一、几何模型：

1、确定几何模型的必要元素（必要观测量）

（1）几何模型的形状 2个

（2）形状、大小 3个

（3）形状、大小、位置 6个

2、必要元素的选取与性质

（1）能唯一确定该模型

（2）最少需要

（3）元素间不存在任何确定的函数关系

二、平差的数学模型

为了研究并描述这样或那样的客观实际，人们总是通过抽象和概括，从理论上来定义和客观实际本质相适应的模型。

1、函数模型

函数模型是描述观测量与待求量间的数学关系。

2、随机模型

随机模型描绘的是观测值的统计性质，是通过观测值的数学期望和协方差阵（协因数阵）来表示，借以说明观测值是否受系统误差的影响、观测值的精度季它们是否相关等。

三、参数估计与最小二乘原理

- 最小二乘与极大似然估计

联合概率分布密度函数 $G = 常数 \times \exp\left\{-\frac{1}{2}(\Delta^T D^{-1} \Delta)\right\}$

所谓极大似然估计，就是要在其联合概率密度达到极大的条件下来对真误差进行估计。

$$\Delta^T D^{-1} \Delta = \min$$

预备知识:

矩阵的微分

1．纯量函数关于向量的导数

如果函数**f**是以**n**维向量 $X=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ 的**n**个元素**x**ᵢ为自变量的可微函数**f(X)=f(x₁ x₂…xₙ)**,且函数**f(X)**对其所有的自变量**x**ᵢ是可微的，则**f(X)**对于向量**X**的微分为

$$\underset{1,n}{\frac{df}{dx}}=\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2. 向量函数关于向量的导数

当有m个这样的函数

$$f_1(X) = f_1(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)$$

$$f_2(X) = f_2(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)$$

$$f_m(X) = f_m(x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)$$

构成函数向量

$$F = (f_1(x) \quad f_2(x) \quad \ldots \quad f_n(x))$$

则函数向量F关于n维向量X的微分为一个矩阵。

3. 函数向量关于向量的求导规则

（1） $$\frac{dC}{dX} = \underset{m,n}{0}$$

（2） $$\underset{m,1}{Z} = \underset{m,1}{F} + \underset{m,1}{G}, \qquad \frac{dZ}{dX} = \frac{dF}{dX} + \frac{dG}{dX}$$

（3） $$\underset{m,1}{F} = \underset{m,n}{A}\,\underset{n,1}{X}, \qquad \frac{dF}{dX} = \underset{m,n}{A}$$

（4） $$\underset{1,1}{F} = \underset{1,n}{X^T}\,\underset{n,n}{A}\,\underset{n,1}{X}, \qquad \frac{d(X^T AX)}{dX} = 2\underset{1,n}{X^T}\,\underset{n,n}{A}$$

基本概念

1、必要观测

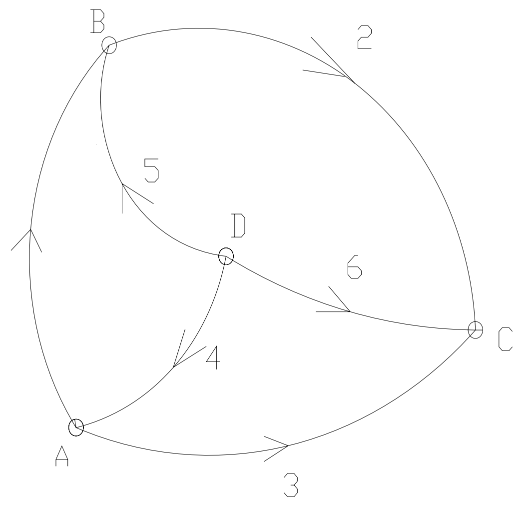
为了确定观测对象的位置或形状、大小所必须的最少观测数

2、多余观测 (redundant observation)

实际观测数与必要观测数之差，称为多余观测。

3、条件平差及其目的

例，水准网如右图，**D**为已知点，观测值及其权阵如下：



$$L=\left(0.023\ 1.114\ 1.142\ \ 0.078\ \ 0.099\ \ 1.216\right)^{T}$$

$$P = diag\ \ \left(1\ \ 1\ \ 1\ \ \ 2.5\ \ \ 2.5\ \ \ 2.5\right)$$

求观测值的平差值。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}=0$$

一、条件平差原理

1、条件方程 (condition equation)

$$A\hat{L} + A_0 = 0$$

2、函数模型(functional model)

$$\underset{r,n}{A}\,\underset{n,1}{V} + \underset{r,1}{W} = \underset{r,1}{0}, \qquad W = AL + A_0$$

3、随机模型 (stochastic model)

$$\underset{n,n}{D} = \sigma_0^2 \underset{n,n}{Q}$$

4、估计准则:

$$V^T PV = \min$$

条件极值法要点：

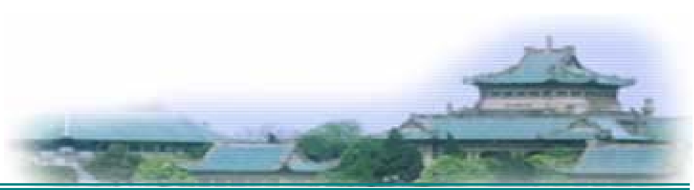
当具有约束条件时，求函数的优化解，则应在下述函数达到优化时寻求其解。

$$\Phi = \varphi + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_m \varphi_m$$

$$\Phi = V^T PV - 2K^T (AV + W)$$

求偏导：

$$\frac{d\Phi}{dV} = 2V^T P - 2K^T A = 0$$



基础方程：

$$\underset{r,n}{A}\underset{n,1}{V}+\underset{r,1}{W}=\underset{r,1}{0}, \qquad W=AL+A_0$$

$$\underset{n,1}{V}=\underset{n,n}{P^{-1}}\underset{n,r}{A^T}\underset{r,1}{K}$$

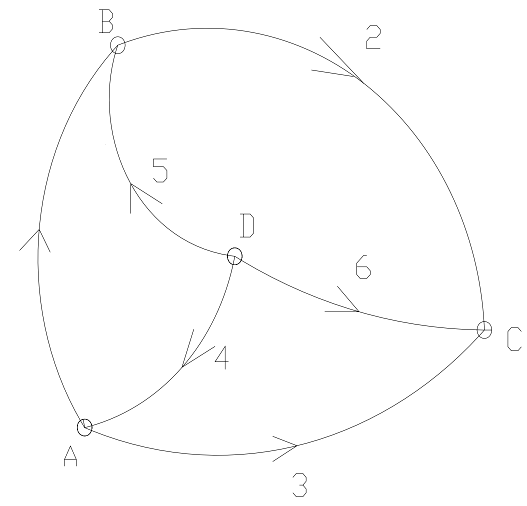
法方程：

$$\underset{r,r}{N_{aa}}\underset{r,1}{K}+W=0$$

解向量：

（1） $K=-N_{aa}W$ （2） $\underset{n,1}{V}=\underset{n,n}{Q}\underset{n,r}{A^T}\underset{r,1}{K}$ （3） $\hat{L}=L+V$

例，水准网如右图，**D**为已知点，观测值及其权阵如下：



$$L = (0.023\ 1.114\ 1.142\ 0.078\ 0.099\ 1.216)^T$$

$$P = diag\ (1\ \ 1\ \ 1\ \ 2.5\ \ 2.5\ \ 2.5)$$

求观测值的平差值。

解：（**1**）列出条件方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

法方程

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & -2 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

法方程的解

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 9 & -2 & -2 \\ -2 & 9 & -2 \\ -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{11} \\ \frac{6}{11} \end{pmatrix}$$

改正数**V**：

$$V=P^{-1}A^{T}K=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&2.5&0&0\\0&0&0&0&2.5&0\\0&0&0&0&0&2.5\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\\1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\frac{5}{11}\\\frac{6}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2.3\\-2.7\\-1.1\\0.9\\0.2\end{pmatrix}$$

观测值的平差值：

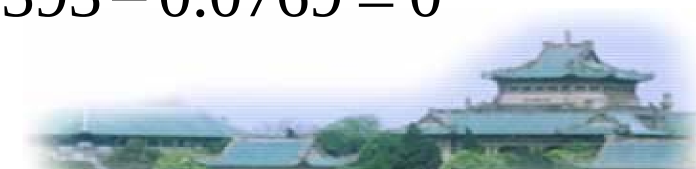
$$\hat{L}=L+V=\begin{pmatrix}0.0230 & 1.1163 & 1.1393 & 0.0769 & 0.0999 & 1.2162\end{pmatrix}^{T}$$

检核：

$$\hat{L}_1+\hat{L}_4-\hat{L}_6=0.0230+0.0769-0.0999=0$$

$$\hat{L}_2+\hat{L}_5-\hat{L}_6=1.1163+0.0999-1.2162=0$$

$$\hat{L}_6-\hat{L}_3-\hat{L}_4=1.2162-1.1393-0.0769=0$$



5、条件平差的求解步骤

（1）根据具体问题列条件方程式；

（2）组成法方程式；

（3）解法方程；

（4）按式求改正数*V*；

（5）求观测值的平差值 ；

（6）检核。

二、条件方程

（一）、水准网

1、水准网的分类及水准网的基准

分为有已知点和无已知点两类。

要确定各点的高程，需要1个高程基准。

2、水准网中必要观测数*t*的确定

有已知点：*t*等于待定点的个数

无已知点：*t*等于总点数减一

3、水准网中条件方程的列立方法

➢列条件方程的原则：1、足数；2、独立；3、最简

（1）、先列附合条件，再列闭合条件

（2）、附合条件按测段少的路线列立，附合条件的个数等于已知点的个数减一

(3)、闭合条件按小环列立（保证最简），一个水准网中有多少个小环，就列多少个闭合条件

在水准网条件平差中，按以上方法列条件方程，一定能满足所列条件方程足数、独立、最简的原则。

例，

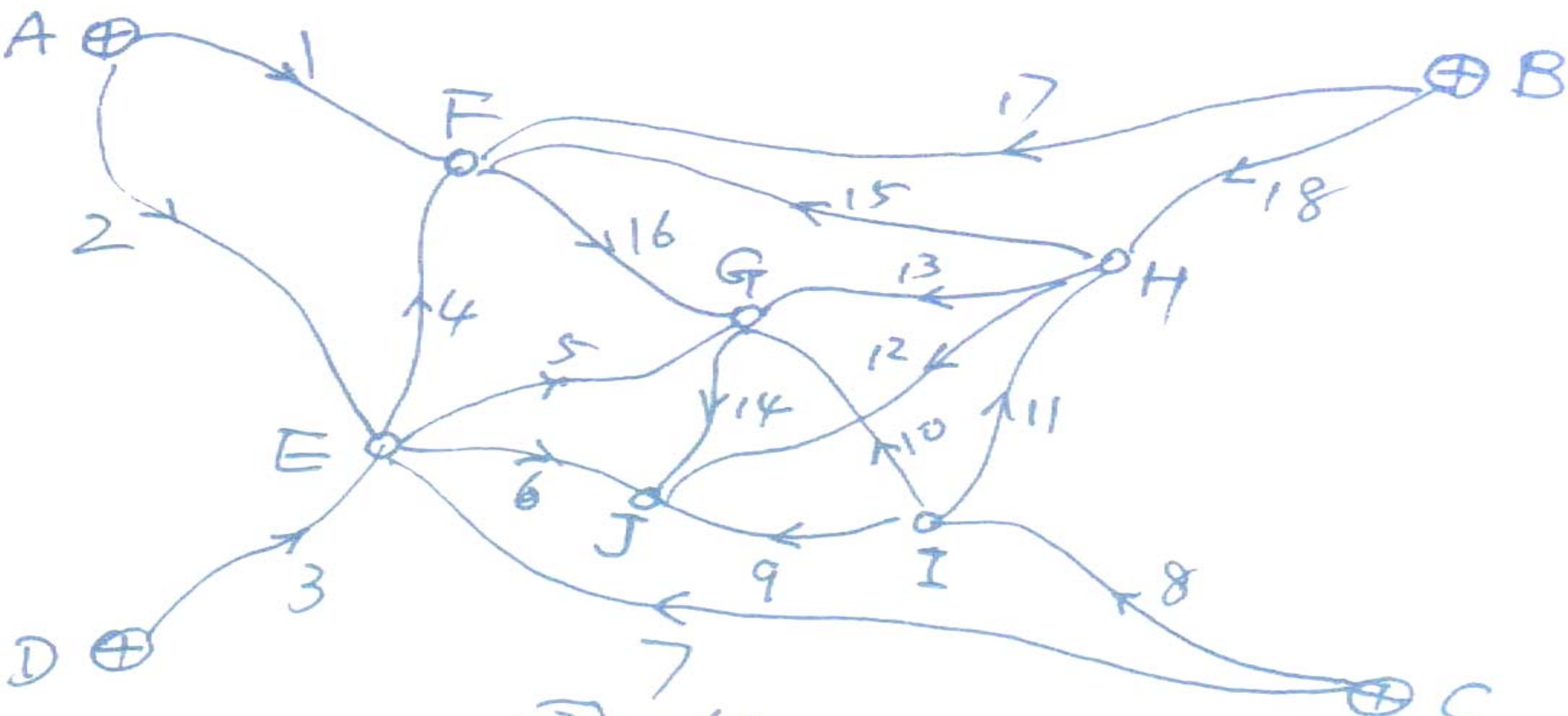


图5

（二）、三角网(测角网)

1、三角网的观测值

三角网的观测值很简单，全部是角度观测值。

2、三角网的作用

确定待定点的平面坐标。

3、三角网的基准数据

位置基准2个（任意一点的坐标 x_0，y_0 ）、方位基准1个（任意一条边的方位角 α_0 ）以及长度基准1个（任意一条边的边长 S_0 ）。

4、三角网中必要观测数 *t* 的确定

5、三角网中条件方程的列立

一般而言，网中全部独立的条件数是一定的，但其列法不唯一。为保证所列的条件既足数而又相互独立，下面先讨论三角网中几个基本图形，任何形式的三角网都是由这几个基本图形组成。

（1）单三角形

（2）大地四边形

（3）中点多边形

（4）扇形

6、条件方程的线性化

$$f(\hat{L})=0 \qquad \hat{L}=L+V$$

将函数在L处用台劳极数展开

$$f(\hat{L})=f(L)+\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{L}_1}\right)_L V_1+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial \hat{L}_n}\right)_L V_n$$

(三)、测边网

1、测边网的基准数据

三边网与三角网的区别是观测值。由于在三边测量中，观测值中带有长度基准。所以，三边测量中不需要长度基准。因此三边网的基准数据为：

位置基准2个（任意一点的坐标 x_0, y_0）、

方位基准1个（任意一条边的方位角 α_0），

2、三边网中必要观测数 t 的确定

3、三边网中条件方程的列立

（1）大地四边形

在测边网中，按角度闭合时条件方程为

$$\hat{\beta}_1+\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_3=0$$

$$v_{\beta_1}+v_{\beta_2}-v_{\beta_3}+w=0$$

角度改正数与边长改正数的关系

$$S_a^2=S_b^2+S_c^2-2S_bS_c\cos A$$

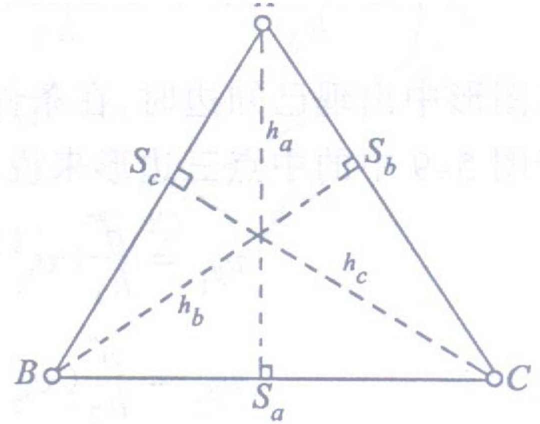
$$dA=\frac{1}{S_bS_c\sin A}[S_a dS_a-(S_b-S_c\cos A)dS_b-(S_c-S_b\cos A)dS_c]$$

由图知：

$$S_b S_c \sin A = S_b h_b = S_a h_a$$

$$S_b - S_c \cos A = S_a \cos C$$

$$S_c - S_b \cos A = S_a \cos B$$



故有：

$$dA = \frac{1}{h_a}(dS_a - \cos C dS_b - \cos B dS_c)$$

$$v''_A = \frac{\rho''}{h_a}(v_{S_a} - \cos C v_{S_b} - \cos B v_{S_c})$$

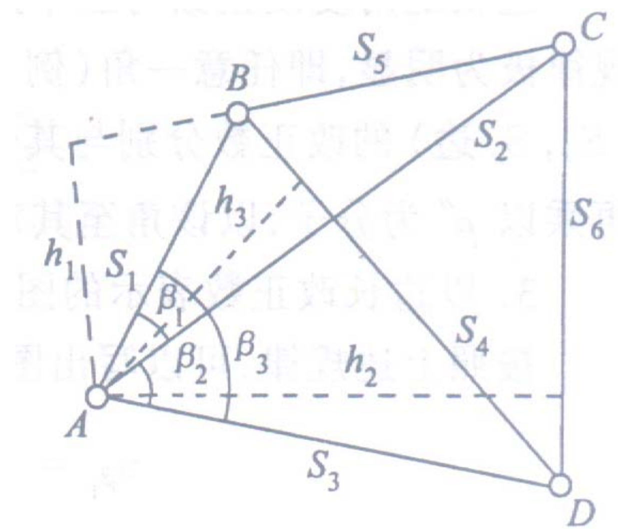
上式称为角度改正数方程。它具有明显的规律：

任意角度的改正数，等于其对边的改正数分别减去两邻边的改正数乘以其邻角的余弦，然后再除以该角至其对边的高，并乘以常数 ρ''。

$$v''_{\beta_1}=\frac{\rho''}{h_1}(v_{S_5}-\cos\angle ABC v_{S_1}-\cos\angle ACB v_{S_2})$$

$$v''_{\beta_2}=\frac{\rho''}{h_2}(v_{S_6}-\cos\angle ACD v_{S_2}-\cos\angle ADC v_{S_3})$$

$$v''_{\beta_3}=\frac{\rho''}{h_3}(v_{S_4}-\cos\angle ABD v_{S_1}-\cos\angle ADB v_{S_3})$$



代入　　$v_{\beta_1}+v_{\beta_2}-v_{\beta_3}+w=0$

得

$$\rho''\left(\frac{\cos\angle ABD}{h_3}-\frac{\cos\angle ABC}{h_1}\right)v_{S_1}-\rho''\left(\frac{\cos\angle ACB}{h_1}-\frac{\cos\angle ACD}{h_2}\right)v_{S_2}+$$

$$\rho''\left(\frac{\cos\angle ADB}{h_3}-\frac{\cos\angle ADC}{h_2}\right)v_{S_3}-\frac{\rho''}{h_3}v_{S_4}+\frac{\rho''}{h_1}v_{S_5}+\frac{\rho''}{h_2}v_{S_6}+w=0$$

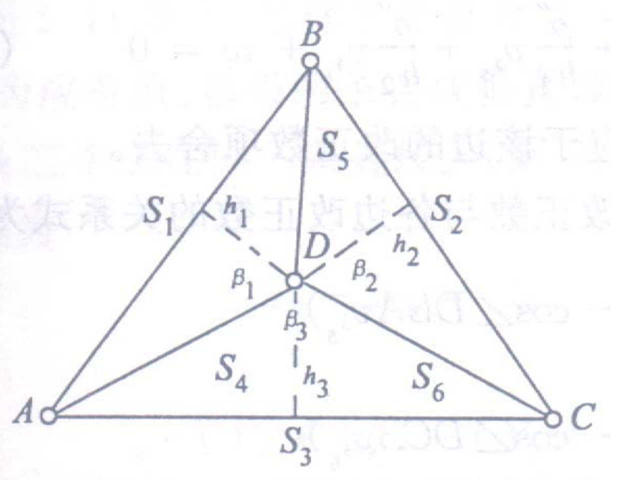
(2) 中点多边形

$$v_{\beta_1}+v_{\beta_2}+v_{\beta_3}+w=0$$

$$v''_{\beta_1}=\frac{\rho''}{h_1}(v_{S_1}-\cos\angle DAB v_{S_4}-\cos\angle DBA v_{S_5})$$

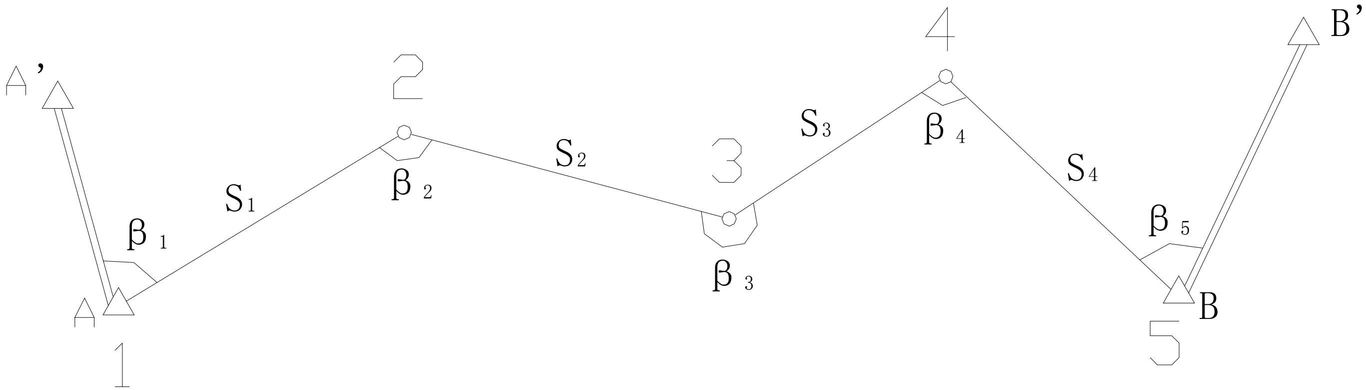
$$v''_{\beta_2}=\frac{\rho''}{h_2}(v_{S_2}-\cos\angle DBC v_{S_5}-\cos\angle DCB v_{S_6})$$

$$v''_{\beta_3}=\frac{\rho''}{h_3}(v_{S_3}-\cos\angle DCA v_{S_6}-\cos\angle DAC v_{S_4})$$



（四）、边角网条件方程

单一附合导线的条件方程



一个方位角条件

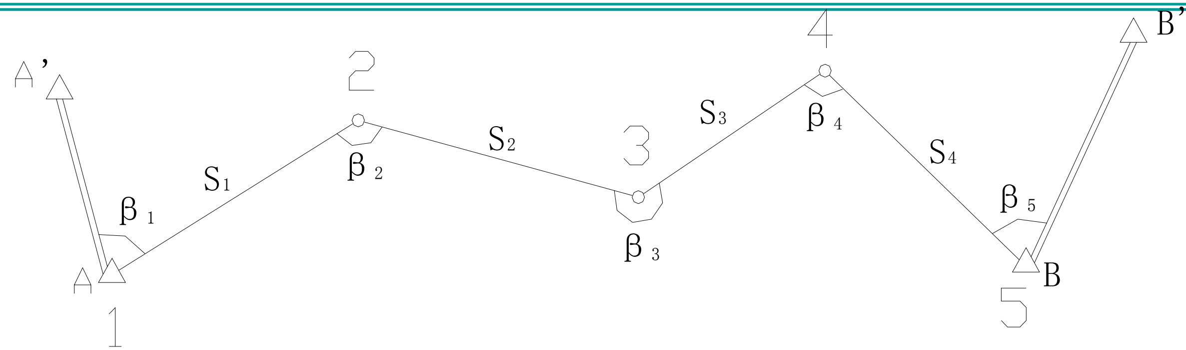
$$v_1 + v_2 + \cdots\cdots + v_{m+2} + w_\alpha = 0$$

$$w_\alpha = \alpha_{AA'} + \sum_{i=1}^{m+2} \beta_i - (m+2)\times 180^\circ - \alpha_{BB'}$$

两个坐标条件

$$x_A + \sum_{i=1}^{m+1} \Delta\hat{x}_i - x_B = 0$$

$$y_A + \sum_{i=1}^{m+1} \Delta\hat{y}_i - y_B = 0$$



纵坐标条件为

$$x_A + \Delta\hat{x}_1 + \Delta\hat{x}_2 + \Delta\hat{x}_3 + \Delta\hat{x}_4 - x_B = 0$$

$$\Delta\hat{x}_i = \hat{s}_i \cos\hat{\alpha}_i = (s_i + v_{s_i})\cos(\alpha_i + v_{\alpha_i})$$

$$\Delta\hat{x}_i = \Delta x_i + \cos\alpha_i v_{s_i} - \Delta y_i v_{\alpha_i} / \rho$$

而

$$\alpha_i + v_{\alpha_i} = \alpha_{AA'} + \sum_{j=1}^{i}(\beta_j + v_j) - i \cdot 180^\circ$$

$$v_{\alpha_i} = \sum_{j=1}^{i} v_j$$

所以纵坐标条件方程为：

$$\sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i v_{s_i} - \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{4}(\Delta y_i \sum_{j=1}^{i} v_i) + w_x = 0$$

$$w_x = x_A + \sum_{i=1}^{4}\Delta x_i - x_B$$

$$\sum_{i=1}^{4}(\Delta y_i \sum_{j=1}^{i} v_i) = \Delta y_1 v_1 + \Delta y_2 (v_1 + v_2) + \Delta y_3 (v_1 + v_2 + v_3) + \Delta y_4 (v_1 + v_2 + v_3 + v_4)$$

$$= (y_5 - y_1)v_1 + (y_5 - y_2)v_2 + (y_5 - y_3)v_3 + (y_5 - y_4)v_4 = \sum_{i=1}^{4}(y_5 - y_i)v_i$$

纵坐标条件方程的最终形式为：

$$\sum_{i=1}^{4}\cos\alpha_i v_{s_i} - \frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{4}(y_5 - y_i)v_i + w_x = 0$$

（五）GPS基线向量网三维无约束条件平差

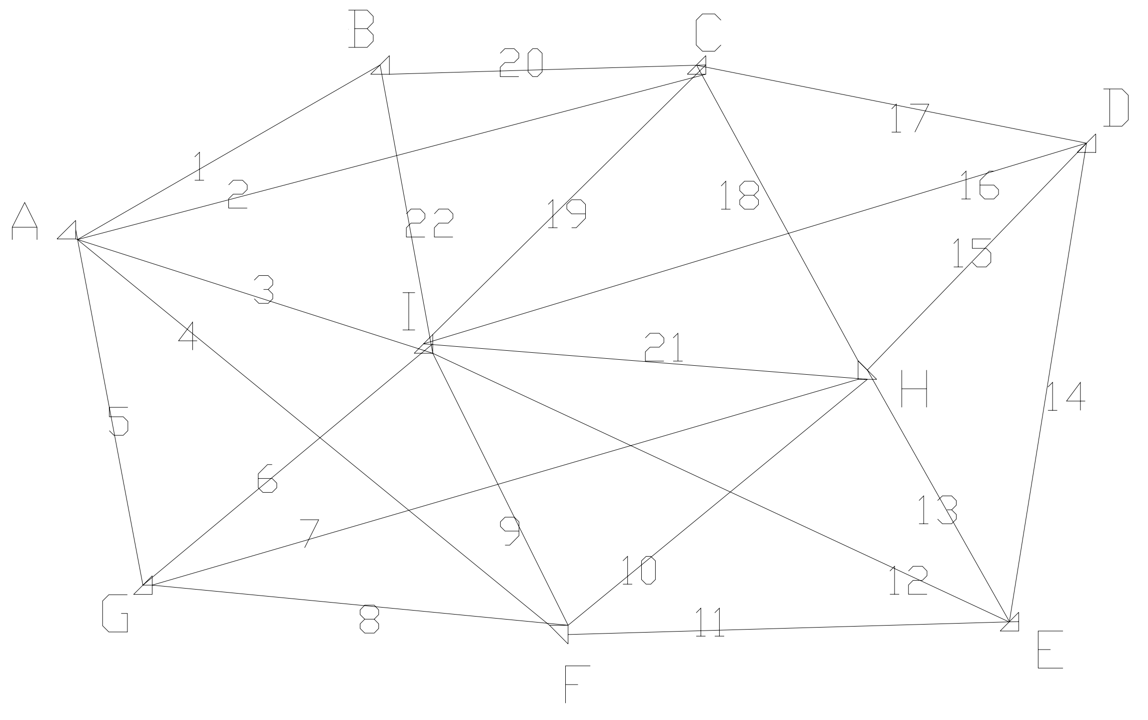
1、GPS基线向量网的观测值

一条基线三个观测值　Δx_{ij}，Δy_{ij}，Δz_{ij}

2、GPS基线向量网三维无约束平差的基准及必要观测数t

3、GPS基线向量网三维无约束平差的条件方程的列立

例：



（六）GIS数字化数据采集中，折角均为90度的*N*边形的条件方程

1、观测值

观测值为*N*个顶点的坐标，其个数为$n=2N$。

2、必要观测个数

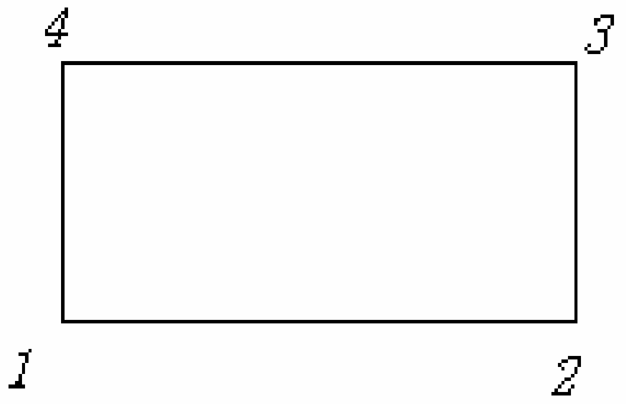
$t=N+1$

3、多余观测个数

$r=n-t=2N-N-1=N-1$

4、条件方程的类型

$N-1$个直角条件。



点数：$N=4$，观测值$n=2N=8$，$t=N+1=5$
$r=n-t=N-1=3$

直角条件：

$$\hat{\alpha}_{jk}-\hat{\alpha}_{jh}=$$

$$\arctan\frac{(y_k+v_{y_k})-(y_j+v_{y_j})}{(x_k+v_{x_k})-(x_j+v_{x_j})}-\arctan\frac{(y_h+v_{y_h})-(y_j+v_{y_j})}{(x_h+v_{x_h})-(x_j+v_{x_j})}-90^{\circ}=0$$

三、精度评定

1、观测值L的精度 $D_{LL}=\sigma_0^2 Q_{LL}=\sigma_0^2 P^{-1}$

2、单位权方差的估值

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^T PV}{r}$$

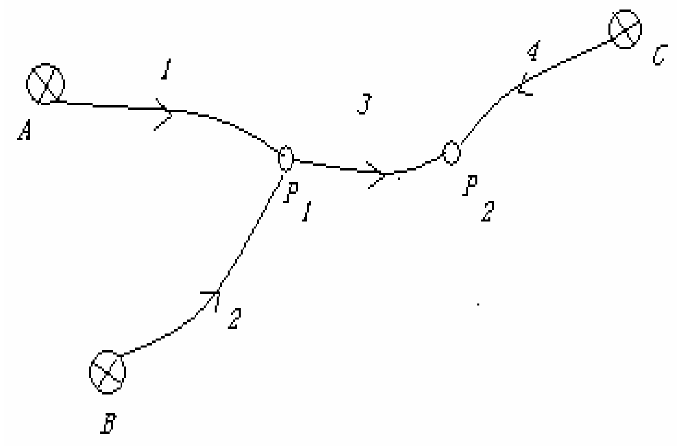
$V^T PV$ 的计算

3、观测值函数的协因数

4、平差值函数的协因数

例：已知： $H_A = 10.000m$　$H_B = 10.500\,m$　$H_C = 12.000m$

$S_1=S_2=S_4=2km,\ S_3=1km$



$$h = \begin{bmatrix}2.502 & 2.006 & 1.352 & 1.851\end{bmatrix}^T (m)$$

求（1）高差平差值；

（2）平差后第3段高差中误差。

小结：

一、条件平差及其目的

二、条件平差原理

三、总结了条件平差的步骤

（1）根据具体问题列条件方程式，$\underset{r\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=\underset{r\times 1}{0}$；

（2）组成法方程式，$AP^{-1}A^{T}K+W=0$；

（3）解法方程；

（4）计算改正数V，$V=P^{-1}A^{T}K$；

（5）求观测值的平差值 $\hat{L}=L+V$；

（6）检核；

（7）精度评定，，

一、问题的提出

二、附有参数的条件平差原理

函数模型 $\underset{c\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{V}+\underset{c\times u}{B}\,\underset{u\times 1}{\hat{x}}+\underset{c\times 1}{W}=\underset{c\times 1}{0}$

随机模型 $D_{LL}=\sigma_0^2 Q_{LL}=\sigma_0^2 P^{-1}$

基础方程

$$AV+B\hat{x}+W=0$$

$$V=P^{-1}A^T K$$

$$B^T K=0$$

法方程

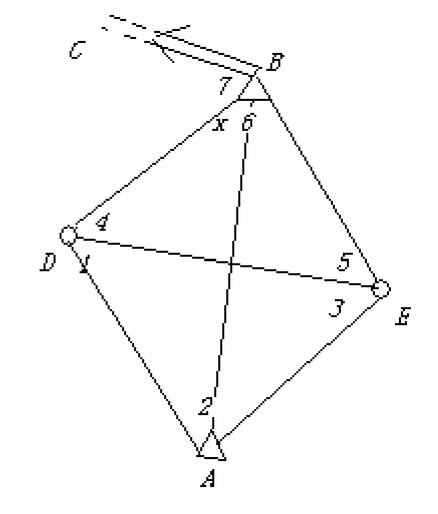
$$N_{aa}K+B\hat{x}+W=0$$

$$B^T K=0$$

解向量

$$\hat{x}=-N_{bb}^{-1}B^T N_{aa}^{-1}W$$

$$V=-P^{-1}A^T N_{aa}^{-1}(B\hat{x}+W)$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1.334 & 0 & 1.177 & -0.902 & 0.688 & 1.815 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{7,1}{V} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.941 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{1,1}{\hat{x}} + \begin{bmatrix} 1.4 \\ 0.9 \\ 16.507 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$N_{aa}=\begin{bmatrix}3 & 0 & -0.157 & 0\\ & 3 & 1.601 & 0\\ & & 7.746 & 0\\ & & & 1\end{bmatrix} \qquad N_{aa}^{-1}=\begin{bmatrix}0.337 & -0.0041 & 0.0076 & 0\\ & 0.3747 & -0.0775 & 0\\ & & 0.1453 & 0\\ & & & 1\end{bmatrix}$$

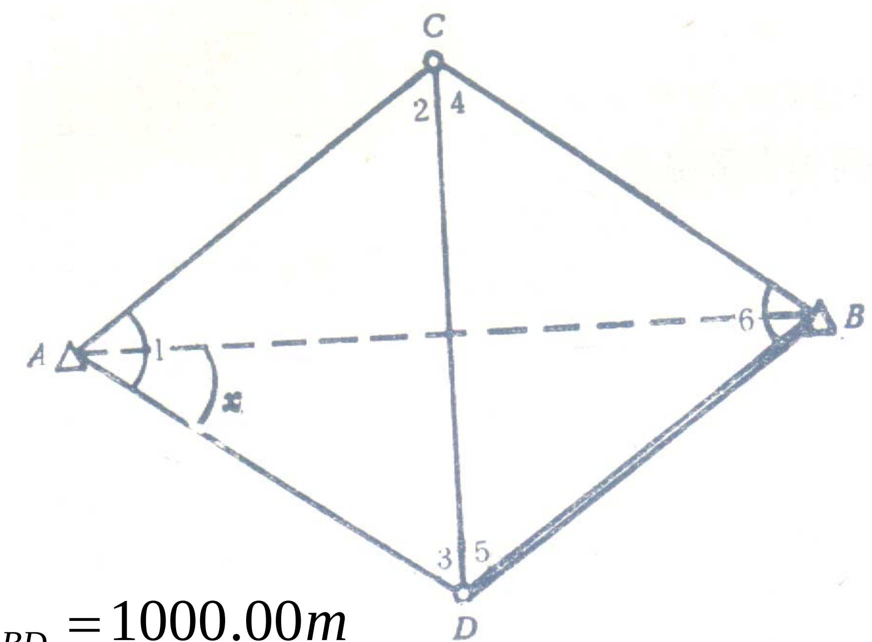
$$N_{bb}=B^T N_{aa}{}^{-1}B=3.2580$$

$$K=\begin{bmatrix}-0.5041 & 0.0830 & -0.7181 & -2.8306\end{bmatrix}^T$$

$$V=\begin{bmatrix}0.45 & -0.50 & -1.35 & 0.73 & -0.14 & -1.22 & 2.83\end{bmatrix}^T{}''$$

第六章　附有参数的条件平差

三角网如图所示，***A***、***B***为已知点，***BD***为已知边。其已知数据为：



$$x_A = 1000.00m,\quad y_A = 0.00m,$$

$$x_B = 1000.00m,\quad y_B = 1732.00m,\quad S_{BD} = 1000.00m$$

各角的同精度独立观测值见表。现选 $\angle CAB$ 的最或是值为参数，试按附有参数的条件平差求观测值的平差值和参数的平差值。

角号	观测值	角号	观测值
1	$60^\circ 00' 03''$	4	$59^\circ 59' 57''$
2	$60^\circ 00' 02''$	5	$59^\circ 59' 56''$
3	$60^\circ 00' 04''$	6	$59^\circ 59' 59''$

本例中$n = 6$，$t = 3$，$r = 3$，$u = 1$，故$c = r + u = 4$

$$v_1 + v_2 + v_3 + w_a = 0$$

$$v_4 + v_5 + v_6 + w_b = 0$$

$$\frac{\sin\hat{L}_4 \sin(\hat{L}_1 - \hat{X}) \sin(\hat{L}_3 + \hat{L}_5)}{\sin\hat{L}_5 \sin(\hat{L}_2 + \hat{L}_4) \sin\hat{X}} = 1$$

$$\frac{S_{AB} \sin\hat{X}}{S_{BD} \sin(\hat{L}_3 + \hat{L}_5)} = 1$$

取 $X^0=30^\circ00'00''$ ，将非线性条件线性化后，得条件方程为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1.732 & 0.577 & -0.577 & 1.155 & -1.155 & 0 \\ 0 & 0 & 0.577 & 0 & 0.577 & 0 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.464 \\ 1.732 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 5.196 \\ -6.051 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3.000 & 0 & 1.732 & 0.577 \\ 0 & 3.000 & 0 & 0.577 \\ 1.732 & 0 & 6.334 & -0.999 \\ 0.577 & 0.577 & -0.999 & 0.666 \end{pmatrix} K + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3.464 \\ 1.732 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 9 \\ -8 \\ 5.196 \\ -6.051 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3.464 & 1.732 \end{pmatrix} K = 0$$

解得：

$$\hat{x} = 5.4009'', \ V^T = \left(2.4'' \ \ -5.7'' \ \ -5.7'' \ \ 8.0'' \ \ 0.0 \ \ 0.0\right)$$

$$\hat{L}^T = \left(60^\circ00'05.4'' \ \ 59^\circ59'56.3'' \ \ 59^\circ59'58.3'' \ \ 60^\circ00'05.0'' \ \ 59^\circ59'56.0'' \ \ 59^\circ59'59.0''\right)$$

$$\hat{X} = 30^\circ00'05.4''$$

三、精度评定

1、观测值***L***的精度　　$D_{LL}=\sigma_0^2 Q_{LL}=\sigma_0^2 P^{-1}$

2、单位权方差的估值

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^T PV}{r}$$

$V^T PV$ 的计算

3、观测值函数的协因数

$$Q_{cc}=N_{aa}^{-1}-N_{aa}^{-1}BN_{bb}^{-1}B^{T}N_{aa}^{-1}$$

$$Q_{cu}=-N_{aa}^{-1}BN_{bb}^{-1} \qquad Q_{uu}=-N_{bb}^{-1}$$

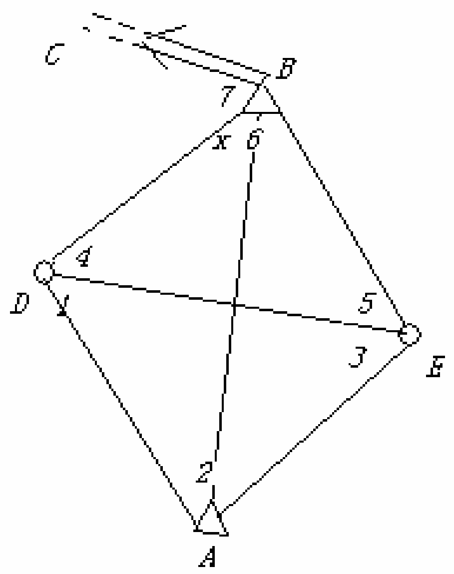
$$\begin{bmatrix} K \\ \hat{x} \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} Q_{cc} & Q_{cu} \\ Q_{uc} & Q_{uu} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} W \\ 0 \end{bmatrix}=-\begin{bmatrix} Q_{cc}W \\ Q_{uc}W \end{bmatrix}$$

$$Q_{kk}=Q_{cc}Q_{ww}Q_{cc}=Q_{cc}N_{aa}Q_{cc}=Q_{cc}$$

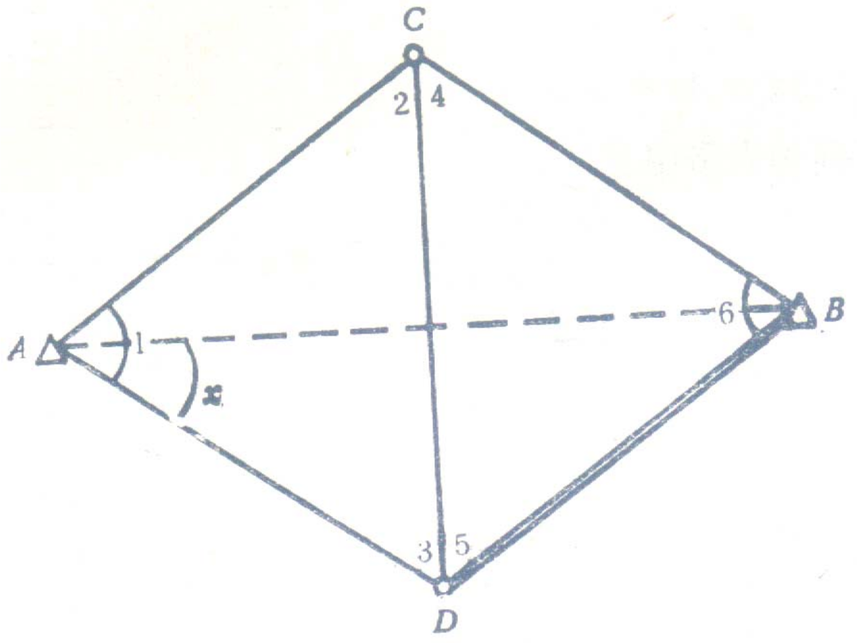
$$Q_{\hat{x}\hat{x}}=Q_{uc}Q_{ww}Q_{cu}=Q_{uc}N_{aa}Q_{cu}=N_{bb}^{-1}=-Q_{uu}$$

4、平差值函数的协因数

求边长AD 的权倒数。



求边长BC 的权倒数。



$$d\hat{\varphi} = f_L^T d\hat{L} + f_x^T d\hat{X}$$

$$d\hat{\varphi} = f_L^T d\hat{L} + f_x^T d\hat{X}$$

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = f_L^T Q_{\hat{L}\hat{L}} f_L - f_L^T Q_{\hat{L}\hat{X}} f_x - f_x^T Q_{\hat{X}\hat{L}} f_L - f_x^T Q_{\hat{X}\hat{X}} f_x$$

$$= f_L^T (Q - QA^T Q_{cc} AQ) f_L - f_L^T QA^T Q_{cu} f_x - f_x^T Q_{uc} A^T Q f_L - f_x^T Q_{\hat{X}\hat{X}} f_x$$

$$= f_L^T Q f_L - F^T Q_{cc} F - F^T Q_{cu} f_x - f_x^T Q_{uc} F - f_x^T Q_{\hat{X}\hat{X}} f_x$$

$$= f_L^T Q f_L - \begin{bmatrix} F^T & f_x^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{cc} & Q_{cu} \\ Q_{uc} & Q_{uu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ f_x \end{bmatrix}$$

$$\hat{L} = L + V = L + QA^T K = L - QA^T Q_{cc} AL + \hat{L}^0 = (E - QA^T Q_{cc} A)L + \hat{L}^0$$

$$Q_{\hat{L}\hat{x}} = (E - QA^T Q_{cc} A)QA^T Q_{cu} = QA^T Q_{cu} - QA^T (N_{aa}^{-1} - N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1}) AQA^T Q_{cu}$$

$$= QA^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} AQA^T Q_{cu}$$

$$= QA^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T Q_{cu}$$

$$= -QA^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} B^T N_{aa}^{-1} B N_{bb}^{-1} \quad = QA^T Q_{cu}$$

小结：

1、为了某种需要，选择参数；

2、每选一个参数，就增加一个条件方程，选择u个参数，就增加u个条件方程；

3、条件方程的总数为$c = r + u$；

4、单位权中误差的计算公式不变；

5、求平差值函数的中误差时，应将平差值函数分别对观测值的平差值和参数求偏导数。