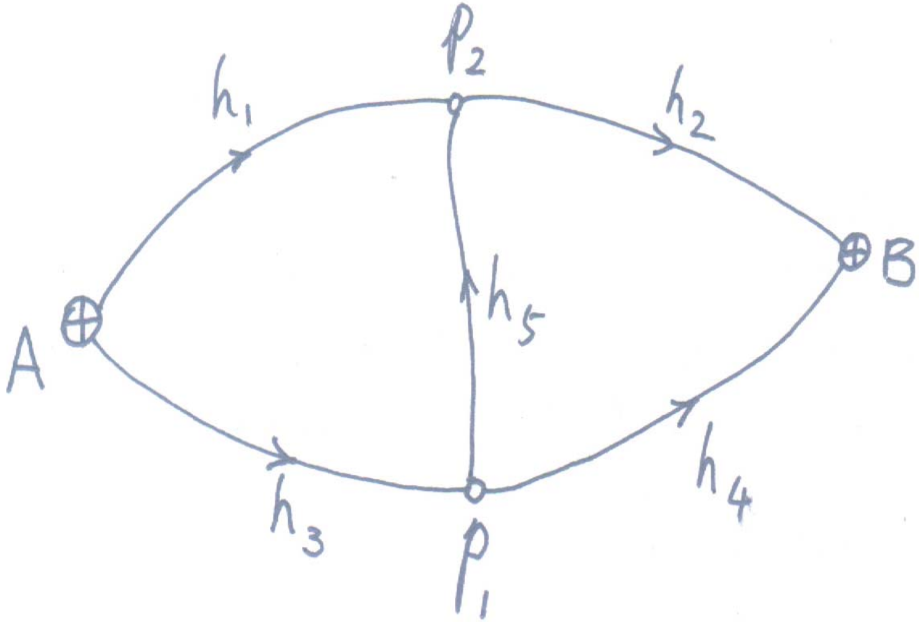
水准网如图所示：

1、按条件平差列出误差方程。

2、选 P_1 高程平差值为参数，列出全部条件方程。

3、选 P_1 和 P_2 高程平差值为参数，列出全部条件方程。



上式表明，当所选参数刚好等于必要观测数t，且参数之间相互独立时，附有参数的条件平差具有很简洁的条件方程。这种简洁的条件方程描述了各观测值的改正数与参数之间的关系，我们称这种关系为误差方程。以误差方程为基础可得到一种新的平差方法——间接平差。

一、间接平差原理

1、函数模型

间接平差的函数模型就是误差方程，其一般形式为

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times t}{B}\,\underset{t\times 1}{\hat{x}} - \underset{n\times 1}{l}$$

$$V=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \cdots & t_1 \\ a_2 & b_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & \cdots & t_n \end{pmatrix},\quad \hat{x}=\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_t \end{pmatrix},\quad l=\begin{pmatrix} L_1-d_1 \\ L_2-d_2 \\ \vdots \\ L_n-d_n \end{pmatrix}$$

2、随机模型

间接平差的随机模型与条件平差的随机模型相同，即

$$\underset{n\times n}{D_{LL}} = \sigma_0^2 \underset{n\times n}{Q_{LL}} = \sigma_0^2 \underset{n\times n}{P^{-1}}$$

3、基础方程及其解

$$\left.\begin{aligned} B^T PV &= 0 \\ V &= B\hat{x} - l \end{aligned}\right\}$$

4、法方程

$$B^T PB\hat{x} - B^T Pl = 0$$

5、解向量

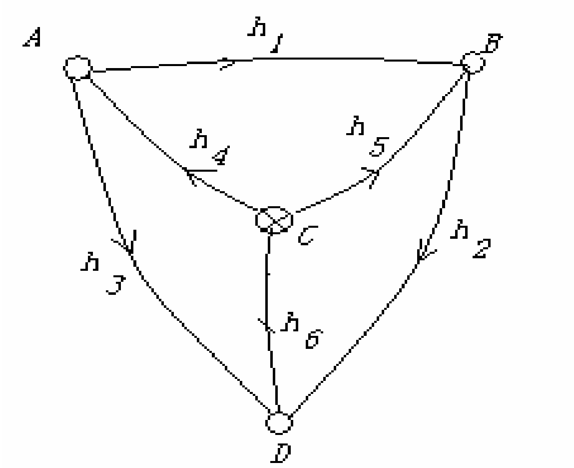
$$\hat{x} = N_{BB}^{-1} W$$

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times t}{B}\ \underset{t\times 1}{\hat{x}} - \underset{n\times 1}{l} \qquad \hat{L} = L + V$$

例：选择独立、足够的参数

$$C = 2km$$

$$P = diag\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$



1	2	3	4	5	6	
0.023	1.114	1.142	0.079	0.099	1.210	h(m)
1	1	1	2	2	2	S(km)

n=6,　t=3,　r=3

$$X^0 = \begin{bmatrix}X_1^0 & X_2^0 & X_3^0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}100.078 & 100.099 & 101.266\end{bmatrix}^T (m)$$

$$\underset{6,1}{V}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\underset{3,1}{\hat{x}}-\begin{bmatrix}3\\ 3\\ 11\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\qquad B^TPB=\begin{bmatrix}5 & -2 & -2\\ -2 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 5\end{bmatrix}\qquad B^TPl=\begin{bmatrix}-28\\ 0\\ 28\end{bmatrix}$$

$$N_{bb}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 3\end{bmatrix}\qquad \hat{x}=N_{bb}^{-1}B^TPl=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-28\\ 0\\ 28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\ 0\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\hat{X}=X^0+\hat{x}=\begin{bmatrix}100.075\\ 100.099\\ 101.214\end{bmatrix}(m)$$

二、间接平差的计算步骤

1、根据平差问题的性质，选择 t 个独立量作为参数；

2、列出误差方程；

3、组成法方程；

4、解算法方程；

5、计算改正数V；

6、计算观测值的平差值

三、选取参数的个数和原则

1、所选取*t*个待估参数必须相互独立；

2、所选取*t*个待估参数与观测值的函数关系容易写出来。

四、不同情况下的误差方程

1、水准网误差方程

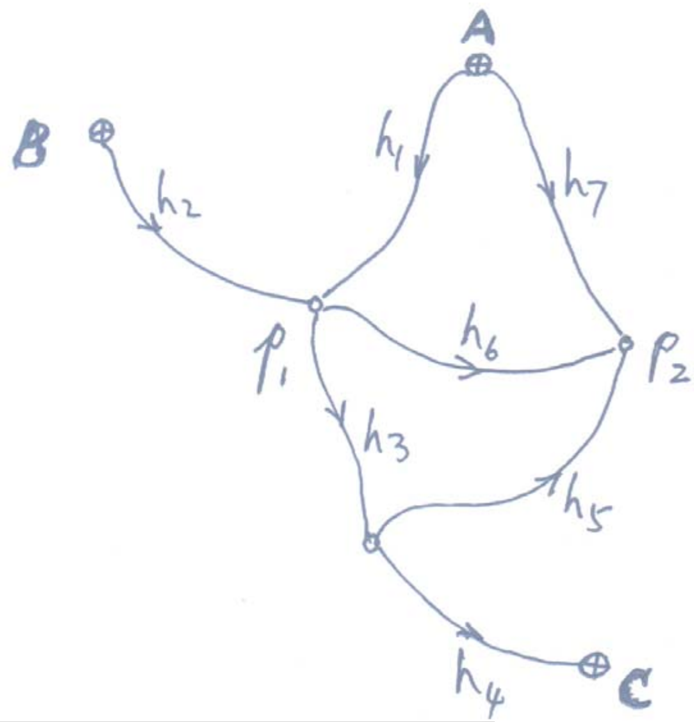
2、方位角误差方程

- 测方向坐标平差函数模型
- 测角网函数模型

3、测边网误差方程

4、GPS网误差方程

1、水准网误差方程



例:水准网如图所示，已知 **H_A=5.000m**，**H_C=7.650m**。各点的近似高程为：

$$H_{p1}^{0}=H_B+h_2=5.053\text{m}$$

$$H_{p2}^{0}=H_A+h_7=8.452\text{m}$$

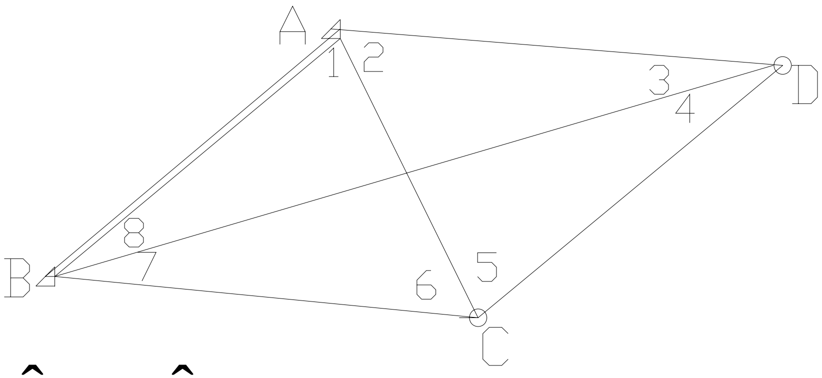
$$H_{p3}^{0}=H_C-h_4=7.450\text{m}$$

观测值见下表，试列出误差方程。

	1	2	3	4	5	6	7
h_i	0.050	1.100	2.398	0.200	1.000	3.404	3.452

2、三角网误差方程

例如右图所示的大地四边形，其必要观测数为4，图中待定点坐标也是4，故选：



$$\hat{X}_1 = \hat{X}_C, \ \hat{X}_2 = \hat{Y}_C, \ \hat{X}_3 = \hat{X}_D, \ \hat{X}_4 = \hat{Y}_D$$

于是，误差方程为：

$$v_1=\alpha_{AB}-\hat{\alpha}_{AC}=\arctan\frac{Y_B-Y_A}{X_B-X_A}-\arctan\frac{\hat{X}_2-Y_A}{\hat{X}_1-X_A}-L_1$$

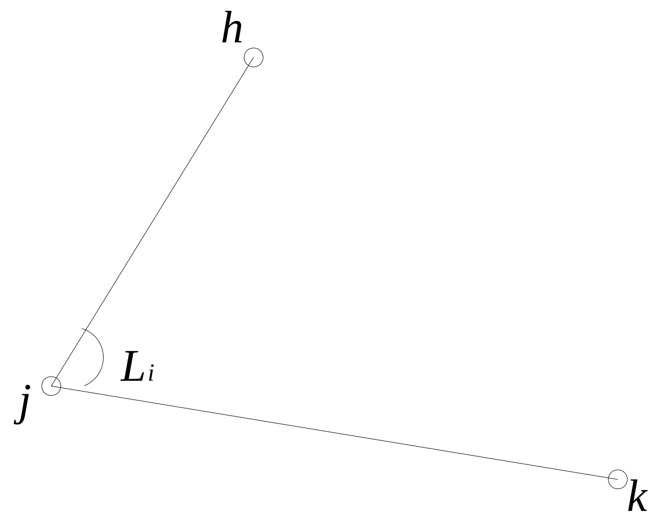
$$v_2=\hat{\alpha}_{AC}-\hat{\alpha}_{AD}=\arctan\frac{\hat{X}_2-Y_A}{\hat{X}_1-X_A}-\arctan\frac{\hat{X}_4-Y_A}{\hat{X}_3-X_A}-L_2$$

……..

$$v_8=\alpha_{BA}-\hat{\alpha}_{BD}=\arctan\frac{Y_A-Y_B}{X_A-X_B}-\arctan\frac{\hat{X}_4-Y_B}{\hat{X}_3-X_B}-L_8$$

在三角网平差中，通常选***m***个待定点的坐标平差值作为待估参数，即***t*=2*m*** 。

这样选，既足数，又独立，而且容易写出参数与观测值之间的函数关系。一般地，角度观测值可由右图表示，于是有：



$$v_i = \hat{\alpha}_{jk} - \hat{\alpha}_{jh} = \arctan\frac{\hat{Y}_k - \hat{Y}_j}{\hat{X}_k - \hat{X}_j} - \arctan\frac{\hat{Y}_h - \hat{Y}_j}{\hat{X}_h - \hat{X}_j} - L_i$$

线性近似：

在按台劳级数展开，取至一次项，得

$$v_i=\rho''\left(\frac{\Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}-\frac{\Delta Y_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2}\right)\hat{x}_j-\rho''\left(\frac{\Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}-\frac{\Delta X_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2}\right)\hat{y}_j-$$

$$\rho''\frac{\Delta Y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{x}_k+\rho''\frac{\Delta X_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\hat{y}_k+\rho''\frac{\Delta Y_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2}\hat{x}_h-\rho''\frac{\Delta X_{jh}^0}{(S_{jh}^0)^2}\hat{y}_h-l_i$$

$$l_i=L_i-\arctan\frac{Y_k^0-Y_j^0}{X_k^0-X_j^0}+\arctan\frac{Y_h^0-Y_j^0}{X_h^0-X_j^0}$$

3、三边网误差方程

在下图，我们选 $\hat{X}_1=\hat{X}_C$，$\hat{X}_2=\hat{Y}_C$，$\hat{X}_3=\hat{X}_D$，$\hat{X}_4=\hat{Y}_D$

误差方程

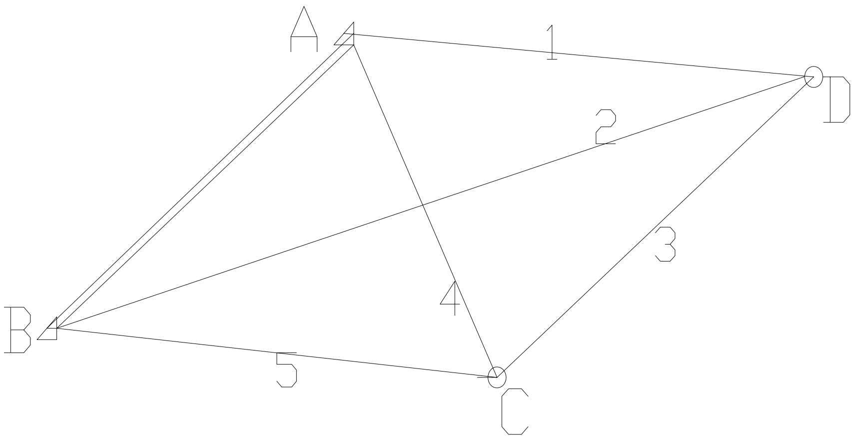
$$v_1=\sqrt{(X_A-\hat{X}_3)^2+(Y_A-\hat{X}_4)^2}-L_1$$

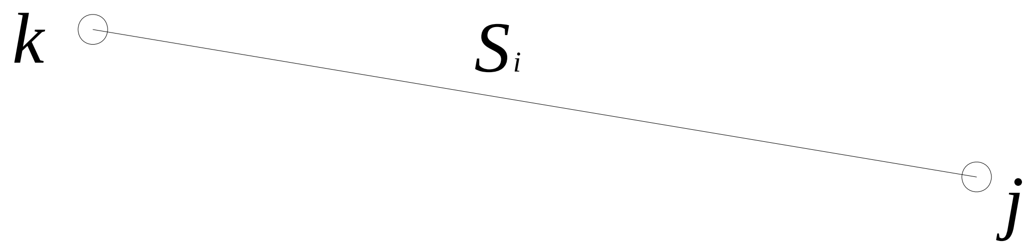
$$v_2=\sqrt{(X_B-\hat{X}_3)^2+(Y_B-\hat{X}_4)^2}-L_2$$

$$v_3=\sqrt{(\hat{X}_1-\hat{X}_3)^2+(\hat{X}_2-\hat{X}_4)^2}-L_3$$

$$v_4=\sqrt{(X_A-\hat{X}_1)^2+(Y_A-\hat{X}_2)^2}-L_4$$

$$v_5=\sqrt{(X_B-\hat{X}_1)^2+(Y_B-\hat{X}_2)^2}-L_5$$





$$v_i = \sqrt{(\hat{X}_k - \hat{X}_j)^2 + (\hat{Y}_k - \hat{Y}_j)^2} - S_i$$

$$v_i = -\frac{\Delta X_{jk}^0}{S_{jk}^0}\hat{x}_j - \frac{\Delta Y_{jk}^0}{S_{jk}^0}\hat{y}_j + \frac{\Delta X_{jk}^0}{S_{jk}^0}\hat{x}_k + \frac{\Delta Y_{jk}^0}{S_{jk}^0}\hat{y}_k - l_i$$

$$l_i = S_i - S_{jk}^0,\quad S_{jk}^0 = \sqrt{(X_k^0 - X_j^0)^2 + (Y_k^0 - Y_j^0)^2}$$

4、导线网

导线网为特殊的边角网，其必要观测数$t=2m$（m为待定点个数），其观测值为角度观测值和边长观测值两类。所以误差方程也是角度误差方程和边长误差方程两类。可以先列角度误差方程：

$$v_i=\hat{\alpha}_{ik}-\hat{\alpha}_{ij}=\arctan\frac{\hat{Y}_k-\hat{Y}_i}{\hat{X}_k-\hat{X}_i}-\arctan\frac{\hat{Y}_j-\hat{Y}_i}{\hat{X}_j-\hat{X}_i}-L_i$$

再列边长误差方程。

$$v_i=\sqrt{(\hat{X}_i-\hat{X}_j)^2+(\hat{Y}_i-\hat{Y}_j)^2}-L_i$$

5、GPS网三维无约束平差

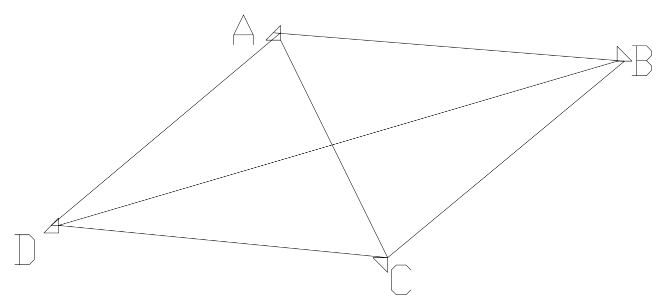
在GPS网三维无约束平差中，常常选某点 I 作为参考点，则该点在WGS84系下的三维坐标 X_i 、 Y_i 、 Z_i 可看作已知数据，其余各点作为待定点。在WGS84系下，要确定一个点的空间位置，需要X、Y、Z三个坐标分量，设GPS网中的总点数为m个，则必要观测数为 $t=3(m-1)$ ，因此，可选 m-1 个点的坐标平差值作为参数。

如图，以A点为参考点，即 X_A,Y_A,Z_A 已知，则t个参数为：

$$\hat{X}_1=\hat{X}_B,\hat{X}_2=\hat{Y}_B,\hat{X}_3=\hat{Z}_B$$

$$\hat{X}_4=\hat{X}_C,\hat{X}_5=\hat{Y}_C,\hat{X}_6=\hat{Z}_C$$

$$\hat{X}_7=\hat{X}_D,\hat{X}_8=\hat{Y}_D,\hat{X}_9=\hat{Z}_D$$



于是，误差方程为：

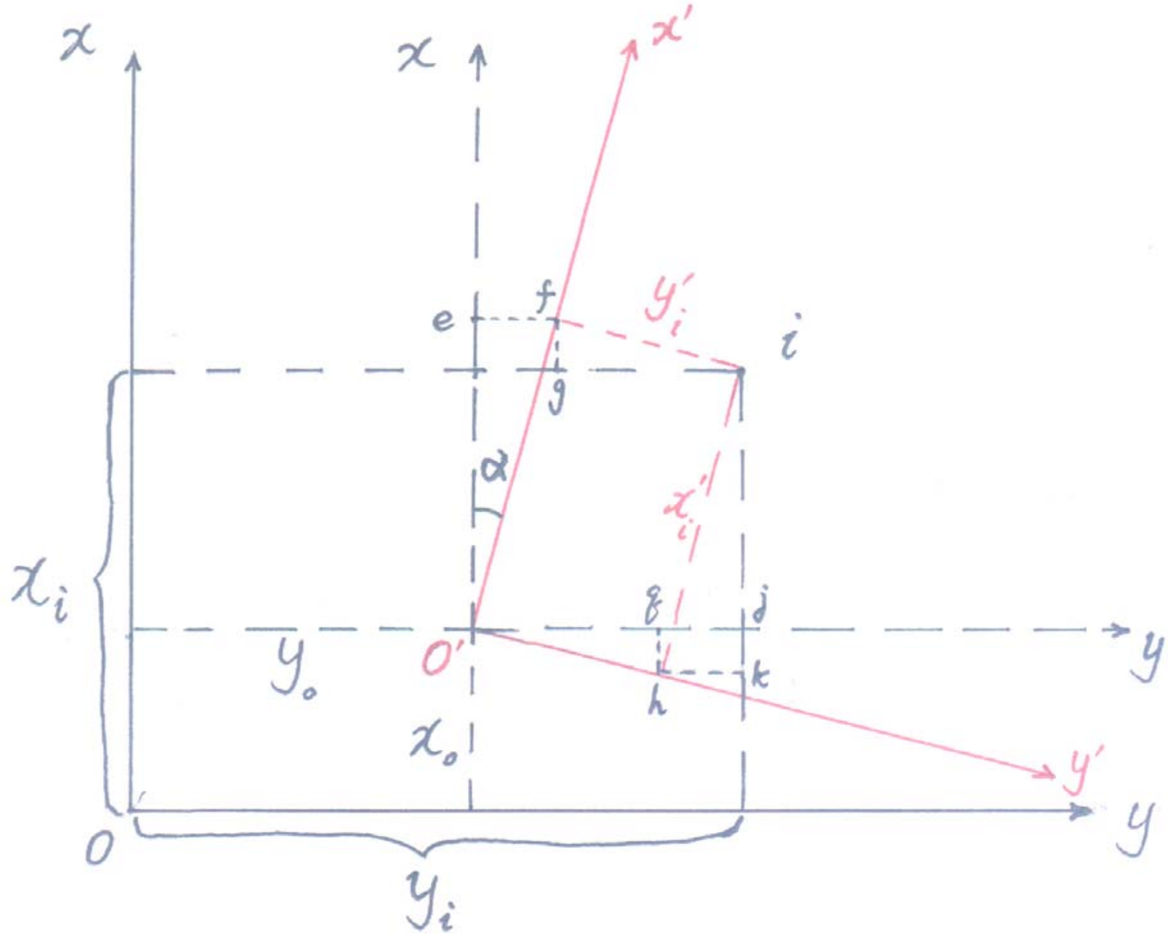
$$
\begin{aligned}
v_{\Delta X_{AB}} &= \hat{X}_1 - X_A - \Delta X_{AB} & \quad v_{\Delta X_{BC}} &= -\hat{X}_1 + \hat{X}_4 - \Delta X_{BC} \\
v_{\Delta Y_{AB}} &= \hat{X}_2 - Y_A - \Delta Y_{AB} & \quad v_{\Delta Y_{BC}} &= -\hat{X}_2 + \hat{X}_5 - \Delta Y_{BC} \\
v_{\Delta Z_{AB}} &= \hat{X}_3 - Z_A - \Delta Z_{AB} & \quad v_{\Delta Z_{BC}} &= -\hat{X}_3 + \hat{X}_6 - \Delta Z_{BC} \\
v_{\Delta X_{AC}} &= \hat{X}_4 - X_A - \Delta X_{AC} & \quad v_{\Delta X_{BD}} &= -\hat{X}_1 + \hat{X}_7 - \Delta X_{BD} \\
v_{\Delta Y_{AC}} &= \hat{X}_5 - Y_A - \Delta Y_{AC} & \quad v_{\Delta Y_{BD}} &= -\hat{X}_2 + \hat{X}_8 - \Delta Y_{BD} \\
v_{\Delta Z_{AC}} &= \hat{X}_6 - Z_A - \Delta Z_{AC} & \quad v_{\Delta Z_{BD}} &= -\hat{X}_3 + \hat{X}_9 - \Delta Z_{BD} \\
v_{\Delta X_{AD}} &= \hat{X}_7 - X_A - \Delta X_{AD} & \quad v_{\Delta X_{CD}} &= -\hat{X}_4 + \hat{X}_7 - \Delta X_{CD} \\
v_{\Delta Y_{AD}} &= \hat{X}_8 - Y_A - \Delta Y_{AD} & \quad v_{\Delta Y_{CD}} &= -\hat{X}_5 + \hat{X}_8 - \Delta Y_{CD} \\
v_{\Delta Z_{AD}} &= \hat{X}_9 - Z_A - \Delta Z_{AD} & \quad v_{\Delta Z_{CD}} &= -\hat{X}_6 + \hat{X}_9 - \Delta Z_{CD}
\end{aligned}
$$

6、坐标变换

不论是GPS，还是GIS，还是RS，都会经常用到坐标变换。测量中的坐标变换，一般采用如图所示的相似变换。

$$x_i = x_0 + ik - qh$$

$$y_i = y_0 + ig + ef$$



第七章　　间接平差

由于两坐标系不是用同一个长度基准定义的，所以长度基准不一定严格相等，即两坐标系的单位长度之比可能为：

$$\frac{S}{S'} = m \neq 1$$

于是坐标系 $x'o'y'$ 中的长度变换到坐标系 xoy 中时应乘以尺度比m。于是：

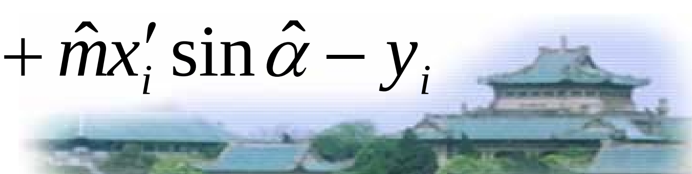
$$x_i = x_0 + m x_i' \cos\alpha - m y_i' \sin\alpha$$

$$y_i = y_0 + m y_i' \cos\alpha + m x_i' \sin\alpha$$

式中，x_0，y_0，m，α 为待定参数。由于坐标观测值有误差，于是坐标变换的误差方程可写为：

$$v_{x_i} = \hat{x}_0 + \hat{m} x_i' \cos\hat{\alpha} - \hat{m} y_i' \sin\hat{\alpha} - x_i$$

$$v_{y_i} = \hat{y}_0 + \hat{m} y_i' \cos\hat{\alpha} + \hat{m} x_i' \sin\hat{\alpha} - y_i$$



线性化（变量代换法）

$$v_{x_i}=\hat{x}_0+\hat{m}x_i'\cos\hat{\alpha}-\hat{m}y_i'\sin\hat{\alpha}-x_i$$

$$v_{y_i}=\hat{y}_0+\hat{m}y_i'\cos\hat{\alpha}+\hat{m}x_i'\sin\hat{\alpha}-y_i$$

令

$$\hat{a}=\hat{x}_0,\ \hat{b}=\hat{y}_0,\ \hat{c}=\hat{m}\cos\hat{\alpha},\ \hat{d}=\hat{m}\sin\hat{\alpha}$$

$$v_{x_i}=\hat{a}+\hat{x}_i'\hat{c}-\hat{y}_i'\hat{d}-x_i$$

$$v_{y_i}=\hat{b}+\hat{y}_i'\hat{c}+\hat{x}_i'\hat{d}-y_i$$

$$\begin{bmatrix} v_{x_1} \\ v_{y_2} \\ v_{x_2} \\ v_{y_2} \\ \vdots \\ v_{x_n} \\ v_{y_n} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1' & -y_1' \\ 0 & 1 & y_1' & x_1' \\ 1 & 0 & x_2' & -y_2' \\ 0 & 1 & y_2' & x_2' \\ & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & x_n' & -y_n' \\ 0 & 1 & y_n' & x_n' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \\ \hat{d} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

五、精度评定

1、单位权方差的估值

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{r}$$

2、基本向量的协因数矩阵

$$Z = \begin{pmatrix} L \\ \hat{X} \\ V \\ \hat{L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ N_{bb}^{-1}B^T P \\ BN_{bb}^{-1}B^T P - E \\ BN_{bb}^{-1}B^T P \end{pmatrix} L - \begin{pmatrix} E \\ N_{bb}^{-1}B^T P \\ BN_{bb}^{-1}B^T P - E \\ BN_{bb}^{-1}B^T P \end{pmatrix} L_0$$

$$Q_{ZZ}=\begin{pmatrix} Q_{LL} & Q_{L\hat{X}} & Q_{LV} & Q_{L\hat{L}} \\ Q_{L\hat{X}} & Q_{\hat{X}\hat{X}} & Q_{\hat{X}V} & Q_{\hat{X}\hat{L}} \\ Q_{LV} & Q_{\hat{X}V} & Q_{VV} & Q_{V\hat{L}} \\ Q_{L\hat{L}} & Q_{\hat{X}\hat{L}} & Q_{V\hat{L}} & Q_{\hat{L}\hat{L}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E \\ N_{bb}^{-1}B^{T}P \\ BN_{bb}^{-1}B^{T}P-E \\ BN_{bb}^{-1}B^{T}P \end{pmatrix} Q_{LL} \begin{pmatrix} E \\ PBN_{bb}^{-1} \\ PBN_{bb}^{-1}B^{T}-E \\ PBN_{bb}^{-1}B^{T} \end{pmatrix}$$

$$Q_{ZZ}=\begin{pmatrix} Q_{LL} & BN_{bb}^{-1} & BN_{bb}^{-1}B^{T}-Q_{LL} & BN_{bb}^{-1}B^{T} \\ N_{bb}^{-1}B^{T} & N_{bb}^{-1} & 0 & N_{bb}^{-1}B^{T} \\ BN_{bb}^{-1}B^{T}-Q_{LL} & 0 & Q_{LL}-BN_{bb}^{-1}B^{T} & 0 \\ BN_{bb}^{-1}B^{T} & BN_{bb}^{-1} & 0 & BN_{bb}^{-1}B^{T} \end{pmatrix}$$

第七章　　间接平差

$$
Q_{\hat{X}\hat{X}} = N_{bb}^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{\hat{X}_1\hat{X}_1} & Q_{\hat{X}_1\hat{X}_2} & \cdots\cdots & Q_{\hat{X}_1\hat{X}_t} \\ Q_{\hat{X}_1\hat{X}_2} & Q_{\hat{X}_2\hat{X}_2} & \cdots\cdots & Q_{\hat{X}_2\hat{X}_t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{\hat{X}_1\hat{X}_t} & Q_{\hat{X}_2\hat{X}_t} & \cdots\cdots & Q_{\hat{X}_t\hat{X}_t} \end{pmatrix}
$$

待定点***i*** 的点位中误差

$\hat{X}_i$ 的中误差： $\hat{\sigma}_{\hat{X}_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_{2i-1}\hat{X}_{2i-1}}}$

$\hat{Y}_i$ 的中误差： $\hat{\sigma}_{\hat{Y}_i} = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_{2i}\hat{X}_{2i}}}$

i点的点位中误差

$$
\hat{M}_i = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{\hat{X}_{2i-1}\hat{X}_{2i-1}} + Q_{\hat{X}_{2i}\hat{X}_{2i}}}
$$

5、参数估值函数的中误差

设参数估值的函数为：

$$\varphi=\Phi(\hat{X}_1,\ \hat{X}_2,\ \cdots,\ \hat{X}_t)$$

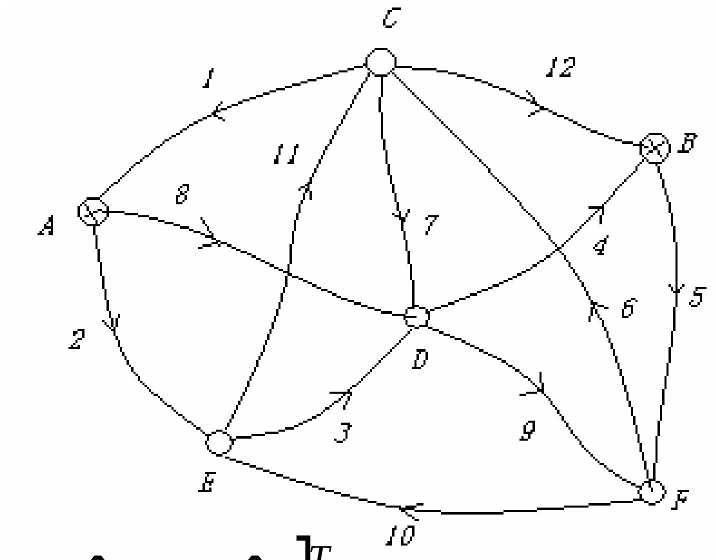
$$d\varphi=f_1 d\hat{X}_1+f_2 d\hat{X}_2+\cdots\cdots+f_t d\hat{X}_t=F^T d\hat{X}$$

$$f_i=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{X}_i}\right)$$

$$Q_{\varphi\varphi}=F^T Q_{\hat{X}\hat{X}}F$$

$$\hat{\sigma}_\varphi=\pm\hat{\sigma}_0\sqrt{Q_{\varphi\varphi}}$$

一、问题的提出



(1) 不设参数

(2)

$$\hat{X}=\begin{bmatrix}\hat{X}_1 & \hat{X}_2 & \hat{X}_3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\hat{H}_E & \hat{H}_F & \hat{h}_3\end{bmatrix}^T$$

(3)

$$\hat{X}=\begin{bmatrix}\hat{X}_1 & \hat{X}_2 & \hat{X}_3 & \hat{X}_4\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\hat{h}_3 & \hat{h}_4 & \hat{h}_5 & \hat{h}_6\end{bmatrix}^T$$

(4) $$\hat{X}=\begin{bmatrix}\hat{X}_1 & \hat{X}_2 & \hat{X}_3 & \hat{X}_4 & \hat{X}_5\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\hat{H}_C & \hat{H}_D & \hat{H}_E & \hat{H}_F & \hat{h}_6\end{bmatrix}^T$$

(5)

$$\hat{X}=\begin{bmatrix}\hat{X}_1 & \hat{X}_2 & \hat{X}_3 & \hat{X}_4 & \hat{X}_5 & \hat{X}_6\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\hat{H}_C & \hat{h}_1 & \hat{h}_4 & \hat{h}_6 & \hat{h}_9 & \hat{H}_F\end{bmatrix}^T$$

一、附有条件的间接平差原理

设误差方程和参数之间所应满足的条件方程为：

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times u}{B}\,\underset{u\times 1}{\hat{x}} - \underset{n\times 1}{l}$$

$$\underset{s\times u}{C}\,\underset{s\times 1}{\hat{x}} + \underset{s\times 1}{W_x} = 0,\ s = u - t$$

1、基础方程

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times u}{B}\,\underset{u\times 1}{\hat{x}} - \underset{n\times 1}{l}$$

$$\underset{s\times u}{C}\,\underset{s\times 1}{\hat{x}} + \underset{s\times 1}{W_x} = 0$$

$$\underset{u\times n}{B^T}\,\underset{n\times n}{P}\,\underset{n\times 1}{V} + \underset{u\times s}{C^T}\,\underset{s\times 1}{K_s} = 0$$

2、法方程

$$B^T PB\hat{x} + C^T K_s - B^T Pl = 0$$

$$C\hat{x} + W_x = 0$$

或

$$\begin{bmatrix} N_{bb} & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ k_s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_e \\ -w_x \end{bmatrix} = 0$$

3、解：

$$K_s = N_{cc}^{-1}(CN_{bb}^{-1}W + W_x)$$

$$\hat{x} = N_{bb}^{-1}(E - C^T N_{cc}^{-1} CN_{bb}^{-1})W + N_{bb}^{-1} C^T N_{cc}^{-1} W_x$$

$$\hat{L} = L + V,\ \hat{X} = X^0 + \hat{x}$$

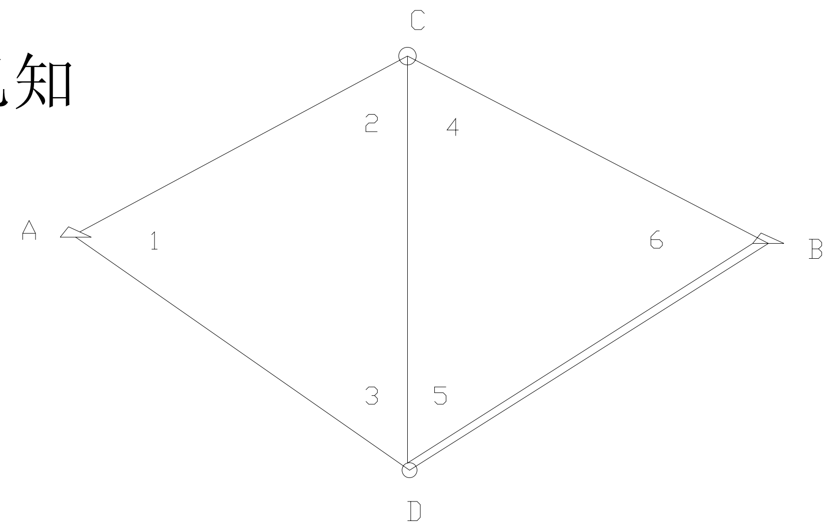
例：习题集8.3.22

有一矩形，已知一对角线长S_0=59.00cm （无误差），同精度观测了矩形边长L_1=50.830cm, L_2=30.240cm，并设其为参数X，试按附有限制条件的间接平差法求：

（1）L_1、L_2的平差值；

（2）矩形面积平差值。

例： 三角网如图所示，A、B为已知点，



其坐标为：

$$x_A = 1000.00m$$
$$y_A = 0.00m$$
$$x_B = 1000.00m$$
$$y_B = 1732.00m$$

已知BD边的边长为 $S_{BD} = 1000.00m$ 无误差。同精度独立观测值见下表，试按附有条件的间接平差对该网进行平差。

角号	观测值	角号	观测值
1	60 00 03	4	59 59 57
2	60 00 02	5	59 59 56
3	60 00 04	6	59 59 59

解：取参数近似值为：$x_C^0=1500.00m$，$y_C^0=866.00m$

$x_D^0=500.00m$，$y_D^0=866.00m$

误差方程和限制条件方程：

$$V=\begin{pmatrix} 1.786 & -1.031 & -1.786 & -1.031 \\ -1.786 & -1.032 & 0 & 2.063 \\ 0 & 2.063 & 1.786 & -1.032 \\ -1.786 & 1.032 & 0 & -2.063 \\ 0 & -2.063 & 1.786 & 1.032 \\ 1.786 & 1.032 & -1.786 & 1.032 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_C \\ \hat{y}_C \\ \hat{x}_D \\ \hat{y}_D \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2.24 \\ 4.62 \\ 6.62 \\ -0.38 \\ -1.38 \\ -6.24 \end{pmatrix}$$

$$-0.500\hat{x}_D-0.866\hat{y}_D-2.20=0$$

组成法方程：

$$\begin{pmatrix} 12.759 & 0 & -6.380 & 0 & 0 \\ 0 & 12.768 & 0 & -6.390 & 0 \\ -6.380 & 0 & 12.759 & 0 & -0.500 \\ 0 & -6.390 & 0 & 12.768 & -0.866 \\ 0 & 0 & -0.500 & -0.866 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_C \\ \hat{y}_C \\ \hat{x}_D \\ \hat{y}_D \\ k_s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -22.718 \\ 7.220 \\ 24.504 \\ -2.065 \\ 2.200 \end{pmatrix} = 0$$

求解法方程，得：

$$\hat{x}_C = -1.8505cm,\ \hat{y}_C = -0.6653cm$$

$$\hat{x}_D = -0.1399cm,\ \hat{y}_D = -2.4593cm$$

$$k_S = -28.9655$$

改正数为： $V=\left(+2.4'' \;\; -5.7'' \;\; -5.7'' \;\; +8.0'' \;\; 0.0'' \;\; 0.0''\right)^T$

参数平差值为：

$$\hat{X}_C = X_C^0 + \hat{x}_C = 1500m - 1.8505cm = 1499.981m$$

$$\hat{Y}_C = Y_C^0 + \hat{y}_C = 866.00m - 0.6653cm = 865.993m$$

$$\hat{X}_D = X_D^0 + \hat{x}_D = 500m - 0.1399cm = 499.999m$$

$$\hat{Y}_D = Y_D^0 + \hat{y}_D = 866.00m - 2.4593cm = 865.975m$$

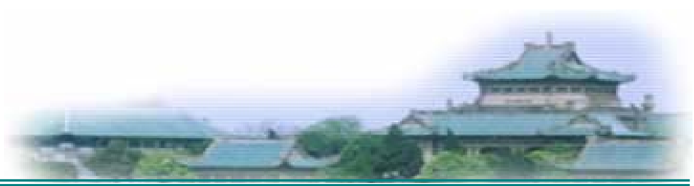
3、附有条件的间接平差步骤

（1）根据具体问题，列出误差方程和条件方程。

（2）由误差方程和条件方程列出法方程式。

（3）计算参数的改正数　　。

（4）计算观测值的平差值和参数的平差值。



4、精度评定

(1)、单位权中误差

在附有条件的间接平差中，单位权中误差的估值仍为

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T PV}{r}$$

(2)、基本向量的协因数矩阵

在附有条件的间接平差中，基本向量为：

$$L,\ W,\ \hat{X},\ K_s,\ V,\ \hat{L}$$

令：

$$\begin{bmatrix} N_{BB} & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{uu} & Q_{us} \\ Q_{su} & Q_{ss} \end{bmatrix}$$

则：

$$\hat{x} = Q_{uu} B^T Pl - Q_{us} w_x$$

$$k_s = Q_{su} B^T Pl - Q_{ss} w_x$$

而：

$$\begin{bmatrix} N_{BB} & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{uu} & Q_{us} \\ Q_{su} & Q_{ss} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_u & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}$$

$$Q_{uu} = N_{BB}^{-1} - N_{BB}^{-1} C^T N_{CC}^{-1} C N_{BB}^{-1}$$

$$Q_{us} = N_{BB}^{-1} C^T N_{CC}^{-1}$$

$$Q_{ss} = -N_{CC}^{-1}$$

$$N_{CC} = C N_{BB}^{-1} C^T$$

(3)、平差值函数的协因数

设平差值函数为　$\varphi=\Phi(\hat{X})$

将其全微分，得平差值函数的权函数式为：

$$d\varphi=\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{X}}d\hat{X}=F^{T}d\hat{X}$$

所以：

$$Q_{\varphi\varphi}=F^{T}Q_{\hat{X}\hat{X}}F,\qquad \hat{\sigma}_{\varphi}=\hat{\sigma}_{0}\sqrt{Q_{\varphi\varphi}}$$

式中：

$$F^{T}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{X}_{1}} & \frac{\partial\Phi}{\partial\hat{X}_{2}} & \cdots\cdots & \frac{\partial\Phi}{\partial\hat{X}_{u}}\end{pmatrix}$$

$$Q_{\hat{X}\hat{X}}=N_{bb}^{-1}-N_{bb}^{-1}C^{T}N_{cc}^{-1}CN_{bb}^{-1}$$

二、附有条件的条件平差模型（概括模型）

$$\underset{c\times n}{A}\underset{n\times 1}{V}+\underset{c\times u}{B}\underset{u\times 1}{\hat{x}}+\underset{c\times 1}{W}=\underset{c\times 1}{0}$$

$$\underset{s\times u}{C}\underset{u\times 1}{\hat{x}}+\underset{s\times 1}{W_x}=\underset{s\times 1}{0}$$

式中：$c=r+u-s$

三、平差方法总结

四、最小二乘估计的统计性质

观测就是抽样，抽样的结果称为子样，子样的函数称为统计量，统计量也都是随机变量或随机向量，因而每个统计量也各有其期望和方差，作为母体的数学期望的估计量，可以利用子样均值 $X_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ ，也可以用 $X_2=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$ ，

或 $X_3=x_i$ ，等其它估计量，究竟用哪一个，这就产生了按什么标准来评价估计量的问题。

1、无偏性 $E(\hat{\theta})=\theta$

2、有效性

选择方差最小的作为最佳估值。方差最小称为有效估计量。

补充知识

矩阵的迹及其运算规则

1、定义：方阵的主对角元素之和为该方阵的迹，记为：

$$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

2、性质：

（1）$tr(A^T)=tr(A)$　　（2）$tr(\lambda A^T)=\lambda tr(A)$

（3）$tr(\lambda)=\lambda$　　（4）$tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$

（5）$tr(AB)=tr(BA)$　　（6）$tr(AB^T)=tr(A^T B)$

（7）设**y**为 **n** 维的随机向量，则有 $E\{tr(yy^T)\}=tr\{E(yy^T)\}$

当**B** 为**n**阶方阵时，则有

$$E\{tr(yy^T B)\}=tr\{E(yy^T)B\}$$

3、迹的导数

已知矩阵 $\underset{mn}{A}$ 和方阵F，而 F 是包括 $\underset{mn}{A}$ 在内的若干个矩阵的乘积，或者说方阵 F 为 $\underset{mn}{A}$的函数矩阵，则 F 的迹关于矩阵 $\underset{mn}{A}$ 的偏导数是一个矩阵。

(1)

$$\frac{dtr(F)}{dA}=\left(\frac{\partial tr(F)}{\partial a_{ij}}\right)_{m,n}=\begin{bmatrix}\frac{\partial tr(F)}{\partial a_{11}} & \cdots & \frac{\partial tr(F)}{\partial a_{1n}}\\ \cdots & & \\ \frac{\partial tr(F)}{\partial a_{m1}} & \cdots & \frac{\partial tr(F)}{\partial a_{mn}}\end{bmatrix}$$

四、最小二乘估计的统计性质

1. $\hat{X}$ $\hat{L}$ 具有无偏估计
2. $\hat{X}$ $\hat{L}$ 具有最小方差

第十章　误差椭圆

1、误差椭圆的定义
2、确定误差椭圆的三个要素
3、确定任意方向上的位差
4、相对误差椭圆的应用

第十章　　误差椭圆

1、点位在任意方向上的中误差：

$$\sigma_{\varphi}^{2}=\sigma_{x'}^{2}=\sigma_{0}^{2}(Q_{xx}\cos^{2}\varphi+Q_{yy}\sin^{2}\varphi+Q_{xy}\sin 2\varphi)$$

2、极值方向

$$\tan 2\varphi_{0}=\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx}-Q_{yy}}$$

当 $Q_{xy}>0$ 时，极大值在一、三象限；极小值在二、四象限。

当 $Q_{xy}<0$ 时，极大值在二、四象限；极小值在一、三象限。

3、极大值与极小值

$$E^{2}=\sigma_{0}^{2}Q_{\varphi_E\varphi_E}=\frac{1}{2}\sigma_{0}^{2}\left(Q_{xx}+Q_{yy}+K\right)$$

$$F^{2}=\sigma_{0}^{2}Q_{\varphi_F\varphi_F}=\frac{1}{2}\sigma_{0}^{2}\left(Q_{xx}+Q_{yy}-K\right)$$

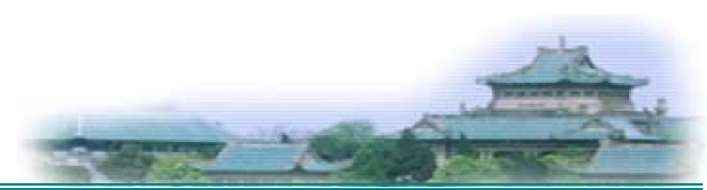
$$K=\sqrt{(Q_{xx}-Q_{yy})^{2}+4Q_{xy}^{2}}$$

4、以极值E、F表示任意方向上的位差

$$\sigma_{\psi}^{2}=\sigma_{0}^{2}(Q_{EE}\cos^{2}\psi+Q_{FF}\sin^{2}\psi)$$
$$=E^{2}\cos^{2}\psi+F^{2}\sin^{2}\psi$$

5、点位方差

$$\sigma_{p}^{2}=\sigma_{\hat{x}}^{2}+\sigma_{\hat{y}}^{2}=E^{2}+F^{2}$$



例1、已知P点的协因数阵为：

$$Q_{xx}=\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & Q_{yy} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.4494 & -0.2082 \\ -0.2082 & 0.3806 \end{pmatrix}\left(\frac{\text{cm}}{\text{秒}}\right)^2$$

单位权中误差为 $\sigma_0=\pm 5''$。试求点位误差椭圆的三个参数及点位误差　。

解：

$$\tan 2\varphi_0=\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx}-Q_{yy}}=\frac{2\times(-0.2082)}{0.4494-0.3806}=-6.0523$$

有　$2\varphi_0=99^\circ 22' 55''$　及　$2\varphi_0=279^\circ 22' 55''$

$\varphi_0=49^\circ 41' 27.5''$　　$\varphi_0=139^\circ 41' 27.5''$

因为　$Q_{xy}=-0.2082<0$　　$\varphi_E=139^\circ 41' 27.5''$　或 $\varphi_E=319^\circ 41' 27.5''$

$\varphi_F=49^\circ 41' 27.5''$　　$\varphi_F=229^\circ 41' 27.5''$

$$E^2=\frac{5^2}{2}\left(0.4494+0.3806+\sqrt{(0.4494-0.3806)^2+4\times(-0.2082)^2}\right)=15.6506$$

$$F^2=\frac{5^2}{2}\left(0.4494+0.3806-\sqrt{(0.4494-0.3806)^2+4\times(-0.2082)^2}\right)=5.0994$$

$$E=\pm3.96\text{cm},\ F=\pm2.26\text{cm}$$

于是得点位误差

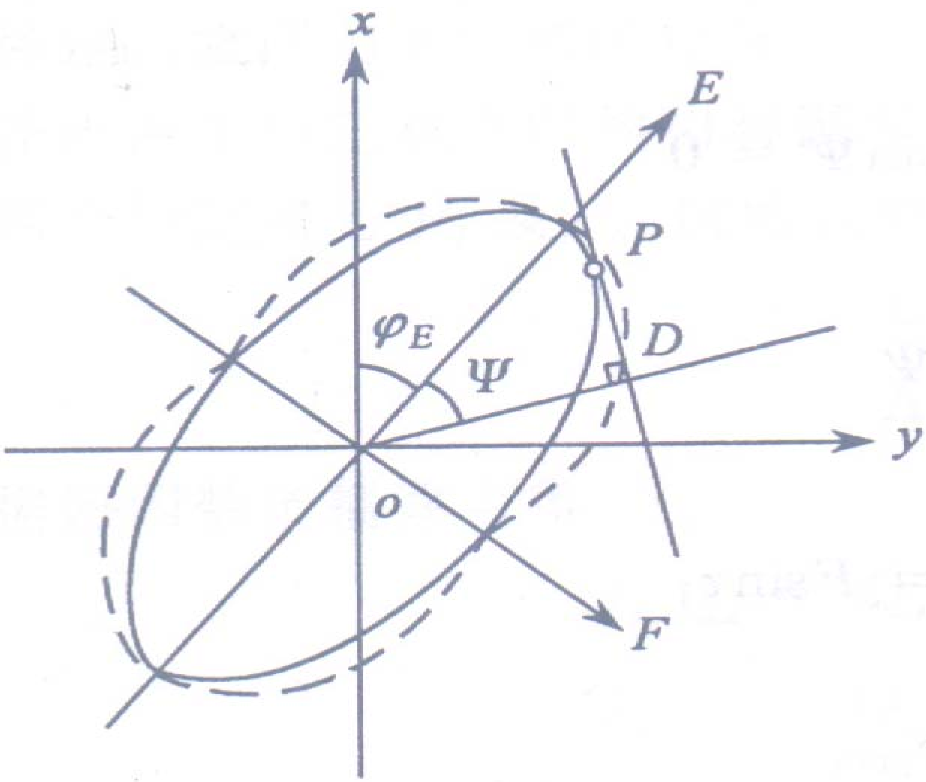
$$\sigma_p^2=E^2+F^2=15.6506+5.0994=20.7500,\ \sigma_p=\pm4.55\text{cm}$$

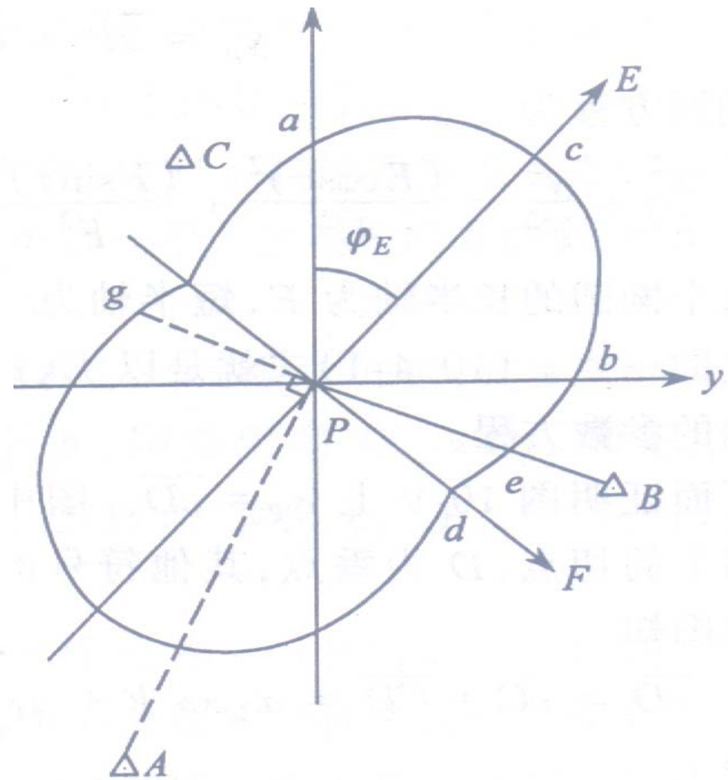
验算：

$$\sigma_p^2=\sigma_0^2(Q_{xx}+Q_{yy})=25(0.4494+0.3806)=20.75$$

五、误差曲线

六、误差椭圆





七、相对误差椭圆

这两个待定点的相对位置可通过平差后两点的坐标差来表示，即

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{ij} \\ \Delta y_{ij} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} Q_{\Delta x \Delta x} & Q_{\Delta x \Delta y} \\ Q_{\Delta x \Delta y} & Q_{\Delta y \Delta y} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} Q_{x_i x_i} + Q_{x_j x_j} - 2Q_{x_i x_j} & Q_{x_i y_i} - Q_{x_j y_i} - Q_{x_i y_j} + Q_{x_j y_j} \\ Q_{x_i y_i} - Q_{x_j y_i} - Q_{x_i y_j} + Q_{x_j y_j} & Q_{y_i y_i} + Q_{y_j y_j} - 2Q_{y_i y_j} \end{pmatrix}$$

如果这两个点中有一个为无误差的已知点，比如 P_i 点，则以上协因数阵变为：

$$\begin{pmatrix} Q_{\Delta x\Delta x} & Q_{\Delta x\Delta y} \\ Q_{\Delta x\Delta y} & Q_{\Delta y\Delta y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{x_j x_j} & Q_{x_j y_j} \\ Q_{x_j y_j} & Q_{y_j y_j} \end{pmatrix}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2Q_{\Delta x\Delta y}}{Q_{\Delta x\Delta x} - Q_{\Delta y\Delta y}}$$

$$E^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2\left(Q_{\Delta x\Delta x} + Q_{\Delta y\Delta y} + K\right)$$

$$F^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2\left(Q_{\Delta x\Delta x} + Q_{\Delta y\Delta y} - K\right)$$

$$K = \sqrt{(Q_{\Delta x\Delta x} - Q_{\Delta y\Delta y})^2 + 4Q_{\Delta x\Delta y}^2}$$

例3、设单位权中误差为 $\sigma_0 = \pm 5''$，**P1** 点和 **P2** 点的协因数阵为：

$$Q_{XX} = \begin{pmatrix} 0.004494 & -0.002082 & -0.000952 & -0.001553 \\ -0.002082 & 0.003806 & 0.002531 & 0.002931 \\ -0.000952 & 0.002531 & 0.007121 & 0.003332 \\ -0.001553 & 0.002931 & 0.003332 & 0.003784 \end{pmatrix} (\text{cm/s})^2$$

试绘出 **P1** 点和 **P2** 点的点位误差椭圆和相对误差椭圆，并从图上量取两点的相对位置精度。

解：P_1 的点位误差椭圆参数为：

极值方向：

$$\tan 2\varphi_{01} = \frac{2Q_{x_1y_1}}{Q_{x_1x_1} - Q_{y_1y_1}} = \frac{2 \times (-0.002082)}{0.004494 - 0.003806} = -6.052326$$

解得：

$$\varphi_{01} = 139^\circ 41' \text{和} \ \varphi_{01} = 229^\circ 41'$$

$$Q_{x_1x_1} < 0 \qquad \varphi_{E_1} = 139^\circ 41' \quad \text{或} \quad \varphi_{E_1} = 229^\circ 41'$$

$$K_1=\sqrt{(0.004494-0.003806)^2+4\times(-0.002086)^2}=0.004228$$

$$E_1^2=5^2\times(0.004494+0.003806+0.004228)/2=0.156604,\ E_1=\pm0.40\text{cm}$$

$$F_1^2=5^2\times(0.004494+0.003806-0.004228)/2=0.050900,\ F_1=\pm0.23\text{cm}$$

P2的点位误差椭圆参数为：

$$\tan 2\varphi_{02}=\frac{2Q_{x_2y_2}}{Q_{x_2x_2}-Q_{y_2y_2}}=\frac{2\times0.003332)}{0.007121-0.003784}=1.997003$$

$$\varphi_{02}=31^\circ42'\text{和}\ \varphi_{02}=121^\circ42'$$

$$Q_{x_2x_2}>0\qquad \varphi_{E_2}=31^\circ42'\quad\text{或}\quad \varphi_{E_2}=121^\circ42'$$

$$K_2=\sqrt{(0.007121-0.003784)^2+4\times0.003332^2}=0.007453$$

$$E_2^2=5^2\times(0.007121+0.003784+0.007453)/2=0.229475,\ E_2=\pm0.48\text{cm}$$

$$F_2^2=5^2\times(0.007121+0.003784-0.007453)/2=0.043150,\ F_2=\pm0.21\text{cm}$$

相对误差椭圆参数计算

$$Q_{\Delta x\Delta x}=0.004494+0.007121-2\times(-0.000952)=0.013519$$

$$Q_{\Delta y\Delta y}=0.003784+0.003806-2\times 0.002931=0.001728$$

$$Q_{\Delta x\Delta y}=-0.002082-0.002531-(-0.001553)+0.003332=0.000272$$

$$\tan 2\varphi_0=\frac{2Q_{\Delta x\Delta y}}{Q_{\Delta x\Delta x}-Q_{\Delta y\Delta y}}=\frac{2\times 0.000272}{0.013519-0.001728}=0.046137$$ （**1**度**19**分）

$$E^2=5^2\times(0.013519+0.001728+0.011804)/2=0.338138,\ E=\pm 0.58\text{cm}$$

$$F^2=5^2\times(0.013519+0.001728-0.011804)/2=0.04308,\ F=\pm 0.21\text{cm}$$