

文章编号: 1000-4750(2014)04-0034-06

基于条件期望的改进线抽样方法及其应用

吕召燕, 吕震宙, 张磊刚, 任 博

(西北工业大学航空学院, 陕西, 西安 710072)

摘 要: 为减小线抽样可靠性及灵敏度分析计算结果的方差, 该文在可靠性与可靠性灵敏度线抽样计算公式中巧妙地运用全方差原理, 引入了条件期望, 对传统计算方法进行了改进, 同时为避免直接计算条件期望将导致计算量增加的问题, 该文将计算公式进一步转化成与基本变量维数无关的形式, 并采用核密度估计的方法进行求解。该文最后运用 MATLAB 软件将该文方法应用于工程实例分析, 结果均表明: 通过对传统线抽样方法的改进, 有效地提高了线抽样方法求解失效概率和灵敏度的收敛性和稳定性。

关键字: 线抽样; 方差; 条件期望; 维数; 核密度估计

中图分类号: TB114.3 **文献标志码:** A **doi:** 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.11-0863

AN IMPROVED LINE SAMPLING METHOD AND ITS APPLICATION BASED ON CONDITIONAL EXPECTATION

LÜ Zhao-yan, LÜ Zhen-zhou, ZHANG Lei-gang, REN Bo

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

Abstract: In order to reduce the variance in calculating the reliability and sensitivity with the line sampling method, a total variance formula is subtly employed and a conditional expectation is introduced to improve the traditional method. At the same time, the reliability and sensitivity formulae are respectively transformed into a form that is independent of the dimension of the input variables and then solved by the kernel density estimation method, so that solving the conditional expectation with demanding computation is avoided. The proposed method is applied to some engineering examples with MATLAB software, and the results all show that the improvement in the traditional line sampling method has made an obvious contribution to the convergency and stability of the failure probability and sensitivity.

Key words: line sampling; variance; conditional expectation; dimension; kernel density estimation

可靠性分析和可靠性局部灵敏度分析的方法主要分为解析法、数字模拟法和函数替代法三大类^[1]。解析法求解计算量小, 一次二阶矩法^[2]、改进一次二阶矩法^[3]是其中的代表, 但是其计算精度在很大程度上依赖于功能函数的非线性程度, 当非线性程度较大时, 就有可能产生迭代不收敛或者近似精度较差的情况; 数字模拟法中的代表包括蒙特卡洛法^[4]和重要抽样法^[5], 对复杂的隐式功能函数

问题比较容易编程, 但是针对高维小失效概率问题, 需要抽取大量样本才能实现, 不适合工程应用; 函数替代法中的响应面^[6]应用较为广泛, 该方法简单实用, 易于与有限元商用软件连接以解决隐式函数的可靠性问题, 但对于高度非线性问题, 计算精度较低, 有时可能得到错误的结果。

线抽样方法是数字模拟法中的一种, 能够有效地解决高维小概率可靠性问题。由于线抽样方法是

收稿日期: 2012-11-13; 修改日期: 2013-04-27

基金项目: 航空基金项目(2011ZA53015)

通讯作者: 吕震宙(1966—), 女, 湖北黄石人, 教授, 博士, 博导, 主要从事飞行器设计及可靠性工程研究(E-mail: zhenzhoulu@nwpu.edu.cn).

作者简介: 吕召燕(1987—), 女, 河北邢台人, 硕士生, 主要从事飞行器设计及可靠性工程研究(E-mail: zhaoyanlv@mail.nwpu.edu.cn);

张磊刚(1988—), 男, 陕西宝鸡人, 硕士生, 主要从事飞行器设计及可靠性工程研究(E-mail: 2008bjzlg@163.com);

任 博(1985—), 男, 陕西渭南人, 博士生, 主要从事飞行器设计及可靠性工程研究(E-mail: rabber2003@163.com).

沿着重要方向进行抽样的,因而抽样效率得到了极大的提高。当然,线抽样方法还存在一些问题,研究人员针对不同的问题提出了不同的解决办法^[7-11]。例如,文献[8]提出了一种将鞍点概率分布估计与传统线抽样相结合的方法,较好地解决了非正态变量情况下的可靠性分析问题,避免了非正态变量向正态变量转换时功能函数非线性程度增加而导致的求解困难问题。针对同时存在随机基本变量和模糊基本变量的可靠性分析问题,文献[9]提出了一种模糊可靠度隶属函数求解的迭代线抽样方法,等等。但是针对减小线抽样分析结果方差的问题,目前基本没有文献提出相应的解决办法。本文针对这一问题,提出将条件期望应用于线抽样方法的可靠度和灵敏度计算公式的推导中,并且将公式进一步转化为与基本变量维数无关的形式,求解时采用核密度估计的方法,这样,在不增加抽样的前提下,提高了计算结果的收敛性和稳定性。

1 基于条件期望的线抽样方法

1.1 线抽样法求解失效概率的基本思想

线抽样法求解失效概率的基本思想是在标准正态空间中沿重要方向(坐标原点指向设计点的方向)进行抽样,由这些重要方向抽样得到样本点对应的失效概率的平均值来估算非线性极限状态函数的失效概率。

根据文献[12-13],需要对基本变量和功能函数标准正态化,得到标准正态空间的基本变量 $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ 和功能函数 $g(\mathbf{u})$, 抽样过程如图 1 所示。在标准正态空间内,通过改进一次二阶矩方法,或者马尔科夫链方法求得设计点 \mathbf{u}^* 和单位重要方向 $\mathbf{e}_\alpha = \mathbf{u}^* / \|\mathbf{u}^*\|$ 。由基本变量的联合概率密度函数 $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})$ 产生 N 个标准正态的样本点 $\mathbf{u}_j (j=1, 2, \dots, N)$, 则与 \mathbf{u}_j 对应的垂直于单位重要方向 \mathbf{e}_α 的向量 \mathbf{u}_j^\perp 为 $\mathbf{u}_j^\perp = \mathbf{u}_j - \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{u}_j \rangle \mathbf{e}_\alpha$, 其中, $\langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{u}_j \rangle$ 表示向量 \mathbf{e}_α 与 \mathbf{u}_j 的内积。

给定的3个系数 c_1 、 c_2 和 c_3 , 根据已经求得的 \mathbf{u}_j^\perp , 得到过 \mathbf{u}_j 且与 \mathbf{e}_α 平行的直线 l_j 上的3个向量 $\mathbf{u}_{ji} = c_i \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{u}_j^\perp (i=1,2,3)$ 。对所得的这3个点 $(c_1, g(\mathbf{u}_{j1}))$ 、 $(c_2, g(\mathbf{u}_{j2}))$ 和 $(c_3, g(\mathbf{u}_{j3}))$ 进行三点二次插值可近似得出点 $(\tilde{c}_j, g(\tilde{\mathbf{u}}_j))$, 其中, $\tilde{\mathbf{u}}_j = \tilde{c}_j \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{u}_j^\perp, g(\tilde{\mathbf{u}}_j) = 0$ 。

$\tilde{\mathbf{u}}_j$ 即为直线 l_j 与极限状态方程 $g(\mathbf{u}) = 0$ 的交点, 系数 \tilde{c}_j 为 $\tilde{\mathbf{u}}_j$ 所对应的可靠度指标, 样本点 \mathbf{u}_j 所

对应的失效概率 P_j 如下式所示:

$$P_j = \Phi(-\tilde{c}_j) \quad (1)$$

则极限状态函数 $g(\mathbf{u})$ 的失效概率 P_f 可表示为空间中所有点对应的失效概率 P_j 的均值, 即:

$$P_f = E[P] = E[\Phi(-\tilde{c})] \quad (2)$$

其中: \tilde{c} 是 \tilde{c}_j 的母体; P 是 P_j 的母体。

由线抽样法求解失效概率 P_j 的过程可知, 抽样样本点 $\mathbf{u}_j = [u_{j1}, u_{j2}, \dots, u_{jn}]$ 与相应的可靠度指标 \tilde{c}_j 有一一对应的关系, 所抽取的 N 组样本点对应关系如下式所示:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{N1} & u_{N2} & \cdots & u_{Nn} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_N \end{bmatrix} \quad (3)$$

因此, 失效概率 P_f 可通过下式估计:

$$\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(-\tilde{c}_j) \quad (4)$$

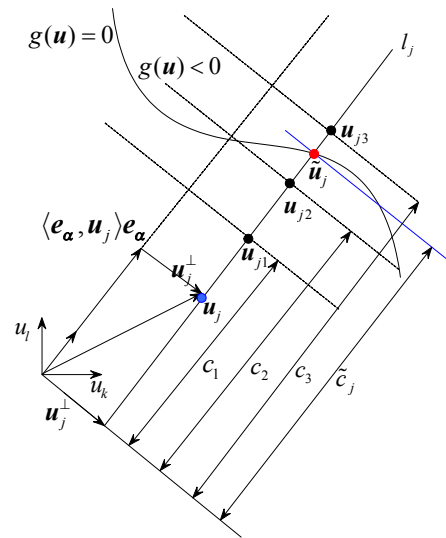


图 1 标准正态空间中线抽样的示意图

Fig.1 Line Sampling diagram in the standard normal space

1.2 基于条件期望的线抽样法

由全期望公式可知, 线抽样法求得的失效概率式(2)可表示为条件期望均值的形式如下:

$$P_f = E[\Phi(-\tilde{c})] = E_{\mathbf{u}_{-i}}[E_{\mathbf{u}_i}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)] \quad (5)$$

其中: $\mathbf{u}_{-i} = [u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n]$; u_i 表示随机变量 \mathbf{u} 中第 i 个变量; $E_{\mathbf{u}_{-i}}(\cdot|u_i)$ 表示随机变量中 u_i 为固定值; \mathbf{u}_{-i} 随机变化时所得到的均值。

式 (5) 将 P_f 由 $E[\Phi(-\tilde{c})]$ 改为 $E_{\mathbf{u}_{-i}}[E_{\mathbf{u}_i}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)]$ 的原因是 $E_{\mathbf{u}_{-i}}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)$ 的方

差 $V_{u_i}[E_{\mathbf{u}_i}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)]$ 不大于 $\Phi(-\tilde{c})$ 的方差 $V[\Phi(-\tilde{c})]$, 这是由下式所示的全方差公式保证的。
 $V(\Phi(-\tilde{c}))=V_{u_i}[E_{\mathbf{u}_i}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)]+$

$$E_{u_i}[V_{\mathbf{u}_i}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)] \geq V_{u_i}[E_{\mathbf{u}_i}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)] \quad (6)$$

由于 $E_{\mathbf{u}_i}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)$ 的方差不大于 $\Phi(-\tilde{c})$ 的方差, 基于 $E(\Phi(-\tilde{c}))=E_{u_i}[E_{\mathbf{u}_i}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)]$, 因此用 $E_{u_i}[E_{\mathbf{u}_i}(\Phi(-\tilde{c})|u_i)]$ 来求解 P_f 比用 $E[\Phi(-\tilde{c})]$ 来求解的收敛性和稳定性更好, 文献[14]也提出类似的减小模拟法方差的方法。

由式(5)条件期望的均值求解失效概率涉及双重概率矩, 因此若直接由数字模拟来求解, 将需要双重循环, 导致较大的计算量, 若将式(5)作如下转换则可由传统线抽样法的样本, 求得方差更小的失效概率估计值:

$$P_f = \int \left(\int \Phi(-\tilde{c}) f_{\tilde{c}|u_i}(\tilde{c}) d\tilde{c} \right) f_{u_i}(u_i) du_i = \iint \Phi(-\tilde{c}) f_{\tilde{c}, u_i}(\tilde{c}, u_i) d\tilde{c} du_i \quad (7)$$

其中: $f_{u_i}(u_i)$ 、 $f_{\tilde{c}|u_i}(\tilde{c})$ 和 $f_{\tilde{c}, u_i}(\tilde{c}, u_i)$ 分别表示 u_i 的 PDF(Probability Distribution Function), u_i 的条件下 \tilde{c} 的 PDF 和 \tilde{c} 与 u_i 的联合 PDF。

若能估计出 $f_{\tilde{c}, u_i}(\tilde{c}, u_i)$, 则通过数值积分可直接求得失效概率的估计值 \hat{P}_f 。根据 1.1 节线抽样过程得到的式(3), 可以采用核密度函数估计方法^[15] 由 (\mathbf{u}_j, c_j) ($j=1, 2, \dots, N$) 的对应关系估计出 $f_{\tilde{c}, u_i}(\tilde{c}, u_i)$ 。

通过以上分析过程可得, 采用核密度估计, 基于条件期望的线抽样方法求解失效概率的流程图如图 2 所示。

1.3 基于条件期望线抽样法的可靠性灵敏度计算

可靠性灵敏度定义为: 失效概率对基本变量分布参数的偏导数^[1]。根据文献[16], 将式(2)两边分别对随机变量 u_k ($k=1, 2, \dots, n$) 的分布参数 θ_{u_k} (包括均值 μ_{u_k} 和标准差 σ_{u_k}) 求偏导数, 可得到可靠性灵敏度估计值 $\partial P_f / \partial \theta_{u_k}$ 如下式所示:

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_{u_k}} = E \left(\frac{\partial P}{\partial \theta_{u_k}} \right) = E \left(\frac{\partial P}{\partial \tilde{c}} \cdot \frac{\partial \tilde{c}}{\partial \theta_{u_k}} \right) \quad (8)$$

其中, $\partial P / \partial \tilde{c}$ 、 $\partial \tilde{c} / \partial \mu_{u_k}$ 和 $\partial \tilde{c} / \partial \sigma_{u_k}$ 的表达式分别如式(9)、式(10)和式(11)所示。

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \sigma_{u_k}} = - \frac{e_{\alpha k}^2 \sigma_{u_k} \sum_{l=1}^n e_{\alpha l} (\tilde{u}_l - \mu_{u_l})}{\left(\sum_{l=1}^n e_{\alpha l}^2 \sigma_{u_l}^2 \right)^{3/2}} \quad (9)$$

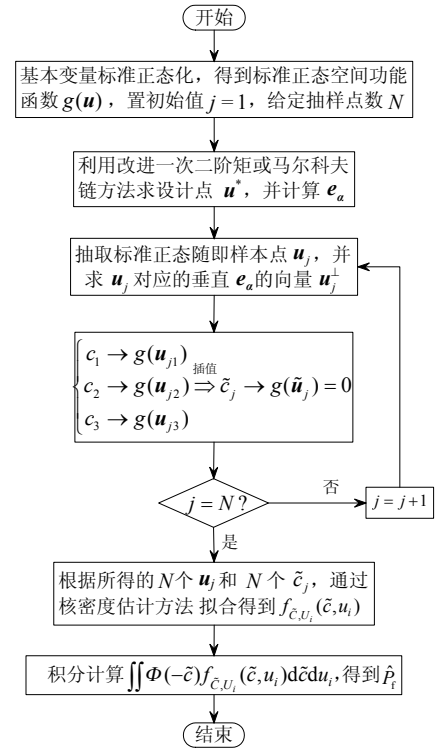


图 2 基于条件期望的改进线抽样可靠性分析流程图
 Fig.2 The reliability analysis flow diagram for the improved line sampling based on the conditional expectation

$$\frac{\partial P}{\partial \tilde{c}} = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\tilde{c}^2 / 2) \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial \mu_{u_k}} = - \frac{e_{\alpha k}}{\left(\sum_{l=1}^n e_{\alpha l}^2 \sigma_{u_l}^2 \right)^{1/2}} \quad (11)$$

其中, $e_{\alpha k}$ 表示 e_{α} 的第 k 个分量。

结合式(9)、式(10)和式(11), 可得传统线抽样方法可靠性灵敏度分析的计算公式如下:

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{u_k}} = \frac{e_{\alpha k}}{\sqrt{2\pi}} E \left(\exp \left(- \frac{\tilde{c}^2}{2} \right) \right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{u_k}} = \frac{e_{\alpha k}^2}{\sqrt{2\pi}} E \left[\tilde{c} \exp \left(- \frac{\tilde{c}^2}{2} \right) \right] \quad (13)$$

根据 1.2 节应用全方差理论的分析过程可得, 用条件期望的均值来代替原有的期望形式, 能有效地减小计算结果的方差, 因此可将可靠性灵敏度计算公式进一步转化如下。

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{u_k}} = \frac{e_{\alpha k}}{\sqrt{2\pi}} E_{u_i} \left[E_{\mathbf{u}_i} \left(\exp \left(- \frac{\tilde{c}^2}{2} \right) \middle| u_i \right) \right] \quad (14)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{u_k}} = \frac{e_{\alpha k}^2}{\sqrt{2\pi}} E_{u_i} \left[E_{\mathbf{u}_i} \left(\tilde{c} \exp \left(- \frac{\tilde{c}^2}{2} \right) \middle| u_i \right) \right] \quad (15)$$

类似于失效概率的条件期望抽样法, 若直接用

数字模拟法计算式(14)、式(15), 由于估计值涉及双重循环, 调用功能函数的次数会增大, 从而导致整体计算量很大。因此可将两式进一步转换为如下与维数无关的形式。

$$\frac{\partial P_f}{\partial \mu_{u_k}} = \frac{e_{\alpha k}}{\sqrt{2\pi}} \iint \exp\left(-\frac{\tilde{c}^2}{2}\right) f_{\tilde{c}, u_i}(\tilde{c}, u_i) d\tilde{c} du_i \quad (16)$$

$$\frac{\partial P_f}{\partial \sigma_{u_k}} = \frac{e_{\alpha k}^2}{\sqrt{2\pi}} \iint \tilde{c} \exp\left(-\frac{\tilde{c}^2}{2}\right) f_{\tilde{c}, u_i}(\tilde{c}, u_i) d\tilde{c} du_i \quad (17)$$

其中: $f_{U_i}(u_i)$ 、 $f_{\tilde{c}, U_i}(\tilde{c})$ 和 $f_{\tilde{c}, U_i}(\tilde{c}, u_i)$ 同 1.2 节含义相同, 可通过核密度估计法根据式(3)所示的 $(\mathbf{u}_j, \mathbf{c}_j)$ ($j=1, 2, \dots, N$) 对应关系同时得到。然后分别经过式(16)和式(17)相应的数值积分就可得到灵敏度的估计值 $\partial \hat{P}_f / \partial \mu_{u_k}$ 和 $\partial \hat{P}_f / \partial \sigma_{u_k}$ 。

以上内容实现了对线抽样可靠性和灵敏度分析方法的改进, 同传统方法相比, 改进的线抽样方法在转换的过程中并没有增加样本的抽取量, 并且实现了减小计算结果方差的目的, 提高了计算结果的收敛性和稳定性, 下面通过算例验证理论的正确性。

2 工程应用实例

算例 1. 如图 3 所示, 一矩形截面悬臂梁受到均布载荷, 以其自由端挠度不超过 $L/325$ 为约束建立极限状态函数为 $g(\omega, b, L) = L/325 - \omega b L^4 / (8EI)$ 。式中 ω 、 b 、 L 、 E 、 I 分别为单位载荷、截面尺寸、梁的长度、弹性模量、截面惯性矩。其中 E 为已知常量, $E=26\text{GPa}$, I 是 b 的函数为 $I = b^4 / 12$, 其他变量均服从正态分布, 分布参数如表 1 所示。

表 1 随机变量的分布参数

Table 1 The distributional parameters of random variables

随机变量	ω	L	b
均值	1000N/m ²	6m	250mm
变异系数	0.1	0.15	0.15

表 2 可靠性和灵敏度估计值及方差估计

Table 2 The results of reliability, sensitivity and variance

	估计值($\times 10^{-4}$)			方差($\times 10^{-13}$)	
	MCS	LS	本文	LS	本文
P_f	51.7	51.5	51.5	1021.7	502.1
$\partial P_f / \partial \mu_\omega$	0.1868	0.1844	0.1846	0.0105	0.0052
$\partial P_f / \partial \mu_L$	80.46	80.27	80.33	1989.3	976.6
$\partial P_f / \partial \mu_b$	-3.43	-3.42	-3.42	3.616	1.775
$\partial P_f / \partial \sigma_\omega$	0.047	0.059	0.059	0.0008	0.0004
$\partial P_f / \partial \sigma_L$	100.1	100.2	100.3	2267.3	1112.5
$\partial P_f / \partial \sigma_b$	7.62	7.59	7.60	13.01	6.38

注: 算例中 MCS 计算所抽取的样本量为 10^6 , LS(传统线抽样)和本文(改进线抽样)计算抽取样本均为 1000, 方差为重复 50 次计算得到, 以下算例同。

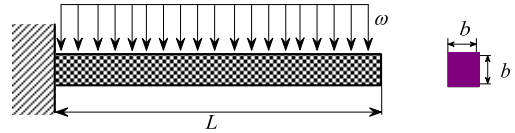


图 3 悬臂梁结构

Fig.3 Cantilever beam structure model

算例 2. 如图 4 所示一屋架, 屋架的上弦杆和其他压杆采用钢筋混凝土杆, 下弦杆和其他拉杆采用钢杆。设屋架承受均布载荷 q 作用, 将均布载荷 q 化成节点载荷 $p = ql/4$ 。结构力学分析可得 C 点沿垂直地面方向位移: $\Delta_C = \frac{ql^2}{2} \left(\frac{3.81}{A_C E_C} + \frac{1.13}{A_S E_S} \right)$, 其中

A_C 、 E_C 、 A_S 、 E_S 、 l 分别为混凝土和钢杆的横截面积、弹性模量、长度, 假设所有随机模量均服从独立的正态分布, 它们的分布参数参见表 3。考虑屋架的安全性和适用性, 以屋架顶端 C 点的向下挠度不大于 3cm 为约束条件。根据约束条件可建立结构的功能响应函数 $g = 0.03 - \Delta_C$ 。

表 3 随机变量的分布参数

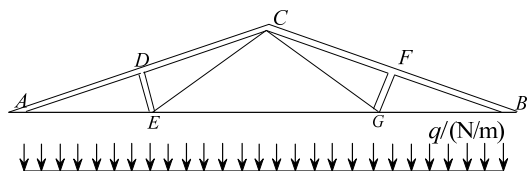
Table 3 The distributional parameters of random variables

变量	q	l	A_S	A_C	E_S	E_C
均值	20000	12m	$9.8 \times 10^{-4} \text{m}$	0.04m^2	10^{11}Pa	$2 \times 10^{10} \text{Pa}$
变异系数	0.07	0.01	0.06	0.12	0.06	0.06

表 4 可靠性和灵敏度估计值及方差估计

Table 4 The results of reliability, sensitivity and variance

	估计值			方差($\times 10^{-5}$)	
	MCS	LS	本文	LS	本文
P_f	0.0093	0.0094	0.0092	0.001	0.0004
$\partial P_f / \partial \mu_q$	1.110×10^{-5}	1.110×10^{-5}	1.098×10^{-5}	9×10^{-10}	5×10^{-10}
$\partial P_f / \partial \mu_l$	0.0405	0.0407	0.0403	11.75	6.57
$\partial P_f / \partial \mu_{A_S}$	-185.5	-188.4	-186.3	251600	140800
$\partial P_f / \partial \mu_{A_C}$	-2.116	-2.042	-2.019	29.56	16.54
$\partial P_f / \partial \mu_{E_S}$	-1.8×10^{-12}	-1.9×10^{-12}	-1.8×10^{-12}	0	0
$\partial P_f / \partial \mu_{E_C}$	-3.8×10^{-12}	-3.7×10^{-12}	-3.7×10^{-12}	0	0
$\partial P_f / \partial \sigma_q$	1.590×10^{-5}	1.612×10^{-5}	1.599×10^{-5}	9×10^{-10}	6×10^{-10}
$\partial P_f / \partial \sigma_{c_1}$	0.0181	0.0186	0.0184	0.0013	0.0009
$\partial P_f / \partial \sigma_{c_2}$	204.6	195.3	193.7	139100	94500
$\partial P_f / \partial \sigma_r$	2.515	1.869	1.854	12.74	8.66
$\partial P_f / \partial \sigma_{r_1}$	2.0×10^{-12}	1.9×10^{-12}	1.9×10^{-12}	0	0
$\partial P_f / \partial \sigma_{r_2}$	2.0×10^{-12}	1.6×10^{-12}	1.5×10^{-12}	0	0



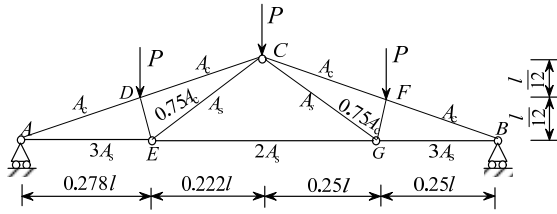


图 4 屋架结构

Fig.4 Roof truss structure model

算例 3. 如图 5 所示的单自由度无阻尼非线性振荡器^[17], 随机变量的分布参数见表 5, 极限状态方程

$$g(m, c_1, c_2, r, F_1, t_1) = 3r - \left| \frac{2F_1}{m\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0^2 t_1}{2}\right) \right|, \text{ 其中}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}.$$

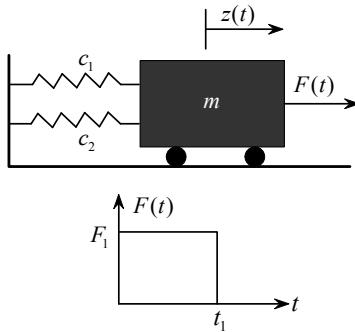


图 5 非线性振荡器

Fig.5 Non-linear oscillator

表 5 随机变量的分布参数

Table 5 The distributional parameters of random variables

随机变量	m	c_1	c_2	r	F_1	t_1
均值	1	1	0.1	0.5	1	1
变异系数	0.05	0.1	0.1	0.1	0.2	0.2

表 6 可靠性和灵敏度估计值及方差估计

Table 6 The results of reliability, sensitivity and variance

	估计值			方差($\times 10^{-8}$)	
	MCS	LS	本文	LS	本文
P_f	0.0387	0.0387	0.0387	5.297	3.488
$\partial P_f / \partial \mu_m$	-0.289	-0.293	-0.294	220.8	146.6
$\partial P_f / \partial \mu_{c_1}$	-0.049	-0.047	-0.047	5.685	3.775
$\partial P_f / \partial \mu_{c_2}$	-0.049	-0.047	-0.047	5.685	3.775
$\partial P_f / \partial \mu_r$	-0.736	-0.736	-0.737	1392	924.3
$\partial P_f / \partial \mu_{F_1}$	0.277	0.277	0.277	197	130.8
$\partial P_f / \partial \mu_{t_1}$	0.241	0.241	0.242	149.4	99.2
$\partial P_f / \partial \sigma_m$	0.0947	0.0905	0.0906	11.63	7.86
$\partial P_f / \partial \sigma_{c_1}$	-0.0005	0.0047	0.0047	0.031	0.021
$\partial P_f / \partial \sigma_{c_2}$	-0.0002	0.0005	0.0005	0.0003	0.0002
$\partial P_f / \partial \sigma_r$	0.595	0.571	0.572	462.4	312.4
$\partial P_f / \partial \sigma_{F_1}$	0.307	0.323	0.323	148.1	100.1
$\partial P_f / \partial \sigma_{t_1}$	0.220	0.245	0.245	85.26	57.6

通过上述 3 个算例可以看出, 线抽样计算效率很高, 在样本为 1000 时已收敛于精确解, 并且传统和改进线抽样法计算的准确度基本相同, 但是在方差计算上, 改进线抽样比传统线抽样小。为了进一步比较两种方法的收敛性与稳定性, 以本例中的失效概率计算为代表, 计算其方差随着样本量的变化情况, 结果如图 6 所示。

由图 6 可以看出, 随着样本量的变化, 本文方法的方差一直比传统方法小, 因此本文方法的收敛性和稳定性更好。由此也证明了本文提出的基于条件期望的改进线抽样方法理论的正确性。

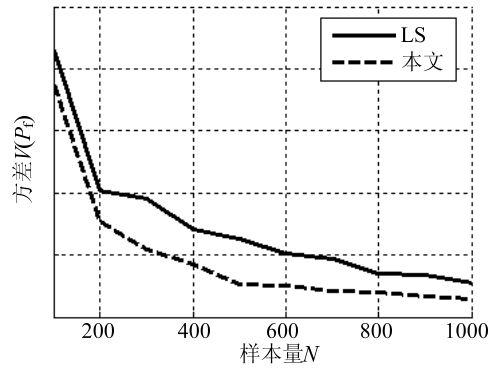


图 6 随着样本量的增加两种方法得到的方差比较

Fig.6 The comparison of the variance results by the two methods along with increasing sample amount

3 结论

本文应用全方差原理, 提出了基于条件期望的改进线抽样方法, 并采用核密度估计的方法进行求解。理论分析和算例计算均表明该方法相对传统方法在不增加抽样样本的前提下, 减小了线抽样失效概率和灵敏度的计算方差, 提高了计算结果的收敛性和稳定性。计算机技术和密度估计方法的局限会影响该方法优越性的充分体现, 但随着科学技术的发展, 本文方法的优势会更明显地体现出来。总之, 本文方法具有可行性, 相对传统方法具有优越性, 可广泛应用于工程可靠性与灵敏度分析中。

参考文献:

[1] 吕震宙, 宋述芳, 李洪双, 袁修开. 结构机构可靠性及可靠性灵敏度分析[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 1-7. Lü Zhenzhou, Song Shufang, Li Hongshuang, Yuan Xiukai. Reliability and reliability sensitivity analysis for structure and mechanics [M]. Beijing: Science Press, 2009: 1-7. (in Chinese)

[2] Melchers R E, Ahammed M. A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo

- structural reliability [J]. *Computers and Structures*, 2004, 82(1): 55–61.
- [3] Kiureghian A K. The geometry of random vibrations and solutions by FORM and SORM [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2000, 15(1): 81–90.
- [4] Wu Y T, Monhanty S. Variable screening and ranking using sampling-based sensitivity measure [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2006, 91(6): 634–647.
- [5] Melchers R E. Importance sampling in structural system [J]. *Structural Safety*, 1989, 6(1): 3–10.
- [6] Kaymaz I, McMahon C A. A response surface method based on weighted regression for structural reliability analysis [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, 20(1): 11–17.
- [7] 陈磊, 吕震宙, 宋述芳. 模糊可靠性灵敏度分析的线抽样方法[J]. *工程力学*, 2008, 25(7): 45–51.
Chen Lei, Lü Zhenzhou, Song Shufang. Line sampling algorithm for fuzzy reliability sensitivity analysis [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(7): 45–51. (in Chinese)
- [8] 宋述芳, 吕震宙. 非正态变量可靠性分析的鞍点线抽样方法[J]. *固体力学学报*, 2010, 31(2): 205–210.
Song Shufang, Lü Zhenzhou. Line sampling method based on saddlepoint approximation for reliability analysis with non-normal random variables [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2010, 31(2): 205–210. (in Chinese)
- [9] 李璐祎, 吕震宙. 模糊可靠度隶属函数求解的迭代线抽样法[J]. *工程力学*, 2011, 28(5): 13–20.
Li Luyi, Lü Zhenzhou. Membership function of fuzzy reliability analysis by iteration based line sampling [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(5): 13–20. (in Chinese)
- [10] Zio E, Peroni N. Functional failure analysis of thermal-hydraulic passive system by means of Line Sampling [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2009, 94(11): 1764–1781.
- [11] Zio E, Peroni N. An optimized Line Sampling method for the estimation of the failure probability of nuclear passive systems [J]. *Reliability Engineering and System Safety*, 2010, 95(12): 1300–1313.
- [12] Schuëller G I, Pradlwarter H J, Koutsourelakis P S. A critical appraisal of reliability estimation procedures for high dimensions [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2004, 19(4): 463–473.
- [13] Schuëller G I, Pradlwarter H J, Koutsourelakis P S. A comparative study of reliability estimation procedures for high dimension [C]. *Proceedings of the 16th ASCE Engineering Mechanics Conference*. University of Washington, Seattle, 2003: 1–10.
- [14] Rubinstein R Y, Kroese D P. *Simulation and the monte carlo method* [M]. USA: Wiley Series in Probability and Statistics, 2007: 125–126.
- [15] Scott D W. *Multivariate density estimation: Theory, practice, and visualization* [M]. New York: Wiley, 1992: 1–376.
- [16] 宋述芳, 吕震宙, 傅霖. 基于线抽样的可靠性灵敏度分析方法[J]. *力学学报*, 2007, 39(4): 564–570.
Song Shufang, Lü Zhenzhou, Fu Lin. Reliability sensitivity algorithm based on line sampling [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2007, 39(4): 564–570. (in Chinese)
- [17] Echard B, Gayton N, Lemaire M. AK-MCS: An active learning reliability method combining kriging and monte carlo simulation [J]. *Structural Safety*, 2011, 33(2): 145–154.