

文章编号: 1000-4750(2014)04-0252-05

椭圆形港湾内水波共振的解析解

王 岗^{1,2}, 郑金海^{1,2}, 徐龙辉², 董文凯²

(1. 河海大学水文水资源与水利工程科学国家重点实验室, 南京 210098;

2. 河海大学港口海岸与近海工程学院, 南京 210098)

摘 要: 通过坐标变换将线性长波方程转换为基于椭圆坐标系的水波运动方程, 并采用分离变量法分别得到马丢方程描述的极角方向运动方程和拓展型马丢方程描述的径向运动方程。椭圆形港湾内的水波共振可以表示为马丢函数与拓展型马丢函数的乘积。由边界处自由水面法向量梯度为零求得水波共振的特征参数。椭圆形港湾内水波共振的极角方向波节点数与马丢函数的阶数相同, 径向波节点数与边界条件相关。

关键词: 港湾共振; 椭圆形港湾; 马丢函数; 水波共振; 海岸动力学

中图分类号: TV139.2 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.11.0886

AN ANALYTICAL SOLUTION FOR OSCILLATIONS WITHIN AN ELLIPTICAL HARBOR

WANG Gang^{1,2}, ZHENG Jin-hai^{1,2}, XU Long-hui², DONG Wen-kai²

(1. State Key Laboratory of Hydrology-Water Resources and Hydraulic Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China;

2. College of Harbor Coastal and Offshore Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A linear function is obtained by transforming the shallow-water wave equation from rectangular coordinates to elliptic coordinates, which gives the ordinary and the modified Mathieu equations respectively to describe oscillations in the polar and the radial directions by applying the method of separation of variables. Oscillations within an elliptical harbor can be described by appropriate products of radial and angular Mathieu functions. Eigenvalues are obtained by implementing the no-flux condition at the boundary. The oscillation is a two dimension distribution, and there are n nodes running in the polar direction, which is the same as the order of the angular Mathieu function; the nodes in radial direction are related with the boundary condition.

Key words: harbor resonance; elliptical harbors; Mathieu functions; resonance; coastal dynamics

沿海港湾受到各种波浪的作用, 有时会出现周期性的水面波动现象, 称之为港湾共振。港湾共振可使停靠在码头的船舶产生大幅晃动, 影响其正常作业, 甚至导致系泊缆断裂, 致使船舶之间及船和码头建筑物间的碰撞, 严重时还会导致灾难事故^[1-2]。为了深入了解这些共振的产生机理, 学者们利用不同的波浪理论描述了这一现象。Miles 和

Munk^[3]通过引用了辐射阻尼的概念研究了直接与外海相连的矩形港湾共振问题。Carrier 等^[4]研究通过狭长河道与外海相连的港口内水波共振问题时发现, 河道的有限长度所产生的效应定性等同于口门宽度的缩小。Mei 和 Ünlüata^[5]通过分析两个连通港口内的共振现象研究了外港对内港的庇护效应, 发现在某些条件下外港不仅不能减缓内港的共振

收稿日期: 2012-11-24; 修改日期: 2013-06-19

基金项目: 国家自然科学基金项目(51209081); 中国博士后科学基金项目(2012M511191); 江苏省博士后科研计划项目(1102071C); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2012B01214)

通讯作者: 郑金海(1972-), 男, 福建莆田人, 教授, 博士, 博导, 从事海岸动力学研究(E-mail: jhzheng@hhu.edu.cn).

作者简介: 王 岗(1982-), 男, 河北张家口人, 讲师, 博士, 从事港湾共振和边缘波研究(E-mail: gangwang@hhu.edu.cn);

徐龙辉(1988-), 男, 江苏苏州人, 硕士生, 从事港湾共振研究(E-mail: xulonghuihh@sina.com);

董文凯(1989-), 男, 河南焦作人, 硕士生, 从事港湾共振研究(E-mail: wsdongwenkai@126.com).

反而有加剧的效果。Miles^[6]将流体的速度和压力类比为电压和电流，将港湾共振这一流体力学问题等效为电磁学问题。该方法不仅能研究任意形状的港口，还可以通过电阻元件考虑实际流体的能量耗散，且通过电路实验可以模拟真实港湾的共振问题。Wang 等^[7]从理论上研究了变水深矩形港口内纵向共振问题，分析了地形的影响，并指出由于地形折射作用存在着一类非传播模式的横向共振。余锡平^[8]总结了矩形、圆形和组合形状封闭及开口港湾共振解析理论。这些研究大多分析形状规则的港湾共振问题，虽然很少能直接应用于实际工程中，但是它们对认识港湾共振的机理有着重要的意义。

虽然椭圆形是一种常见的几何形状，但是其内水波运动的分析还不多见。主要原因是涉及到马丢函数(Mathieu Functions)及其拓展函数(Modified Mathieu Functions)，而这些函数不能以简单易用的解析形式来表示^[9]。计算马丢函数的困难主要在于其特征值的求解。随着众多学者对此的深入研究，出现了各种适用于较大参数范围的计算方法^[10-11]。本文基于线性长波方程，分析常水深椭圆形港湾内的水波运动形式，并举例详细说明偶模态和奇模态的共振特征。

1 理论分析

对于大多数的港湾而言，其水深都远小于港湾共振所对应的波长。在此情况下波动垂向变化相对很小，主要是水平运动。因此，可以利用线性长波方程研究这一问题。自由水面可以表示为：

$$\eta(x, y, t) = \zeta(x, y) \cos(\omega t) \quad (1)$$

其中：

$$\nabla^2 \zeta + k^2 \zeta = 0 \quad (2)$$

且

$$k = \omega / \sqrt{gh} \quad (3)$$

其中： ω 为角频率； k 为波数； h 为水深。在直角坐标系中，椭圆形港湾表示为：

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (4)$$

其中： a 为长半轴； b 为短半轴。

为了便于考虑边界的影响，引入椭圆坐标系(见图 1)。做变换

$$\begin{cases} x = \alpha \cosh(\mu) \cos(\nu) \\ y = \alpha \sinh(\mu) \sin(\nu) \end{cases} \quad (5)$$

其中： μ 为径向变量， $0 \leq \mu \leq \operatorname{arccosh}(a/\sqrt{a^2 - b^2})$ ； ν 为极角方向变量， $0 \leq \nu \leq 2\pi$ ，而参数 $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$ 。将式(5)代入式(2)得：

$$\zeta_{\mu\mu} + \zeta_{\nu\nu} + \frac{k^2 \alpha^2}{2} (\cosh 2\mu - \cos 2\nu) \zeta = 0 \quad (6)$$

采用分离变量法，设：

$$\zeta(\mu, \nu) = M(\mu)N(\nu) \quad (7)$$

代入式(6)，有：

$$\frac{M''}{M} + \frac{k^2 \alpha^2}{2} \cosh 2\mu = -\frac{N''}{N} + \frac{k^2 \alpha^2}{2} \cos 2\nu = \lambda \quad (8)$$

则有：

$$N'' + (\lambda - 2q \cos 2\nu)N = 0 \quad (9)$$

和

$$M'' - (\lambda - 2q \cosh 2\mu)M = 0 \quad (10)$$

其中：

$$q = k^2 \alpha^2 / 4 \quad (11)$$

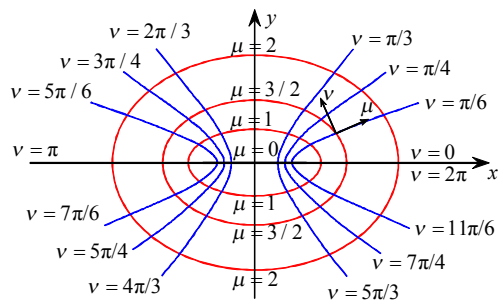


图 1 椭圆坐标系

Fig.1 Elliptical coordinate system

式(9)为 Mathieu 函数，由于通常所研究的物理现象要求具有周期性，其对应的周期解为：

$$N = r'_1 \operatorname{ce}_n(\nu, q) + r'_2 \operatorname{se}_n(\nu, q) \quad (12)$$

其中： r'_1 和 r'_2 为待定系数， $\operatorname{ce}_n(\nu, q)$ 和 $\operatorname{se}_n(\nu, q)$ 为 n 阶 Mathieu 函数，具体表示为：

$$\begin{aligned} \operatorname{ce}_{2n}(\nu, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m}^{2n}(q) \cos 2m\nu, \\ \operatorname{ce}_{2n+1}(\nu, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}^{2n+1}(q) \cos(2m+1)\nu, \\ \operatorname{se}_{2n+1}(\nu, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+1}^{2n+1}(q) \sin(2m+1)\nu, \\ \operatorname{se}_{2n+2}(\nu, q) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m+2}^{2n+2}(q) \sin(2m+2)\nu. \end{aligned} \quad (13)$$

显然， $\operatorname{ce}_n(\nu, q)$ 是 ν 的偶函数，对应的特征值记为 $\lambda = a_n$ ， $n = 0, 1, 2, \dots$ ； $\operatorname{se}_n(\nu, q)$ 是 ν 的奇函数，对应的特征值记为 $\lambda = b_n$ ， $n = 1, 2, \dots$ 。

无数组。分别将 q 由 0 逐渐增大时第 j 组解所对应的共振模态记为 $m_e(n, j)$ (偶模态共振)和 $m_o(n, j)$ (奇模态共振)。显然, n 和 j 越大, 对应的共振频率也越高。实际中危害最大、最常见的港湾共振通常都发生在较低模态上, 所以这里仅分析低模态港湾共振, 具体参数见表 1。

表 1 椭圆形港湾($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)内水波共振参数

Table 1 Eigenvalues for the elliptical harbor ($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)

偶模态			奇模态		
n	f/Hz	q	n	f/Hz	q
0	0.81	5.23	1	0.42	1.42
0	1.55	19.30	1	1.18	11.17
0	2.29	42.13	1	1.92	29.61
1	0.26	0.56	2	0.58	2.70
1	0.97	7.56	2	1.34	14.39
1	1.70	23.42	2	2.07	34.64

椭圆形港湾内发生共振时, 其振幅沿着极角 ν 呈周期性变化: n 为偶数时周期为 π , n 为奇数时周期为 2π (见图 2 和图 3)。解析解中负波幅表示与正值的波幅相差 π 的相位。若定义波节点为正波幅与负波幅交接点, 则 $n=0$ 时极角方向没有波节点(见

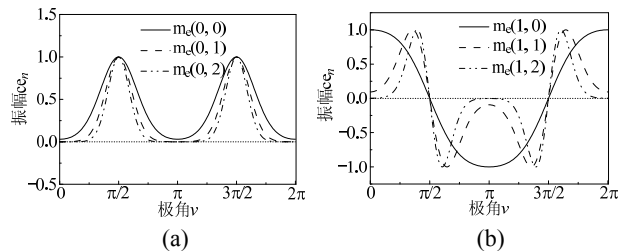


图 2 椭圆形港湾($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)内偶模态共振时波幅在极角方向 ν 的变化
Fig.2 Wave amplitude profiles for even modes in the polar direction ν for the elliptical harbor ($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)

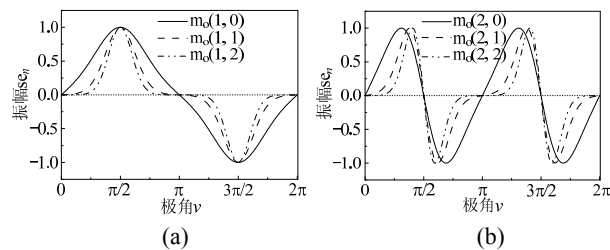


图 3 椭圆形港湾($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)内奇模态共振时波幅在极角方向 ν 的变化
Fig.3 Wave amplitude profiles for odd modes in the polar direction ν for the elliptical harbor ($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)

图 2(a)); $n=1$ 时在极角方向存在 1 个波节点(见图 2(b)和图 3(a)); $n=2$ 时在极角方向存在 2 个波节点(见图 3(b)), ……。

偶模态共振在径向中心处 $\mu=0$ 为极大值, 而奇模态共振在中心处保持为零。径向的波节点数与 j 相关。当 $n=0$ 时, 共振 $m_e(0, j)$ 径向波节点数为 j 个(图 4(a)); 当 $n \geq 1$ 时, 径向波节点数为 $j-1$ 个(图 4(b)和图 5)。所以, 椭圆形港湾内的自由水面振荡是二维的(见图 6 和图 7)。对于模态 $m_e(n, j)$ 或 $m_o(n, j)$, 在极角方向存在 n 个波节点, 径向存在 $j(n=0$ 时)或 $j-1(n \geq 1$ 时)个波节点。

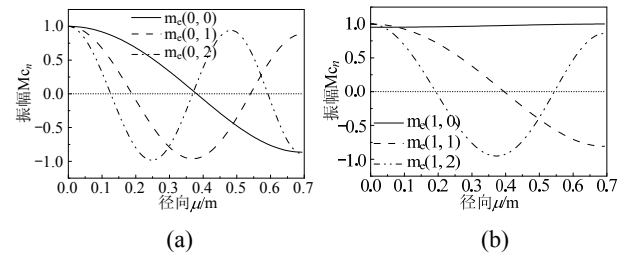


图 4 椭圆形港湾($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)内偶模态共振时波幅在径向 μ 方向的变化
Fig.4 Wave amplitude profiles for even modes in the radial direction μ for the elliptical harbor ($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)

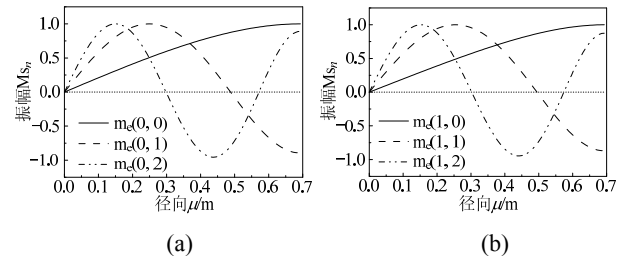


图 5 椭圆形港湾($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)内奇模态共振时波幅在径向 μ 方向的变化
Fig.5 Wave amplitude profiles for odd modes in the radial direction μ for the elliptical harbor ($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)

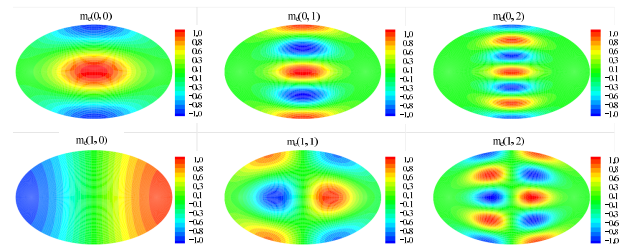


图 6 椭圆形港湾($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)内偶模态共振无量纲波幅空间分布
Fig.6 Dimensionless amplitude structure for even modes in the elliptical harbor ($a=2.5m, b=1.5m, h=0.5m$)

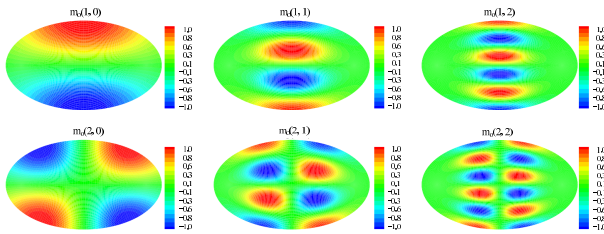


图7 椭圆形港湾($a=2.5\text{m}$, $b=1.5\text{m}$, $h=0.5\text{m}$)内奇模态共振无量纲波幅空间分布

Fig.7 Dimensionless amplitude structure for odd modes in the elliptical harbor ($a=2.5\text{m}$, $b=1.5\text{m}$, $h=0.5\text{m}$)

3 结论

基于线性长波理论, 本文分析了椭圆形港湾内的水波共振问题。通过坐标变换, 将二维 Helmholtz 方程转换为基于椭圆坐标系的运动方程, 并通过分离变量法分别得到马丢方程描述的极角方向运动方程和拓展型马丢方程描述的径向运动方程。在极角方向, 分别采用 n 阶偶函数 $ce_n(\nu, q)$ ($n \geq 0$) 和 n 阶奇函数 $se_n(\nu, q)$ ($n \geq 1$) 表示; 在径向, 采用第一类变型 n 阶偶函数 $Mc_n(\mu, q)$ ($n \geq 0$) 和 n 阶奇函数 $Ms_n(\mu, q)$ ($n \geq 1$) 表示。由边界处自由水面法向量梯度为零求得椭圆形港湾内水波共振的特征频率和波数。椭圆形港湾内的自由水面振荡是二维的, 对于模态 $m(n, j)$, 在极角方向存在 n 个波节点, 径向存在 j ($n=0$ 时) 或 $j-1$ ($n \geq 1$ 时) 个波节点。

参考文献:

- [1] 王岗, 马小舟, 马玉祥, 董国海. 短波对港池长周期振荡的影响[J]. 工程力学, 2010, 27(4): 240—245.
Wang Gang, Ma Xiaozhou, Ma Yuxiang, Dong Guohai. Long-period harbor resonance induced by short waves [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(4): 240—245. (in Chinese)
- [2] 郑金海, 徐龙辉, 王岗. 斜坡底床港湾内横向与纵向波

浪共振的解析解[J]. 工程力学, 2013, 30(5): 293—297.
Zheng Jinhai, Xu Longhui, Wang Gang. Theoretical analysis of transverse and longitudinal oscillations within a harbor of constant slope [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(5): 293—297. (in Chinese)

- [3] Miles J, Munk W. Harbor paradox [J]. Journal of the Waterways and Harbors Division, 1961, 87(3): 111—132.
- [4] Carrier G F, Shaw R P, Miyata M. Channel effects in harbor resonance [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1971, 97(6): 1703—1716.
- [5] Mei C C, Ünlüata Ü. Resonant scattering by a harbor with two coupled basins [J]. Journal of Engineering Mathematics, 1976, 10(4): 333—353.
- [6] Miles J W. Resonant response of harbours: An equivalent-circuit analysis [J]. Journal of Fluid Mechanics, 1971, 46: 241—265.
- [7] Wang G, Dong G, Perlin M, et al. An analytic investigation of oscillations within a harbor of constant slope [J]. Ocean Engineering, 2011, 38(2/3): 479—486.
- [8] 余锡平. 近岸水波的解析理论[M]. 北京: 科学出版社, 2012: 186—211.
Yu Xiping. Analytical theory of nearshore waves [M]. Beijing: Science Press, 2012: 186—211. (in Chinese)
- [9] McLachlan N W. Theory and application of Mathieu functions [M]. Oxford: At the Clarendon Press, 1951: 10—27.
- [10] Van Buren A L, Boisvert J E. Accurate calculation of the modified Mathieu functions of integer order [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 2007, 65: 1—23.
- [11] 张善杰, 金建铭. 特殊函数计算手册[M]. 南京: 南京大学出版社, 2011: 263—297.
Zhang Shanjie, Jin Jianming. Computation of special functions [M]. Nanjing: Nanjing University Press, 2011: 263—297. (in Chinese)
- [12] 张善杰, 沈耀春. 马丢函数的数值计算[J]. 电子学报, 1995, 23(9): 41—45.
Zhang Shanjie, Shen Yaochun. Numerical computation of mathieu functions [J]. Acta Electronica Sinica, 1995, 23(9): 41—45. (in Chinese)