

在 $z = 0$ 处, 薄壁梁横截面的状态参数为

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) = \theta_0, \quad \theta_\omega(0) = \theta_{\omega 0}, \quad \theta'_\omega(0) = \theta'_{\omega 0} \\ B(0) = B_0, \quad M_z(0) = M_{z0} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

可得初参数方程为

$$\theta = \theta_0 + \frac{\mu_1}{\kappa} \theta'_{\omega 0} \sinh \kappa z + \mu_1 (1 - \cosh \kappa z) \frac{B_0}{GI_k} + \left(z - \frac{\mu_1}{\kappa} \sinh \kappa z \right) \frac{M_{z0}}{GI_k} \quad (21)$$

$$\theta_\omega = \theta_{\omega 0} + \frac{1}{\kappa} \theta'_{\omega 0} \sinh \kappa z + (1 - \cosh \kappa z) \frac{B_0}{GI_k} + \left(z - \frac{1}{\kappa} \sinh \kappa z \right) \frac{M_{z0}}{GI_k} \quad (22)$$

$$\theta'_\omega = \theta'_{\omega 0} \cosh \kappa z - \kappa \frac{B_0}{GI_k} \sinh \kappa z + (1 - \cosh \kappa z) \frac{M_{z0}}{GI_k} \quad (23)$$

$$\frac{B}{GI_k} = -\frac{1}{\kappa} \theta'_{\omega 0} \sinh \kappa z + \frac{B_0}{GI_k} \cosh \kappa z + \frac{1}{\kappa} \frac{M_{z0}}{GI_k} \sinh \kappa z \quad (24)$$

$$M_z = M_{z0} \quad (25)$$

4.3 边界条件

各种边界条件如下:

(1) 简支边界条件 (截面可以发生自由翘曲, 但转角为零)

$$\theta = \theta_{\omega} = \theta_s = 0, \quad B_{\omega} = 0 \quad (26)$$

(2) 固定边界条件 (截面不能翘曲, 但可以发生剪切变形, 转角为零)

$$\theta = \theta_{\omega} = \theta_s = 0, \quad \theta'_{\omega} = 0 \quad (27)$$

(3) 自由边界条件 (截面可以自由翘曲, 但双力矩为零)

$$\theta''_{\omega} = 0, \quad M_z = \bar{M}_z \text{ (无扭矩作用时 } \bar{M}_z = 0) \quad (28)$$

5 约束扭转的简化理论

当 St. Venant 扭矩可以忽略时, 薄壁梁的一阶扭转理论可以简化为

$$EI_{\omega} \theta_{\omega}^{IV} = m, \quad \theta'_s = \frac{f_{\omega} M_{\omega}}{GI_{\rho s}}, \quad \theta = \theta_{\omega} + \theta_s \quad (29)$$

薄壁梁扭转简化理论与一阶弯曲理论 (Timoshenko 梁理论) 微分方程 [15] 具有相同的形式, 一阶弯曲理论的方法均可应用于简化理论.

6 算例和讨论

在上面推导的一阶扭转理论和简化理论的基础上, 以一单轴对称的槽型悬臂梁为例, 来说明理论的有效性.

薄壁槽型悬臂梁承受均布外扭矩 $m = 1000 \text{ Nm/m}$, 材料的弹性模量 E 和泊松比 ν 分别为 206 GPa 和 0.3 , 梁长 $l = 1.2 \text{ m}$, 扭转剪切系数 $f_{\omega} = 1.4526$. 横截面尺寸 (单位: m) 如图 3 所示.

表 1 给出了梁的一阶扭转理论、简化理论以及 Vlasov 理论分析结果.

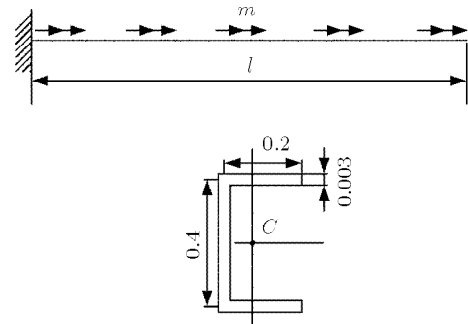


图 3 槽型截面悬臂梁

Fig.3 Channel-shaped cantilever beam

表 1 横截面的旋转角

Table 1 Rotations of cross section

Rotation of cross section	10 ⁻³ rad					
	Various rotation at middle location			Various rotation at free end		
	θ	θ_{ω}	θ_s	θ	θ_{ω}	θ_s
Vlasov theory	1.584	-	-	4.469	-	-
first-order theory	1.765	1.584	0.181	4.709	4.469	0.240
simplified theory	1.772	1.592	0.181	4.735	4.494	0.241

从表 1 可以看出剪切变形的影响非常显著. Vlasov 理论低估了截面的扭转角, 误差较大. 由于越靠近固定端截面的自由翘曲受到的约束就会越大, 从而约束剪切转角所占的比例就会越大. 考虑剪切变形的约束扭转理论的解与 Vlasov 理论解在自由端相差 5.4%, 在梁长中部为 11.4%. 所以, 剪切变形的影响会随着梁长度的减小而越加显著. 由表 1 可以看出简化理论所得到的结果足够精确, 与一阶扭转理论所得结果非常接近.

7 结 论

以开口薄壁梁为研究对象, 在 Vlasov 理论的基础上建立了可同时考虑到截面翘曲变形和约束剪切转角影响的一阶扭转理论. 当 St. Venant 扭矩可以忽略时, 得到了薄壁梁约束扭转的简化理论. 为了得到约束剪切转角, 提出了扭转剪切系数. 得到的一阶扭转理论及其简化形式与一阶弯曲理论 (Timoshenko 梁理论) 有较好的类比形式.

由于不考虑剪切变形的影响, 传统的 Vlasov 理论所得结果会低估薄壁梁的总转角. 这种影响会随着梁长的减小而增大. 通过算例, 可以看出薄壁梁约束扭转简化理论的结果与一阶扭转理论的结果十分吻合.

参 考 文 献

- Librescu L, Song O. Thin-Walled Composite Beams. Dordrecht: Springer, 2006
- 胡毓仁, 陈伯真. 一种新的薄壁杆件单元扭转刚度矩阵. 计算结构力学及其应用, 1988, 5(3): 19-28(Hu Yuren, Chen Bozhen. A new torsional stiffness matrix of thin-walled bar element. *Comput Struct Mech Appl*, 1988, 5(3): 19-28(in Chinese))
- 吕列武, 沈世钊, 沈祖炎等. 钢结构构件稳定理论. 北京: 中国建筑工业出版社, 1983 (Lü Liewu, Shen Shizhao, Shen Zuyan, et al. Stability Theory of Steel Structure Member. Beijing: China Architecture & Building Press, 1983(in Chinese))
- Vlasov VZ. Thin-walled Elastic Beams. Washington: National Science Foundation, 1961
- Back SY, Will KM. A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams. *Int J Numer Methods Eng*, 1998, 43(7): 1173-1191
- Park SW, Fujii D, Fujitani YA. Finite element analysis of discontinuous thin-walled beams considering nonuniform shear warping deformation. *Comput Struct*, 1997, 65(1): 17-27
- Reddy JN, Wang CM, Lee KH. Relationships between bending solutions of classical and shear deformation beam theories. *Int J Solids Struct*, 1997, 34(26): 3373-3384
- Wang CM. Timoshenko beam-bending solutions in terms of Euler-Bernoulli solutions. *Journal of Engineering Mechanics*, 1995, 121(6): 763-765
- 李国强, 沈祖炎. 考虑剪切变形的压杆刚度方程及应用. 同济大学学报, 1991, 19(2): 131-138(Li Guoqiang, Shen Zuyan. Stiffness equation of compression member with shear deformation and its application. *J Tongji Univ*, 1991, 19(2): 131-138 (in Chinese))
- 陈伯真, 胡毓仁. 薄壁结构力学. 上海, 上海交通大学出版社, 1998(Chen Bozhen, Hu Yuren. Mechanics of Thin-walled Structures. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 1998(in Chinese))
- Pavazza R. Torsion of thin-walled beams of open cross section with influence of shear. *Int J Mech Sci*, 2005, 47(7): 1099-1122
- Hu YR, Jin X, Chen BZ. A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections. *Computers & Structures*, 1996, 61(5): 897-908
- Wang XF, Yang QS. Geometrically nonlinear finite element model of spatial thin-walled beams with general open cross section. *Acta Mech Sin*, 2009, 22(1): 64-72
- Oden JT. Mechanics of Elastic Structures. Washington: Hemisphere Publication Corp, 1981
- 夏桂云, 李传习. 考虑剪切变形影响的杆系结构理论与应用. 北京: 人民交通出版社, 2008(Xia Guiyun, Li Chuanxi. Theory of Bar Structure Including Shear Deformation Effects and its Application. Beijing: China Communications Press, 2008(in Chinese))

(责任编辑: 刘希国)

RESTRAINED TORSION THEORY OF OPEN THIN-WALLED BEAMS AND ITS APPLICATION¹⁾

Wang Zhaoqiang²⁾ Zhao Jincheng

(School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract Based on Vlasov's thin-walled beam theory, a first-order torsion theory of restrained torsion of open thin-walled beam is developed in consideration with the effects of shear deformation. It is assumed that the total rotation of a cross section is divided into a free warping rotation and a restrained shear rotation. In the restrained torsion, St. Venant torque is only related to the free warping rotation and the expression of St. Venant torque is derived by using a semi-inverse method. The torsion shear coefficient is derived by using the energy method. The governing equation of the restrained torsion theory is derived by using the deduced formulae. In order to solve the governing equation efficiently, the corresponding initial method is presented, and the influence function is obtained. When the St. Venant constant is negligible, an approximate analytical approach is obtained, and there exists an analogy between it and Timoshenko beam theory. To validate the new approach, an example is illustrated, and the results obtained from the current theory are compared with those of the existing theory, which demonstrate the efficiency of the current theory.

Key words thin-walled beam, shear deformation, torsion, warping, St. Venant torque

Received 28 March 2011, revised 14 May 2011.

1) The project supported by the Science and Technology Commission of Shanghai Municipality(072012028).

2) E-mail: zqwang2007@yahoo.com