

文章编号: 1000-4750(2014)04-0001-10

# 结构随机地震反应与可靠度的 概率密度演化分析研究进展

陈建兵, 李 杰

(同济大学土木工程学院, 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092)

**摘 要:** 结构随机动力反应与可靠度分析对保障工程结构在灾害性动力作用下的安全性至关重要。数十年来, 国内外学者进行了大量的研究, 取得了丰硕的成果, 但在多自由度非线性系统随机动力反应与可靠度分析方面遇到了巨大的困难。概率密度演化理论提供了全新的处理方法。该文在评述已有研究方法的基础上, 着重讨论了概率密度演化理论及其在结构随机地震反应与整体可靠性分析应用方面的新进展。

**关键词:** 非线性; 多自由度体系; 随机激励; 概率密度演化; 整体可靠度

中图分类号: TV312 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.05.ST02

## PROBABILITY DENSITY EVOLUTION METHOD FOR STOCHASTIC SEISMIC RESPONSE AND RELIABILITY OF STRUCTURES

CHEN Jian-bing, LI Jie

(School of Civil Engineering &amp; State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Stochastic dynamic response and reliability analysis is of paramount importance to guarantee the safety of engineering structures subjected to disastrous dynamic actions. In the past decades, great efforts have been devoted to this field, yielding important progress. However, the stochastic dynamic response analysis and reliability evaluation of MDOF nonlinear systems are still challenging. The probability density evolution method provides a new perspective to this end. In the present paper, the new advances of the probability density evolution method and its applications to seismic response and global reliability of structures, as well as the existing approaches, are outlined and reviewed.

**Key words:** nonlinear; MDOF system; stochastic excitation; probability density evolution method; global reliability

土木工程结构的设计基准期一般为50年或100年, 其实际服役时间往往更长。在结构的服役期内, 很难避免地震、强风等灾害性动力作用。在这些发生时间、地点和强度都具有强烈随机性的灾害性动力作用下, 结构将不可避免地进入非线性状态<sup>[1]</sup>。同时, 结构本身的力学特性也往往具有很大的随机性<sup>[2]</sup>。因而, 为了确保工程结构的安全性, 需要考虑参数具有随机性的复杂工程结构在随机激励作用下的非线性反应与可靠度分析问题。

在经典理论中, 对上述问题通常采用分离式处理方法, 即分别考虑确定性参数结构在随机激励下的响应分析、随机参数结构在确定性激励作用下的响应分析和二者均具有随机性的结构分析问题。传统上, 这三种情况分别称为随机振动、随机结构分析与复合随机振动分析问题<sup>[3]</sup>。针对前两类问题, 人们发展了截然不同的基本理论与方法。在随机振动研究中, 针对线性结构分析问题人们发展了完整的二阶统计量(矩或功率谱密度函数)分析方法<sup>[4-6]</sup>。

收稿日期: 2013-05-28; 修改日期: 2013-11-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(11172210); 上海市曙光计划项目(11SG21); 国家“十二·五”科技支撑计划项目(2011BAJ09B03-02)

通讯作者: 陈建兵(1975—), 男, 湖北公安人, 教授, 博士, 博导, 从事结构工程研究(E-mail: chenjb@tongji.edu.cn).

作者简介: 李 杰(1957—), 男, 河南开封人, 特聘教授, 博士, 博导, 教育部首批长江学者, 从事结构工程研究(E-mail: lijie@tongji.edu.cn).

但是,在试图推广到非线性问题时遇到了所谓的不封闭性问题<sup>[7]</sup>。对白噪声及过滤白噪声激励系统,人们导出了 FPK 方程,并对非线性系统 FPK 方程的求解付出了不懈的努力<sup>[8-10]</sup>。遗憾的是,对于工程中遇到的高维问题 FPK 方程的瞬态解答,迄今仍然面临巨大的挑战。在随机结构分析中,则分别发展了随机模拟方法<sup>[11]</sup>、随机摄动技术<sup>[12]</sup>和正交多项式展开理论等多种途径<sup>[13,2]</sup>。最近,人们进一步将正交多项式展开理论推广,发展了广义混沌多项式方法,进而结合随机配点法,可以处理更为广泛的分布类型及更大自由度的随机结构分析问题<sup>[14]</sup>。然而,对非线性随机结构分析问题,同样遇到了难以逾越的困难。

分析上述主要研究思路不难发现:在随机振动研究中,人们主要利用集合信息与集合运算工具将随机问题转化为确定性分析问题,而在随机结构分析中,人们主要利用对随机变量本身的处理(例如直接抽样、Taylor 展开或正交展开)将随机结构分析问题转化为确定性分析问题。这一差别显然是由于对不同来源的随机性其表征形式不同,因而导致了方法上、甚至主要研究目标上的差别。例如,在随机振动理论中,FPK 方程占有重要地位,而在随机结构分析中,人们没有提出类似于 FPK 方程那样、以概率密度函数求解为目标的方程<sup>[2,13]</sup>。而在这两类问题中,要打破非线性与随机性的耦合,都遇到了巨大的困难。只有利用物理随机系统研究的基本思路,才有希望对上述问题进行统一的处理,从而解决非线性与随机性耦合造成的困境<sup>[15-16]</sup>。

有意思的是,尽管人们早已意识到考虑地震动随机性的重要性,但在当前的研究与工程实践中,人们对结构随机地震反应与可靠度分析却没有给予应有的重视。这是值得深思的。事实上,结构地震反应分析是随机振动理论中最早获得发展和应用的工程领域之一。早在 1947 年,著名地震工程学家 Housner 就提出了地震动随机过程的白噪声描述模型,因而事实上提出了随机激励下工程结构的响应分析问题<sup>[17]</sup>。大约十年之后,Crandall 于美国麻省理工学院组织了随机振动暑期研讨班,被认为是随机振动作为一个学科诞生的标志<sup>[18]</sup>。在此同期,日本学者提出了后来获得广泛应用的地震动随机过程的 Kanai-Tajimi 谱模型<sup>[19]</sup>。前苏联、美国、中国和日本等国的学者随即开展了平稳与非平稳随机地震反应分析方面的研究。例如,1962 年,我

国学者胡聿贤、周锡元不仅研究了平稳随机地震动作用下的结构随机反应分析问题,而且研究了非平稳地震动过程平稳化的可行性与合理性,并针对 Kanai-Tajimi 谱在零频率处的不合理性提出了修正<sup>[20]</sup>。1964 年,王光远详细考察了非平稳地震动模型及结构非平稳反应分析问题<sup>[21]</sup>。1968 年,Amin 和 Ang<sup>[22]</sup>及 Jennings 等<sup>[23]</sup>分别报道了关于非平稳地震动问题的研究结果。由此可见,结构随机地震反应分析方面的进展,不仅有力地推动了经典随机振动理论的早期发展,而且也是地震工程学界关注的重点问题。

事实上,结构随机动力反应分析的进步,取决于人们对地震动随机性及其本质认识的深入、结构动力非线性反应分析理论与技术的进步及非线性随机动力学理论的进展。本文主要讨论结构随机动力反应与可靠性分析、特别是概率密度演化理论及其进展。

## 1 结构随机动力反应分析问题

简单地说,结构非线性随机动力反应分析,就是求解如下多自由度非线性体系的概率信息解答:

$$\mathbf{M}(\Theta_{pm})\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \Theta_{pF}) = \boldsymbol{\xi}(t) \quad (1)$$

其中: $\mathbf{M}$ 为 $n \times n$ 阶质量矩阵; $\Theta_{pm}$ 为质量矩阵中的随机因素; $\boldsymbol{\xi}(t)$ 为确定性或随机激励向量。 $\mathbf{F}(\cdot)$ 包括了阻尼力和恢复力向量,当 $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \Theta_{pF}) = \mathbf{C}(\Theta_{pc})\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}(\Theta_{pk})\mathbf{X}$ 时,上述结构为线性结构,否则为非线性结构,这里 $\Theta_{pF} = (\Theta_{pc}, \Theta_{pk})$ , $\Theta_{pc}$ 、 $\Theta_{pk}$ 分别为阻尼与刚度中含有的随机因素。当 $\boldsymbol{\xi}(t)$ 为随机过程时,可以表示为随机函数 $\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{f}(\Theta_e, t)$ ,其中 $\Theta_e$ 为激励中的基本随机向量,详见下节。进而,记 $\Theta = (\Theta_{pm}, \Theta_{pF}, \Theta_e)$ ,式(1)可以表示为:

$$\mathbf{M}(\Theta)\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{X}}, \mathbf{X}, \Theta) = \mathbf{f}(\Theta, t) \quad (2)$$

通常,对于所要研究的结构,可以采用不同的离散化方法(如有限单元法<sup>[24]</sup>)将其转化为式(1)的表达形式。进入强非线性的实际工程结构,上述方程中的非线性恢复力往往很难用形如 Duffing 振子的多项式形式表达<sup>[1]</sup>,甚至也难以用统一微分方程形式如 Bouc-Wen 模型表达<sup>[25]</sup>,而需要根据本构方程耦合求解实时确定<sup>[24,26-28]</sup>。这一特点,给寻求上述问题的解析解答带来了极大困难。特别值得指出的是,如此形成的非线性系统,由于含有内变量(如损伤变量),即使在白噪声激励下,一般由速度与位

移向量合并构成的状态向量过程也不是 Markov 过程, 因而不存在相应的 FPK 方程。

地震动和强风等动力作用具有强烈的随机性, 并将导致结构反应的显著变异性, 因而在工程应用中其随机性必须加以合理的考虑, 这已是研究者和工程师公认的事实<sup>[29]</sup>。例如, 根据当前的结构抗震设计规范, 选取数条地震动加速度作为输入, 即使在加速度峰值相同而其他特性满足规定要求的情况下, 也可能导致结构响应(效应)数倍乃至上百倍的差异, 从而给设计决策带来困难。另一方面, 人们对例如抗震设计中是否需要考虑结构参数的随机性则仍然存在争论。事实上, 最常用的工程材料中, 混凝土的强度具有 14.1%~23.3%的变异性, 即使被认为变异性较小的钢材, 热轧带肋钢筋中 HPB235 的变异系数亦可达 8.95%、HRB335 的变异系数达 7.43%<sup>[30]</sup>, 而不同类型的 FRP 拉伸强度亦达 5%~9%<sup>[31]</sup>。在静力情况下, 结构反应的变异性与基本参数的变异性通常在同一个量级, 但在动力情况下, 这将导致结构非线性反应产生大幅度涨落。例如, 研究表明<sup>[32]</sup>, 同时考虑参数与激励随机性时非线性结构反应的标准差与仅考虑激励随机性时的反应标准差差异可达两倍以上。显然, 这将对结构的动力可靠度产生显著影响。

## 2 随机激励的建模与表达

随机激励的模型在随机动力学中具有基础性的重要地位。在某种意义上, 甚至可以说, 随机激励的模型决定了所采用的随机反应分析方法<sup>[33]</sup>。例如, 当激励采用白噪声模型时, 将导出 FPK 方程<sup>[6-7]</sup>; 而采用一般的功率谱模型时, 对线性系统反应的二阶统计特性则可以建立功率谱传递关系<sup>[34]</sup>、亦可采用虚拟激励法求解<sup>[35]</sup>。然而, 对非线性系统, 不存在激励功率谱与输出功率谱之间的简单传递关系, 因而采用随机过程的时域描述是必要的。遗憾的是, 经典的时域模型描述、无论是具有全部概率信息的有限维联合分布、还是二阶统计特征, 都存在一系列困难<sup>[36]</sup>。特别是, 难以建立集合统计信息与具体物理过程之间的直接对应关系。这时, 随机过程的随机函数模型、即物理过程关于基本随机变量和时间的显式函数表达, 是结构非线性反应分析的基础。

### 2.1 基于物理机制的物理随机模型

工程中的动力激励(如地震和强风)往往都具有

明确的物理机制<sup>[37]</sup>。例如, 给定工程场地的地震动过程, 是不同震源机制、传播途径和场地效应的综合作用结果<sup>[38-39]</sup>。由于在上述三个环节中都不不可避免地具有随机性, 从而导致地震动加速度过程的随机性。因此, 地震动加速度过程可以表达为:

$$\ddot{x}_g(t) = f(S, P, L, t) \quad (3)$$

其中,  $S$ 、 $P$  和  $L$  分别表示与震源机制、传播途径和场地效应有关的综合随机变量或随机向量。一般来说, 要在时域上获得上述函数  $f$  的显式表达式并非易事。但上述三个因素可以认为是次第作用的, 在考虑传播途径和场地效应均为线性作用的情况下, 在频域上可以表示为简单的传递关系:

$$\ddot{x}_g^{(i)}(\omega) = f_1(S, \omega) \cdot f_2(P, \omega) \cdot f_3(L, \omega) \quad (4)$$

其中,  $f_1$ 、 $f_2$  和  $f_3$  分别表示震源机制、传播途径和场地效应的频域描述函数。这些频域函数的表达式形式相对简单。对式(4)进行 Fourier 逆变换即可获得时域表达式(3)。在此基础上, 根据实测地震动记录, 可以识别基本随机参数(或参数向量)  $S$ 、 $P$  和  $L$  的一系列样本值, 进而依据这些样本通过统计方法给出它们的概率密度函数或其他统计量估计。

由此, 即完整地给出了一个随机过程关于基本随机变量的显式表达式。根据这一思路, 近年来较为完整地建立了工程随机地震动<sup>[39]</sup>及随机地震动场<sup>[40]</sup>和脉动随机风场<sup>[41]</sup>的物理模型。

### 2.2 基于数学分解的随机过程表达

在长期的研究中, 人们获得了很多随机过程的统计描述模型, 例如地震动加速度过程的 Kanai-Tajimi 谱<sup>[19]</sup>、胡-周谱<sup>[20]</sup>、Clough-Penzien 谱<sup>[42]</sup>、脉动风速的 Davenport 谱和 Kaimal 谱<sup>[43]</sup>、海浪波高的 Jonswap 谱<sup>[44]</sup>等, 以及非平稳过程的相关函数或包络函数模型<sup>[21-22]</sup>。如何利用这些已有的集合统计模型获取随机过程的样本时程, 是一个普遍关心的问题。当前, 在工程中较为常用的有 Karhunen-Loève 分解<sup>[13,45]</sup>和谱表达方法<sup>[46]</sup>。前者利用相关函数的特征分解及能量积聚性质进行近似截断, 而后者利用具有随机相位的不同频率谐波叠加进行合成。遗憾的是, 采用这些方法, 为了较高精度地逼近目标功率谱密度或自相关函数, 通常需要保留数百项乃至上千项, 因而导致必须处理具有数百个乃至上千个随机变量的问题, 从而带来一系列困难。因此, 寻求具有较少随机变量数目的表达形式成为人们研究的一个重要问题<sup>[47]</sup>。随机过程的二重正交分解, 也是这一努力的结果<sup>[48]</sup>。

有意义的是,可以证明:一个随机过程的标准差谱,即在该随机过程作用下的单自由度体系稳态反应的标准差作为该单自由度体系的频率和阻尼比的函数,与该随机过程的功率谱密度函数是一一对应的<sup>[49]</sup>。亦即,不同的功率谱密度函数将具有不同的标准差谱,因而以标准差谱逼近为准则,可以在谱表达方法基础上发展一类频率优选方法,可将随机变量的数目降到20个~50个左右的水平。最近,我们进一步发展了随机过程的随机谐和函数表达<sup>[50]</sup>。以第二类随机谐和函数表达为例,一个随机过程可以表达为:

$$X(t) = \sum_{n=1}^N A_n \cos(\tilde{\omega}_n t + \phi_n) \quad (5)$$

其中:  $\phi_n$  是  $[0, 2\pi]$  之间的独立均匀分布随机变量;  $\tilde{\omega}_n$  是在频率剖分区间  $[\omega_{n-1}^{(p)}, \omega_n^{(p)}]$  上均匀分布的独立随机变量,幅值  $A_n = \sqrt{S(\tilde{\omega}_n)(\omega_n^{(p)} - \omega_{n-1}^{(p)})/\pi}$ , 其中  $S(\omega)$  是目标功率谱密度函数。由于  $\tilde{\omega}_n$  是随机变量,幅值  $A_n$  也是随机变量。可以证明,对于任意的  $N$ , 上述  $X(t)$  的功率谱密度函数都精确地等于目标功率谱。因而,它是一类仅需很少的随机变量即可精确表达随机过程的方法。

### 3 结构随机动力反应分析的概率密度演化理论

#### 3.1 广义概率密度演化方程

工程中的动力系统一般都是适定的动力学系统,即其解答存在、唯一且连续地依赖于初始条件。为此,可将式(2)的解答表示为:

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}(\Theta, t) \quad (6)$$

事实上,在工程实际求解中,往往不仅对位移、速度和加速度感兴趣,还需要其他物理量(如关键截面的内力、变形或关键点的应力和应变等)的信息。一般地,这些物理量  $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m)^T$  可以通过本构关系及变形协调关系等最终与  $\mathbf{X}$  及  $\dot{\mathbf{X}}$  建立关系<sup>[24]</sup>, 从而它们也可以表达为基本随机变量的函数:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}_Z(\Theta, t) \quad (7)$$

而其时间变化率(速度)则可以表示为:

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{h}_Z(\Theta, t) \quad (8)$$

显然,  $\mathbf{h}_Z(\Theta, t) = \partial \mathbf{H}_Z(\Theta, t) / \partial t$ 。式(7)、式(8)事实上是问题的物理解答。

式(8)本身可以认为是一个随机动力过程,其中的随机性完全来自  $\Theta$ 。在整个演化过程中,扩展随

机系统  $(\mathbf{Z}(t), \Theta)$  中既没有随机因素消失、也没有新的随机因素加入,因而  $(\mathbf{Z}(t), \Theta)$  是一个概率保守系统。根据概率守恒原理的随机事件描述,有<sup>[51]</sup>:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t \times \Omega_\theta} p_{Z\Theta}(z, \theta, t) dz d\theta = 0 \quad (9)$$

其中:  $p_{Z\Theta}(z, \theta, t)$  是  $(\mathbf{Z}(t), \Theta)$  的联合概率密度函数;  $\Omega_t \times \Omega_\theta$  表示在  $t$  时刻空间中与初始时刻空间中的任意区域  $\Omega_0 \times \Omega_\theta$  相对应的区域。经一系列推导,由式(9)可得<sup>[33]</sup>:

$$\int_{\Omega_\theta} \left( \frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \dot{Z}_j(\theta, t) \frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t)}{\partial z_j} \right) d\theta = 0 \quad (10)$$

其中,  $\dot{Z}_j(\theta, t) = h_{Z,j}(\theta, t)$ ,  $h_{Z,j}$  是  $\mathbf{h}_Z(\cdot, t)$  的第  $j$  个分量。

考虑到  $\Omega_\theta$  的任意性,式(10)可以进一步化为:

$$\frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^m \dot{Z}_j(\theta, t) \frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t)}{\partial z_j} = 0 \quad (11)$$

值得指出的是,这一方程的维数  $m$  是所需要的物理量的个数,而不是  $2n$  (原系统式(2)转化为状态方程之后的维数)。特别地,在一般情况下,逐个获得物理量的信息即已足够,此时,式(11)自然地退化为一维方程:

$$\frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t)}{\partial t} + \dot{Z}(\theta, t) \frac{\partial p_{Z\Theta}(z, \theta, t)}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

其中,  $Z$  表示所感兴趣的单个物理量。

式(11)、式(12)称为广义概率密度演化方程。它们是完全解耦的偏微分方程。应该强调的是,在方程解耦的过程中,未引入任何近似假定,而且同时适用于线性与非线性问题。

在给定的初始条件和边界条件下求解偏微分方程式(12)获得解答之后,即可进一步获得物理量  $Z$  的概率密度函数:

$$p_Z(z, t) = \int_{\Omega_\theta} p_{Z\Theta}(z, \theta, t) d\theta \quad (13)$$

#### 3.2 概率空间剖分、点演化与群演化

考虑空间  $\Omega_\theta$  的一个剖分  $\Omega_q, q=1, 2, \dots, n_{pt}$ , 满足  $\cup_{q=1}^{n_{pt}} \Omega_q = \Omega_\theta$  和  $\Pr\{\Theta \in \Omega_q \cap \Omega_r\} = 0, \forall q \neq r$ , 这里  $\Pr\{\cdot\}$  表示随机事件的概率。式(13)可变为:

$$p_Z(z, t) = \sum_{q=1}^{n_{pt}} \int_{\Omega_q} p_{Z\Theta}(z, \theta, t) d\theta = \sum_{q=1}^{n_{pt}} p_q(z, t) \quad (14)$$

其中:

$$p_q(z, t) = \int_{\Omega_q} p_{Z\Theta}(z, \theta, t) d\theta \quad (15)$$

令

$$P_q = \int_{-\infty}^{\infty} p_q(z, t) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_q} p_{Z\theta}(z, \theta, t) d\theta dz = \int_{\Omega_q} p_{\theta}(\theta) d\theta \quad (16)$$

可见  $P_q$  是  $p_q(z, t)$  的归一化常数。它正是剖分子域  $\Omega_q$  内的概率，可称之为赋得概率。

将式(10)中的任意区域  $\Omega_q$  取为上述剖分区域  $\Omega_q, q=1, 2, \dots, n_{pt}$ ，则当  $m=1$  时，式(10)变为：

$$\frac{\partial p_q(z, t)}{\partial t} + \int_{\Omega_q} \dot{Z}(\theta, t) \frac{\partial p_{Z\theta}(z, \theta, t)}{\partial z} d\theta = 0 \quad (17)$$

或

$$\frac{\partial p_q(z, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \int_{\Omega_q} \dot{Z}(\theta, t) p_{Z\theta}(z, \theta, t) d\theta = 0 \quad (18)$$

值得指出，这一偏微分-积分方程是精确成立的。

若在每个剖分子域  $\Omega_q$  中选取一个代表点  $\theta_q$ ，

则式(18)变为：

$$\frac{\partial p_q(z, t)}{\partial t} + \dot{Z}(\theta_q, t) \frac{\partial p_q(z, t)}{\partial z} = 0, q=1, 2, \dots, n_{pt} \quad (19)$$

求解上述  $n_{pt}$  个方程，即可获得  $p_q(z, t)$  的解答并进一步通过式(14)获得物理量的概率密度函数。这一思路，可称之为点演化途径。在点演化途径中，概率空间剖分与代表点的优选是重要的任务。

若存在某种方式，可以对剖分子域  $\Omega_q$  中的完整信息加以直接处理，从而求解式(17)中的耦合问题并获取  $p_q(z, t)$  的解答，则有望获得精度更高的解答。这一途径，可称之为群演化途径<sup>[33]</sup>。在此方面的研究亟待深入开展。

## 4 工程结构的动力可靠性与整体可靠性

工程结构的动力可靠性与整体可靠性，是研究者和工程师们普遍关心的重要问题<sup>[52-53]</sup>。迄至 20 世纪 70 年代后期，关于结构动力可靠性，已经分别发展了扩散过程理论与跨越过程理论两类方法。扩散过程理论通过求解倒向 Kolmogorov 方程或广义 Pontryagin 方程获得可靠性函数的解答。对白噪声激励系统，该方法原则上是精确的。遗憾的是，对多自由度系统求解上述高维偏微分方程存在极大的困难<sup>[4,7]</sup>。跨越过程理论则基于 Rice 公式计算期望穿越率、进而基于穿越事件性质假定采用随机点过程理论获得可靠度解答。这一方法采用分离式步骤，能够处理自由度更多的系统，但由于多个

环节引入了假定(如关于物理量及其速度的联合分布通常引入正态分布假定、关于穿越事件通常引入泊松过程或 Markov 过程假定)，精度难以得到保证<sup>[6,54-56]</sup>，而且，对多自由度非线性系统仍然存在巨大的困难。在概率密度演化理论的框架下，可以方便地处理上述问题。

### 4.1 结构动力可靠性

这里仅讨论首次超越破坏问题。一般地，基于首次超越破坏准则的结构动力可靠度定义为：

$$R(t) = \Pr\{Z(\tau) \in \Omega_s, \text{ 对所有 } 0 \leq \tau \leq t\} \quad (20)$$

其中， $\Omega_s$  表示安全区域。该式表明，一旦该物理量越出安全边界，则该结构失效，因而相应随机事件所携带的概率即不再返回安全域内，这等价于施加一个吸收边界条件<sup>[57]</sup>：

$$p_{Z\theta}(z, \theta, t) = 0, \text{ 当 } z \in \Omega_f \quad (21)$$

其中， $\Omega_f$  表示失效区域。在上述边界条件下求解式(12)，获得“剩余”联合概率密度函数  $\tilde{p}_{Z\theta}(z, \theta, t)$ ，则结构可靠度为：

$$R(t) = \int_{\Omega_s} \int_{\Omega_{\theta}} \tilde{p}_{Z\theta}(z, \theta, t) d\theta dz = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\Omega_{\theta}} \tilde{p}_{Z\theta}(z, \theta, t) d\theta dz \quad (22)$$

第二个等号成立是由于吸收边界条件式(21)。

应该指出，施加吸收边界条件式(21)不是唯一的途径。事实上，根据式(12)的意义及式(20)的定义，要使得失效时间所携带的概率不再返回安全域内，采用下述条件也是等价的：

$$\dot{Z}(\theta, t) = 0, \text{ 当 } z \in \Omega_f \quad (23)$$

式(20)也可以理解为，若  $Z(\tau)$  在  $0 \leq \tau \leq t$  区间

内的极值不超过安全边界，则结构是可靠的。因此，若令  $Z_{\text{ext}}(t) = \text{Extreme}\{Z(\tau)\}_{0 \leq \tau \leq t}$ ，则式(20)等价于：

$$R(t) = \Pr\{Z_{\text{ext}}(t) \in \Omega_s\} = \int_{\Omega_s} p_{Z_{\text{ext}}}(z, t) dz \quad (24)$$

这里  $p_{Z_{\text{ext}}}(z, t)$  为  $Z_{\text{ext}}(t)$  的概率密度函数。例如，若可靠性定义为  $R(t) = \Pr\{|Z(\tau)| \leq z_b, \text{ 对所有 } 0 \leq \tau \leq t\}$ ，则可定义  $Z_{\text{ext}}(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} \{|Z(\tau)|\}$ ，从而  $R(t) =$

$$\int_0^{z_b} p_{Z_{\text{ext}}}(z, t) dz。$$

通过构造相应的随机过程，可以求解相应的广义概率密度演化方程获得  $p_{Z_{\text{ext}}}(z, t)$ ，从而将动力可靠度问题转化为上述一维积分问题<sup>[58]</sup>。

### 4.2 极值演化概率密度方程与结构整体可靠度

复杂结构的破坏准则往往十分复杂。经典的结构体系可靠性从不同破坏模式的失效概率入手。长

期以来,人们难以解决失效模式的组合爆炸及失效相关性问题<sup>[59]</sup>。由于经典结构可靠度分析主要依赖于理想弹塑性极限分析,难以准确地把握结构的实际性态与可靠度。事实上,整体结构的可靠性应从结构的非线性发展全过程加以把握<sup>[60]</sup>。有鉴于此,我们认为,采用结构整体可靠性这一提法较之结构体系可靠性更为合理<sup>[3]</sup>。基于点估计与高阶矩方法的结构可靠度理论<sup>[61-63]</sup>,可以认为本质上是在这一方向的重要努力。而概率密度演化理论,亦为从结构非线性发展全过程中提取合适的信息,从而得到结构的整体可靠度提供了基本工具。

结构整体可靠度可表示为:

$$R(t) = \Pr\{\Xi_{j=1}^m [Z_j(\tau) \in \Omega_{s_j}], \text{ 对所有 } 0 \leq \tau \leq t\} \quad (25)$$

其中,  $\Xi(\cdot)$  表示不同物理量之间的复合关系。显然,直接在合适的吸收边界条件下求解  $m$  维广义概率密度演化方程式(11),对剩余概率密度函数积分,即可获得上述整体可靠度。但  $m > 3$  的多维偏微分方程的求解一般计算工作量太大。在此情况下,可构造一个等价极值过程:

$$Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(t) = \text{Extreme}^{(\Xi)} \{Z_j(\Theta, t)\}_{1 \leq j \leq m} \quad (26)$$

这一极值过程的构造与复合方式  $\Xi(\cdot)$  有关。例如,当式(25)中的复杂破坏准则变为:

$$R(t) = \Pr\{\bigcap_{j=1}^m [|Z_j(\tau)| \leq b_j], \text{ 对所有 } 0 \leq \tau \leq t\} \quad (27)$$

时,则等价极值过程式(26)成为:

$$Z_{\text{max}}(t) = \max_{1 \leq j \leq m} \{Z_j(\Theta, t)\} \quad (28)$$

注意到式(26)本身是一个与式(7)类似的动力系统,其中的全部随机因素均来自于  $\Theta$ ,因而  $(Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(t), \Theta)$  是一个概率保守系统,从而有如下广义概率密度演化方程:

$$\frac{\partial p_{Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(\Theta)}(z, \theta, t)}{\partial t} + \dot{Z}_{\text{ext}}^{(\Xi)}(\theta, t) \frac{\partial p_{Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(\Theta)}(z, \theta, t)}{\partial z} = 0 \quad (29)$$

这是时变极值的概率密度演化方程。

据此,即可求解获得  $Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(t)$  的概率密度函数

$$p_{Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}}(z, t) = \int_{\Omega_{\Theta}} p_{Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(\Theta)}(z, \theta, t) d\theta。$$

在此情况下,式(25)定义的整体可靠度转化为:

$$R(t) = \Pr\{Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(\tau) \in \Omega_s, \text{ 对所有 } 0 \leq \tau \leq t\} \quad (30)$$

由此,可对式(29)施加吸收边界条件  $p_{Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(\Theta)}(z, \theta, t) = 0$ , 当  $z \in \Omega_f$  求解获得剩余概率密度  $\check{p}_{Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(\Theta)}(z, \theta, t)$ , 进而得到上述整体可靠度

$$R(t) = \int_{\Omega_s} \check{p}_{Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}}(z, t) dz。$$

式(30)还可以进一步转化为极值分布的形式。

此时,令  $\check{Z}_{\text{ext}}(t) = \text{Extreme} \{Z_{\text{ext}}^{(\Xi)}(\tau)\}_{0 \leq \tau \leq t}$ , 即有:

$$R(t) = \Pr\{\check{Z}_{\text{ext}}(t) \in \Omega_s\} = \int_{\Omega_s} p_{\check{Z}_{\text{ext}}}(z, t) dz \quad (31)$$

$\check{Z}_{\text{ext}}(t)$  可称为  $0 \leq \tau \leq t$  区间内的等价极值<sup>[64]</sup>。

显然,在此方面还有一系列饶有意义的问题值得进一步深入研究和探讨。

## 5 数值求解算法

### 5.1 点集优选

当具有多个随机变量时,式(13)在形式上是一个多维积分。更加细致的研究表明,它与一般的多维积分具有本质上的差别<sup>[65]</sup>。因而,虽然一般的高维数值积分方法对上述问题的求解具有借鉴意义,但并非所有在一般高维积分中行之有效的数值方法均可用于上述问题的求解。一般地说,考察高维数值积分问题:

$$I(f) = \int_{[0,1]^s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (32)$$

其中  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ ,  $[0,1]^s$  是  $s$  维单位超立方体。

该高维积分的数值近似解答可表示为:

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^n a_k f(\mathbf{x}_k) \quad (33)$$

当要求上述问题具有最高阶代数精度时,上式即成为高斯积分问题,其中  $\mathbf{x}_k$  为高斯点,  $a_k$  为高斯权重。在多维情况,人们发展了一系列方法(如稀疏网格法<sup>[66]</sup>、完全对称点法<sup>[67]</sup>和拟对称点法<sup>[68]</sup>等),使得满足一定代数精度的  $s$  维积分所需的点数远小于  $n_1^s$ , 这里  $n_1$  为一维高斯积分点数目。但是,这些方法中,通常权重  $a_k$  不完全非负。近年来,在随机力学分析中,上述方法已经得到了应用<sup>[14]</sup>。

当  $\mathbf{x}_k$  为随机数、而  $a_k = 1/n$  时,式(33)成为 Monte Carlo 近似计算公式<sup>[69]</sup>。当  $\mathbf{x}_k$  为数论方法给出的一系列确定性点集而  $a_k = 1/n$  时,上式即为数论方法的数值积分公式<sup>[70]</sup>。此时,对有界变差函数,存在 Koksma-Hlawka 不等式<sup>[70]</sup>:

$$\left| I(f) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\mathbf{x}_k) \right| \leq D(\mathcal{P}_n) \cdot \text{TV}(f) \quad (34)$$

这里,  $\text{TV}(f)$  是函数  $f(\cdot)$  的总变差。通常,函数  $f(\cdot)$  越不规则,  $\text{TV}(f)$  越大。  $D(\mathcal{P}_n)$  是点集  $\mathcal{P}_n$  的偏差,点集偏差越小,则点集均匀性越好。该式给出了数值积分的误差估计。最近,该不等式已被推广到考虑赋得概率的非等权重及一般的多维非均匀、非正

态随机变量的情形中去<sup>[71-72]</sup>。据此,进一步提出了点集的广义 F-偏差并给出了一类基于概率空间剖分与广义 F-偏差的点集优选方法和点集重整技术。

## 5.2 广义概率密度演化方程的求解

广义概率密度演化方程的求解,可以采用下述步骤进行:

① 对基本随机变量概率空间进行剖分获得剖分子域  $\Omega_q, q=1,2,\dots,n_{pt}$ , 同时可以获得赋得概率(式(16)):

② 求解式(18), 其中  $\dot{Z}(\theta, t)$  的信息需结合物理方程式(2)的求解获取。在此, 由于通常直接求解式(18)较为困难, 可采用点演化途径求解式(18), 而其中  $\dot{Z}(\theta_q, t)$  可通过求解当  $\{\Theta = \theta_q\}$  时的动力方程式(2)获得。求解偏微分方程式(19)可采用具有 TVD 性质的有限差分格式<sup>[3,51]</sup>。当采用吸收边界条件方法求解结构动力可靠度问题时, 需要考虑边界条件式(21)或等价条件式(23)。当采用极值分布或等价极值分布求解动力可靠度或整体可靠度时, 需要求解时变极值概率密度演化式(29):

③ 根据式(14), 对上述结果进行合成。

## 6 典型工程实例应用

概率密度演化理论已经在一些重大工程得到应用, 并引起了不同学科研究者的兴趣<sup>[73-75]</sup>。这里以一个 10 层剪切型框架结构的随机地震反应分析为例说明上述最新进展的应用。结构各层质量均值从底层到顶层依次为 2.2、2.0、1.8、1.8、1.8、1.8、1.8、1.8、1.8 和 1.6(单位:  $10^5\text{kg}$ ), 刚度均值从底层到顶层依次为 3.5、3.2、3.0、2.8、2.8、2.8、2.8、2.8、2.8 和 2.6(单位:  $10^5\text{kN/m}$ )。各层质量服从对数正态分布, 各层间刚度服从 Weibull 分布, 共计 20 个基本随机变量, 所有随机变量变异系数均取为 0.2。恢复力滞回关系采用 Bouc-Wen 模型, 其中模型的参数取值为  $\alpha = 0.04$ ,  $A = 1$ ,  $n = 1$ ,  $q = 0.25$ ,  $p = 1000$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\phi = 0.05$ ,  $\zeta = 0.99$ ,  $d_\phi = 5$ ,  $d_v = 1000$ ,  $d_\eta = 1000$ ,  $\beta = 280$ ,  $\gamma = 160$ 。典型的恢复力滞回曲线见图 1, 从中可见结构已经进入严重的非线性状态。采用 Rayleigh 阻尼:  $C = aM + bK$ , 其中,  $a = 0.4602$ ,  $b = 0.0041$ 。激励采用 El Centro 波的南北分量。

考察的物理量为底层位移。图 2 给出通过概率密度演化理论获得的均值与标准差时程及其与 10000 次 Monte Carlo 模拟的对比(图中分别标注

PDEM 和 MCS), 可见所建议的方法具有很高的精度。图 3 给出底层层间位移反应的概率信息, 包括在三个不同时刻的概率密度函数(图 3(a))、三个不同时刻的概率分布函数及其与 Monte Carlo 模拟结果的对比(图 3(b))、给定时间段内的概率密度演化曲面(图 3(c))和相应的等概率密度函数线(图 3(d))。本文算例中的计算工作量相当于 350 次确定性分析的工作量, 与 Monte Carlo 模拟结果的比较表明, 所建议的方法具有较高的精度, 而效率则提高一到两个数量级。

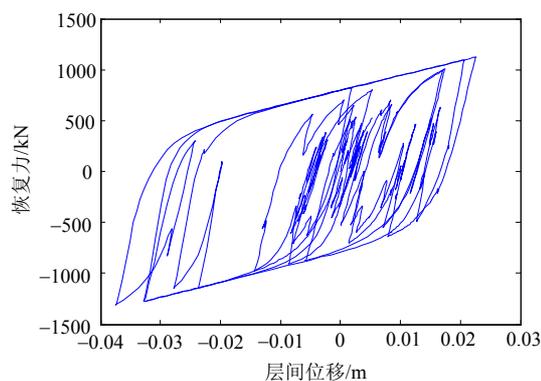


图 1 典型恢复力曲线

Fig.1 Typical restoring force curve

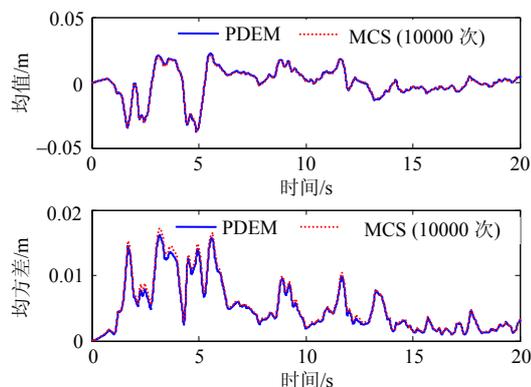
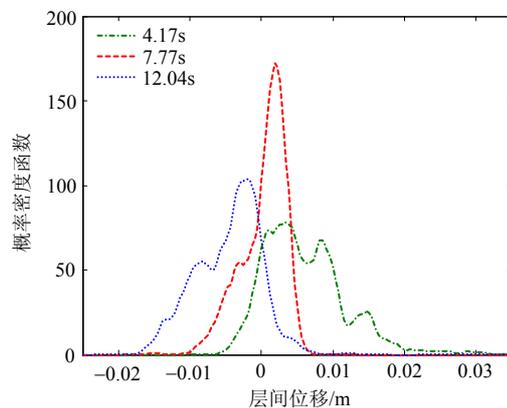
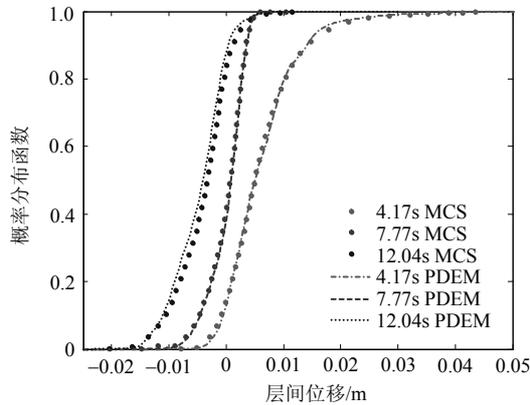


图 2 底层位移均值和标准差时程

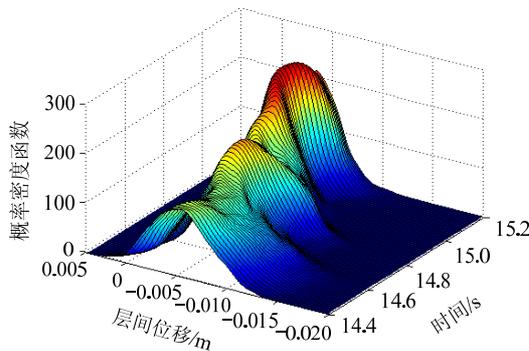
Fig.2 The mean and standard deviation of the first story



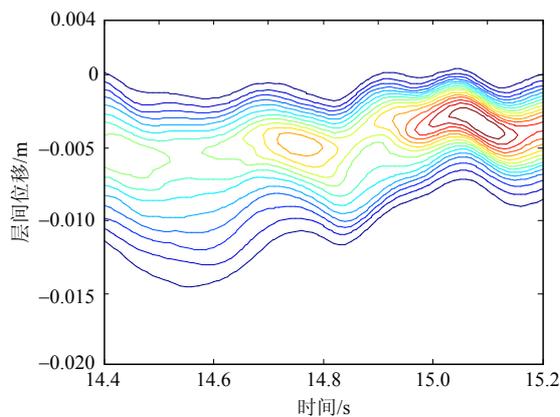
(a) 3 个典型时刻概率密度函数



(b) 3个典型时刻分布函数



(c) 给定时间区段内的概率密度演化曲面



(d) 等概率密度线

图3 应用重整点集计算得到的典型时刻概率密度信息

Fig.3 Typical PDF and CDF by proposed point set

## 7 结论与讨论

具有强烈随机性的地震作用下结构的随机反应与可靠度分析至关重要。经过数十年的发展,已有较为成熟的方法处理线性问题。但在经典理论框架下,多自由度非线性系统瞬态随机反应分析遇到了巨大的困难。基于物理随机系统的基本思想与概率守恒原理,在概率密度演化理论中导出了完全解耦的广义概率密度演化方程,为上述问题提供了全新的视角。本文讨论了概率密度演化理论的若干新

进展。尚需要进一步研究的问题包括:

(1) 工程动力激励物理随机过程模型的深入研究和完善;

(2) 基于群演化的概率密度演化方程稳健求解方法;

(3) 基于物理的结构整体可靠性深入研究。

### 参考文献:

- [1] Roberts J B, Spanos P D. Random vibration and statistical linearization [M]. John Wiley & Sons, 1990.
- [2] 李杰. 随机结构系统——分析与建模[M]. 北京: 科学出版社, 1996.  
Li Jie. Stochastic structural system: Analysis and modeling [M]. Beijing: Science Press, 1996. (in Chinese)
- [3] Li J, Chen J B. Stochastic dynamics of structures [M]. John Wiley & Sons, 2009.
- [4] Lutes L D, Sarkani S. Random vibrations: Analysis of structural and mechanical systems [M]. Amsterdam, Elsevier, 2004.
- [5] 欧进萍, 王光远. 结构随机振动[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.  
Ou Jinping, Wang Guangyuan. Random vibrations of structures [M]. Beijing: Higher Education Press, 1998. (in Chinese)
- [6] Sun J Q. Stochastic dynamics and control [M]. Elsevier, 2006.
- [7] 朱位秋. 随机振动[M]. 北京: 科学出版社, 1992.  
Zhu Weiqiu. Random vibration [M]. Beijing: Science Press, 1992. (in Chinese)
- [8] Zhu W Q. Nonlinear stochastic dynamics and control in Hamiltonian formulation [J]. Applied Mechanics Reviews, 2006, 59(4): 230—248.
- [9] 黄志龙, 金肖玲. 多自由度强非线性随机系统非能量依赖的精确平稳解[J]. 中国科学 E 辑: 技术科学, 2009, 39(5): 927—933.  
Huang Zhilong, Jin Xiaoling. Non-energy-dependent exact stationary solution of MDOF strongly nonlinear systems [J]. Scientia Sinica Technologica, 2009, 39(5): 927—933. (in Chinese)
- [10] 徐伟. 非线性随机动力学的若干数值方法及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2013.  
Xu Wei. Numerical analysis methods for stochastic dynamical system [M]. Beijing: Science Press, 2013. (in Chinese)
- [11] Shinozuka M. Monte Carlo solution of structural dynamics [J]. Computers and Structures, 1972, 5/6(2): 855—874.
- [12] Kleiber M, Hien T D. The stochastic finite element method: Basic perturbation technique and computer implementation [M]. John Wiley & Sons, 1992.
- [13] Ghanem R, Spanos P D. Stochastic finite elements: A spectral approach [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1991
- [14] Xiu D B. Fast numerical methods for stochastic computations [J]. Communications in Computational Physics, 2009, 5(2/3/4): 242—272.
- [15] 李杰. 随机动力系统的物理逼近[J]. 中国科技论文在线, 2006, 1(2): 95—104.

- Li Jie. A physical approach to stochastic dynamical systems [J]. Sciencepaper Online, 2006, 1(2): 95—104. (in Chinese)
- [16] 李杰, 陈建兵. 随机动力系统中的概率密度演化方程及其研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(2): 170—188.  
Li Jie, Chen Jianbing. Advances in the research on probability density evolution equations of stochastic dynamical systems [J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(2): 170—188. (in Chinese)
- [17] Housner G W. Characteristics of strong-motion earthquakes [J]. Bull Seismol Society Am, 1947, 37(1): 19—31.
- [18] Crandall S H. Random vibration [M]. Cambridge: MIT Press, 1958.
- [19] Kanai K. Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground [J]. Bull. Earthquake Research Institute, University of Tokyo, 1957, 35: 309—325.
- [20] 胡聿贤, 周锡元. 弹性体系在平稳和平稳化地震运动下的反应[C]// 刘恢先. 地震工程研究报告集第一集. 北京: 科学出版社, 1962: 33—50.  
Hu Yuxian, Zhou Xiyuan. Response of elastic structures under stationary and stationarized ground motions [C]// Liu Huixian. Collected Research Reports on Earthquake Engineering. Beijing: Science Press, 1962: 33—50. (in Chinese)
- [21] 王光远. 在非平稳地震作用下结构反应的分析方法[J]. 土木工程学报, 1964, 10(1): 14—22.  
Wang Guangyuan. Response of structures under non-stationary ground motions [J]. Chinese Journal of Civil Engineering, 1964, 10(1): 14—22. (in Chinese)
- [22] Amin M, Ang A H-S. Nonstationary stochastic model of earthquake motions [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 1968, 94(EM2): 559—583.
- [23] Jennings P C, Housner G W, Tsai N C. Simulated earthquake motions [R]. Report of Earthquake Engineering Research Laboratory, California Institute of Technology, 1968.
- [24] Belytschko T, Liu W K, Moran B. Nonlinear finite elements for continua and structures [M]. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- [25] Wen Y K. Method for random vibration of hysteretic systems [J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1976, 102(2): 249—263.
- [26] Wu J Y, Li J, Faria R. An energy release rate-based plastic-damage model for concrete [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006, 43: 583—612.
- [27] 李杰, 任晓丹. 混凝土静力与动力损伤本构模型研究进展述评[J]. 力学进展, 2010, 40(3): 284—297.  
Li Jie, Ren Xiaodan. A review on the constitutive model for static and dynamic damage of concrete [J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(3): 284—297. (in Chinese)
- [28] 李杰, 吴建营, 陈建兵. 混凝土随机损伤力学[M]. 北京: 科学出版社, 2014.  
Li Jie, Wu Jianying, Chen Jianbing. Stochastic damage mechanics of concrete structures [M]. Beijing: Science Press, 2014. (in Chinese)
- [29] Wen Y K. Probabilistic aspects of earthquake engineering [M]// Bozorgnia Y, Bertero V V. Earthquake Engineering: from Engineering Seismology to Performance-based Engineering, Part 7. CRC Press, Boca Raton, 2004: 7-1—7-40.
- [30] GB50010-2010, 混凝土结构设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2011.  
GB50010-2010, Design code for concrete structures [S]. Beijing: China Architecture & Building Press, 2011. (in Chinese)
- [31] 何政, 李小明. FRP 配筋混凝土结构可靠度设计[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2008, 40(8): 1177—1183.  
He Zheng, Li Xiaoming. Reliability-based design for FRP-reinforced concrete members [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2008, 40(8): 1177—1183. (in Chinese)
- [32] Chen J B, Li J. Stochastic seismic response analysis of structures exhibiting high nonlinearity [J]. Computers & Structures, 2010, 88(7/8): 395—412.
- [33] Li J, Chen J B, Sun W L, Peng Y B. Advances of probability density evolution method for nonlinear stochastic systems [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2012, 28: 132—142.
- [34] 方同. 工程随机振动[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995.  
Fang Tong. Engineering random vibrations [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 1995. (in Chinese)
- [35] 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法[M]. 北京: 科学出版社, 2004.  
Lin Jiahao, Zhang Yahui. The pseudo-excitation method in random vibrations [M]. Beijing: Science Press, 2004. (in Chinese)
- [36] Li J, Yan Q, Chen J B. Stochastic modeling of engineering dynamic excitations for stochastic dynamics of structures [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2012, 27(1): 19—28.
- [37] 李杰. 工程结构随机动力激励的物理模型[C]// 李杰, 陈建兵. 随机振动理论与应用新进展. 上海: 同济大学出版社, 2009: 119—132.  
Li Jie. Physical models for stochastic dynamic excitations of engineering structures [C]// Li Jie, Chen Jianbing. New Advances in Theory and Applications of Random Vibrations. Shanghai: Tongji University Press, 2009: 119—132. (in Chinese)
- [38] Boore D M, Atkinson G M. Stochastic prediction of ground motion and spectral response parameters at hard-rock sites in eastern North America [J]. Bulletin of Seismological Society of America, 1986, 77(2): 440—467.
- [39] Wang D, Li J. Physical random function model of ground motions for engineering purposes [J]. Science China: Technological Sciences, 2011, 54(1): 175—182.
- [40] 王鼎, 李杰. 工程场地地震动随机场的物理模型[J]. 中国科学: 技术科学, 2012, 42(7): 798—807.  
Wang Ding, Li Jie. Physical model for random ground motion field of engineering sites [J]. Science China: Technological Sciences, 2012, 42(7): 798—807. (in Chinese)
- [41] Yan Q, Peng Y B, Li J. Scheme and application of phase delay spectrum towards spatial stochastic wind fields [J]. Wind and Structures, 2013, 16(5): 433—455.
- [42] Clough R W, Penzien J. Dynamics of structures [M]. 2nd ed. McGraw-Hill College, 1993.

- [43] Simiu E, Scanlan R H. Wind effects on structures: Fundamentals and applications to design [M]. John Wiley & Sons, 1996.
- [44] Goda Y. Random Seas and design of maritime structures [M]. 3rd ed. World Scientific, 2010.
- [45] Loève M. Probability theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [46] Shinozuka M, Deodatis G. Simulation of stochastic processes by spectral representation [J]. Applied Mechanics Review, 1991, 44(4): 191–204.
- [47] Spanos P D, Beer M, Red-Horse J. Karhunen–Loève expansion of stochastic processes with a modified exponential covariance kernel [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2007, 133(7): 773–779.
- [48] Liu Z J, Chen J B, Li J. Orthogonal expansion of Gaussian wind velocity field and PDEM-based vibration analysis of wind-excited structures [J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2011, 99(1): 1207–1220.
- [49] Chen J B, Li J. Optimal determination of frequencies in the spectral representation of stochastic processes [J]. Computational Mechanics, 2013, 51(5): 791–806.
- [50] Chen J B, Sun W L, Li J, Xu J. Stochastic harmonic function representation of stochastic processes [J]. Journal of Applied Mechanics, 2013, 80(1): 011001-1–011001-11.
- [51] Li J, Chen J B. The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation [J]. Structural Safety, 2008, 30(1): 65–77.
- [52] 苏成, 徐瑞. 非平稳地震作用下随机结构动力可靠度计算[J]. 振动工程学报, 2011, 24(2): 118–124.  
Su Cheng, Xu Rui. Dynamic reliability analysis of stochastic structures subjected to non-stationary seismic excitations [J]. Journal of Vibration Engineering, 2011, 24(2): 118–124. (in Chinese)
- [53] 吕大刚, 贾明明. 钢框架结构基于变形可靠度的全概率抗震设计[J]. 工程力学, 2011, 28(5): 117–123.  
Lü Dagang, Jia Mingming. Full probability aseismic design of steel frame structures based on deformation reliability [J]. Engineering Mechanics, 2011, 28(5): 117–123. (in Chinese)
- [54] Vanmarcke E H. Random fields [M]. Singapore: World Scientific, 2010.
- [55] 刘章军, 陈建兵. 结构动力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2012.  
Liu Zhangjun, Chen Jianbing. Dynamics of structures [M]. Beijing: China Water Power Press, 2012. (in Chinese)
- [56] He J, Zhao Y G. First passage times of stationary non-Gaussian structural response [J]. Computers & Structures, 2007, 85(7/8): 431–436.
- [57] Chen J B, Li J. Dynamic response and reliability analysis of nonlinear stochastic structures [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20(1): 33–44.
- [58] Chen J B, Li J. The extreme value distribution and dynamic reliability analysis of nonlinear structures with uncertain parameters [J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 77–93.
- [59] Thoft-Christensen P, Murotsu Y. Application of structural systems reliability theory [M]. Springer-Verlag, 1986.
- [60] Chen J B, Li J. Development-process-of-nonlinearity-based reliability evaluation of structures [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2007, 22(3): 267–275.
- [61] Zhao Y G, Ono T, Idota H. Response uncertainty and time-variant reliability analysis for hysteretic MDF structures [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1999, 28(10): 1187–1213.
- [62] Zhao Y G, Lu Z H. Fourth moment standardization for structural reliability assessment [J]. Journal of Structural Engineering, 2007, 133(7): 916–924.
- [63] Zhao Y G, Ang A H-S. System reliability assessment by method of moments [J]. Journal of Structural Engineering, 2010, 129(10): 1341–1349
- [64] Li J, Chen J B, Fan W L. The equivalent extreme-value event and evaluation of the structural system reliability [J]. Structural Safety, 2007, 29(2): 112–131.
- [65] Xu J, Chen J B, Li J. Probability density evolution analysis of engineering structures via cubature points [J]. Computational Mechanics, 2012, 50(1): 135–156.
- [66] Smolyak S. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions [J]. Soviet Math. Dokl, 1963, 4: 240–243.
- [67] Genz A. Fully symmetric interpolatory rules for multiple integrals [J]. SIAM J. Numer. Anal, 1986, 23(6): 1273–1283.
- [68] Victor V. Asymmetric cubature formulae with few points in high dimension for symmetric measures [J]. SIAM J. Numer, 2004, 42(1): 209–227.
- [69] Glasserman P. Monte Carlo methods in financial engineering [M]. Springer, 2004.
- [70] 华罗庚, 王元. 数论在近似分析中的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1978.  
Hua Luo-Keng, Wang Yuan. Applications of number theory to numerical analysis [M]. Springer, Berlin, 1981.
- [71] Chen J B, Zhang S H. Improving point selection in cubature by a new discrepancy [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2013, 35(5): A2121–A2149.
- [72] 陈建兵, 张圣涵. 非均匀随机参数结构非线性响应概率密度演化[J]. 力学学报, 2014, 46(1): 136–144.  
Chen Jianbing, Zhang Shenghan. Probability density evolution analysis of nonlinear response of structures with non-uniform random parameters [J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2014, 46(1): 136–144. (in Chinese)
- [73] Goller B, Pradlwarter H J, Schuëller G I. Reliability assessment in structural dynamics [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(10): 2488–2499.
- [74] Pandey M D, Zhang X F. System reliability analysis of the robotic manipulator with random joint clearances [J]. Mechanism and Machine Theory, 2012, 58: 137–152.
- [75] Cui L J, Lu Z Z, Wang Q. Parametric sensitivity analysis of the importance measure [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2012, 28: 482–491.

注: 该文在第 22 届结构工程学术会议(2013 新疆)应邀作特邀报告