文章编号: 1001-0920 (2013) 06-0957-04

多目标决策的激励策略可行解

刘文奇[1], 余高锋[1,2], 胥楚贵[2]

(1. 昆明理工大学 理学院，昆明 650093；2. 三明学院 数学与信息工程学院，福建 三明 365002)

摘 要: 针对多目标决策问题, 提出一种新的基于一般变权原理的求解方法. 利用一般变权原理提出激励策略可行解, 证明其为多目标决策的均衡有效解, 并给出求激励策略可行解的步骤. 通过实际算例表明, 所提出算法正确有效, 且相对于线性加权和法、平方加权和法而言, 具有较好的均衡性.

关键词: 多目标决策；变权综合；激励策略可行解

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A

Incentive strategy feasible solution for multi-objective decision making

LIU Wen-qi[1], *YU Gao-feng*[1,2], *XU Chu-gui*[2]

(1. School of Science，Kunming University of Science and Technology，Kunming 650093，China；2. School of Mathematics and Information Engineering，Sanming University，Sanming 365002，China. Correspondent：YU Gao-feng，E-mail：yugaofeng666@163.com)

Abstract: Aiming at the multi-objective decision making, this paper proposes the multi-objective programming method based on the ordinary variable weight principle. Firstly, the incentive strategy feasible solution to multi-objective decision making is introduced with variable weight synthesis, and is proved to be the equilibrium and non-inferior solutions of multi-objective decision making. Then, the steps of solution is introduced. Finally, the example shows that the proposed method is correct and effective, and has better synthetical performance of equilibrium compared with the linear weighted summation and square weighted summation method.

Key words: multi-objective decision making；variable weight synthesis；incentive strategy feasible solution

0 引 言

在许多科学领域, 基于实际问题建立规划模型需要考虑多目标, 这种一组约束条件具有多目标函数的优化问题即称为多目标决策. 多目标决策方法已经成为决策科学、系统工程、管理与运筹等领域的研究热点, 研究有效实用的多目标决策方法具有重要的意义.

汪培庄于20世纪80年代率先提出变权综合思想[1]. 文献 [2-7] 对变权的本质和原理进行了系统研究, 定义了变权向量、状态变权向量和均衡函数等概念, 提出了变权综合原理, 并得到一种变权向量构造方法. 近几十年来, 国内外许多学者对多目标决策规划求解方法进行了研究, 并取得了较多研究成果. 徐南荣等[8-9]提出交互式方法. 徐泽水[10-11]提出目标贴近度方法. 柯宏发等[12]利用灰色关联度将多目标规划转化为单目标规划问题求解. 卢子芳等[13]利用已有单目标优化问题较为成熟的求解方法, 提出一种多目标优化问题的典型思路. 本文利用一般变权原理提出了多目标决策的激励策略可行解, 激励策略可行解对低于满意度进行惩罚, 对高于满意度进行激励, 并通过实例表明该方法是正确有效的.

1 主要结论

多目标决策中, 将多目标函数中求最小统一转化为求最大, 多目标决策模型可以表示为

$$\max\ f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x));$$
$$\text{s.t. } g_i(x)\leqslant 0,\ j=1,2,\cdots,n.$$

其中: x 为 n 维优化向量; $g_j(x)$ 为多目标决策模型约束函数; $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 为目标函数. 记 $A=\{x|g_i(x)\leqslant 0\}$, $i,j=1,2,\cdots,n$, 上述目标函数有时相互矛盾, 或者具有不可公度性, 即目标函数之间没

收稿日期: 2012-01-11；**修回日期:** 2012-09-17.

基金项目: 国家自然科学基金项目(11101193)；科技部科技型中小企业技术创新基金项目(11C26215305906)；福建省教育厅 A 类科技项目(JA11257).

作者简介: 刘文奇(1965−), 男, 教授, 博士, 从事决策分析等研究；余高锋(1986−), 男, 助教, 硕士, 从事决策分析的研究.

有统一的度量标准, 难以进行比较. 或者说, 采用某一种方案去改进某一个目标函数, 可能牺牲另外一个目标函数的值, 因此难以达到令所有目标函数的值最优.

定义 1 第 i 个单目标决策模型表示为

$$\max\ f_i(x);$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \leqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

设最优解和最劣解分别为 f_i^* 和 f_i', 则称 $f^* = (f_1^*, f_2^*, \cdots, f_m^*)$ 和 $f' = (f_1', f_2', \cdots, f_m')$ 分别为多目标决策模型解域中的理想点和负理想点.

定义 2 设 $x^* \in A$, 若不存在 $x \in A$ 使得 $f(x) \geqslant f(x^*)(f(x) > f(x^*))$ 成立, 则称 x^* 为有效解 (弱有效解).

大多数情况下, 理想点无法达到, 可以寻求距离 f^* 最近的 f 作为模型 (MOP) 的满意解. 单个目标值均不宜太低, 因此提出均衡解定义.

定义 3 设 $x \in A$, 若存在某个 $i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得 $f_{i_0}(x) = \min\limits_{x\in A} f_{i_0}(x)$, 则称 x 为非均衡可行解, 否则称为均衡可行解; 若 x 是均衡的且是有效的, 则称 x 为均衡有效解.

均衡有效解在多目标决策模型中具有重要的实际意义, 它反映了目标之间的不可替代性, 特别在可持续发展战略中意义非常突出.

定义 4 每个目标函数的隶属度函数定义为

$$\mu_i(f_i) = \frac{f_i(x) - f_i'}{f_i^* - f_i'},$$

满足: 1) $0 \leqslant \mu_i(f_i) \leqslant 1$; 2) $\mu_i(f_i)$ 关于 f_i 单调递增.

定义 5 在目标函数 f_i 上决策者希望达到的水平值 $\overline{f}_i$ 称为目标函数 f_i 的期望值, 称

$$p_i = \frac{\overline{f}_i(x) - f_i'}{f_i^* - f_i'}$$

为目标函数的满意度.

为求简便, 设 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m)$ 为目标函数的隶属度状态向量, $p = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$ 为决策者的期望度. 记 $0 = (0, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$ 和 $e = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 均为 m 维列向量; $w(\mu) = (w_1(\mu), w_2(\mu), \cdots, w_m(\mu))$ 为 m 维函数列向量. 向量 $a \geqslant b$ 表示 a 的各分量大于或等于 b 的对应分量, 其他类似.

通过上述分析，可以得到多目标规划模型的求解模型为

$$\max\ v = w^{\mathrm{T}}(\mu)\mu;$$
$$\text{s.t. } g_i(x) \leqslant 0,\ j = 1, 2, \cdots, n.$$

定义 6 若 $w(\mu), v(\mu)$ 满足: 1) $w(\mu)$ 是以 p 为激励策略的变权向量; 2) $v = w^{\mathrm{T}}(\mu)\mu$ 最优, 且 $\mu_i \neq 0$, $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. 则称满足上述要求的 x 为激励策略可行解.

定理 1 若 x^* 是激励策略可行解, 则 x^* 也是多目标决策的均衡可行解.

证明 假设 x^* 是激励策略可行解, 但不是多目标决策的均衡可行解, 由定义 3 可知, 存在某个 $i_0 \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 使得 $f_{i_0}(x) = \min\limits_{x\in A} f_{i_0}(x)$. 可以得到 $\mu_{i_0}(f_{i_0}) = 0$, 与定义 6 中 $\forall i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ 有 $\mu_i \neq 0$ 相矛盾, 故定理 1 成立. □

定理 2 若 x^* 是激励策略可行解, 则 x^* 也是多目标决策的有效解.

证明 假设 x^* 是激励策略可行解, 但不是多目标决策的有效解, 则存在 $x^- \in A$, 对于任意 i, $f_i(x^-) \geqslant f_i(x^*)$, 且存在 k 使得 $f_k(x) > f_k(x^*)$. 由定义 4 可知 $\mu_k(f_k(x^-)) > \mu_k(f_k(x^*))$, 由 $w(\mu)$ 是 p 激励策略变权可知, $\forall\, j \in \{1, 2, \cdots, m\}$, 有

$$\frac{\partial v}{\partial \mu_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial w_k}{\partial \mu_j}\mu_k + w_j > 0.$$

因此 v 关于每个变元严格单调递增, 有 $v^- > v^*$, 与 v^* 最优矛盾, 故定理 2 成立. □

推论 1 若 x^* 不是激励策略可行解, 则 x^* 也不是多目标决策的有效解.

定理 3 若 x^* 是激励策略可行解, 则 x^* 也是多目标决策的均衡有效解.

若 x^* 是激励策略可行解, 变权 $w(x)$ 的激励策略 $p = e$, 则称 x^* 是惩罚型均衡有效解; 若 x^* 是激励策略可行解, 变权 $w(x)$ 的激励策略 $p = 0$, 则称 x^* 是激励型均衡有效解; 若 x^* 是激励策略可行解, 变权 $w(x)$ 的激励策略 $p \in (0, 1)$, 则称 x^* 是混合型均衡有效解.

推论 2 设

$$v(\mu) = \Big[\sum_{i=1}^{m} \mu_i^q(x) w_i(\mu)\Big]^{1/q},\ 1 \leqslant q < +\infty,$$

$w(\mu)$ 是以 p 激励策略变权向量, $w(\mu) > 0$, x^* 是 $v(\mu)$ 最优解, 则 x^* 是多目标决策的均衡有效解.

证明 对于任意 $\mu^1, \mu^2 \in R^m$, $\mu^1 = (\mu_1^1, \mu_2^1, \cdots, \mu_m^1)^{\mathrm{T}}$, $\mu^2 = (\mu_1^2, \mu_2^2, \cdots, \mu_m^2)$, $\mu^1, \mu^2 > 0$, 设 $\mu^1 < \mu^2$, 有

$$\sum_{i=1}^{m} (\mu_i^1(x))^q w_i(\mu) < \sum_{i=1}^{m} (\mu_i^2(x))^q w_i(\mu),$$

于是有

$$\Big[\sum_{i=1}^{m} (\mu_i^1(x))^q w_i(\mu)\Big]^{1/q} < \Big[\sum_{i=1}^{m} (\mu_i^2(x))^q w_i(\mu)\Big]^{1/q},$$

即 $v(\mu^1) < v(\mu^2)$. $v(\mu)$ 关于 μ 是严格增函数, $w(\mu)$ 是变权向量, x^* 是 $v(\mu)$ 最优解, 故定义 6 成立. 因此, x^* 是多目标决策的激励策略解, x^* 也是多目标决策的均衡有效解. □

依据上述定义和定理, 给出求解多目标决策激励策略可行解的方法, 具体步骤如下.

Step 1: 求出多目标决策的理想点和负理想点分

别为 $f^* = (f_1^*, f_2^*, \cdots, f_m^*)$, $f' = (f_1', f_2', \cdots, f_m')$;

Step 2: 根据决策者的主观偏好, 对每个目标赋初始权重和满意度, 分别为 $w^0 = (w_1^0, w_2^0, \cdots, w_m^0)$ 和 $p = (p_1, p_2, \cdots, p_m)$;

Step 3: 根据定义 6, 将多目标决策转化为单目标决策;

Step 4: 求解单目标决策, 得出多目标函数最优值 $f(x^*)$;

Step 5: 结束.

2　双目标投资组合的激励策略可行解

利用企业债券的交易数据研究企业债券的信用风险, 构造投资组合的收益函数和损失函数, 建立期望收益最大化和期望损失最小化的双目标投资组合优化模型[14]. 设投资者持有 n 种企业债券, x_i 为第 i 种债券的投资比例, r_i 为第 i 种债券收益率, p_i 为第 i 种债券的违约率, I^* 为不发生违约, I' 为发生违约, 则该组合的收益函数表示为

$$G = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i I^*.$$

期望收益函数为

$$E(G) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i) E(I^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i)(1 - p_i).$$

该组合的损失函数为

$$L = \sum_{i=1}^{n} x_i I'.$$

期望损失函数为

$$E(L) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(I') = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

企业希望期望收益最大, 同时期望损失最小. 令

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i)(1 - p_i),\ f_2(x) = -\sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

建立双目标模型为

$$\begin{aligned} &\max\ \{f_1(x), f_2(x)\}. \\ &\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 0,\ j = 1, 2, \cdots, n; \\ &\qquad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

选取 16 家企业债券为投资对象, 利用这些债券 2010 年 8 月 26 日～2011 年 8 月 26 日的交易数据求出企业债券 1 年内的平均收益率 $E(r_i)$ 和违约概率 p_i, 结果如表 1 所示. 由此可以得到双目标函数模型如下:

$$\begin{aligned} &\max\ \Big\{f_1(x) = \sum_{i=1}^{16} x_i E(r_i)(1 - p_i),\ f_2(x) = \sum_{i=1}^{16} x_i p_i\Big\}. \\ &\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{16} x_i = 0,\ j = 1, 2, \cdots, n; \\ &\qquad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned} \tag{2}$$

表 1　16 家企业债券交易数据

代码	名称	违约概率	期望收益率
120605	06三峡债	0.016 20	0.053 7
126002	06中化债	0.006 83	0.048 1
126007	07日照港	0.017 50	0.054 5
126005	07武钢债	0.007 67	0.048 6
126003	07云化债	0.015 8 3	0.053 5
111041	08铁岭债(7)	0.060 16	0.080 1
122009	08新湖债(6)	0.059 50	0.079 7
126016	08宝钢债	0.009 33	0.049 6
126017	08葛洲债	0.011 50	0.050 9
122013	08北辰债(5)	0.034 83	0.064 9
126015	08康美债	0.025 67	0.059 4
126013	08青啤债	0.010 00	0.050 0
126008	08上汽债	0.008 50	0.049 1
112019	09宜化债(10)	0.0238 33	0.058 3
126019	09长虹债	0.032 833	0.063 7
122043	09紫江债(8)	0.031 667	0.063 0

求解步骤如下.

Step 1: 求出多目标决策的理想点和负理想点分别为

$$f_1^*(x) = 0.075\,3,\ f_1'(x) = -0.047\,7,$$
$$f_2^*(x) = 0.006\,8,\ f_2'(x) = -0.060\,2.$$

Step 2: 根据决策者的主观偏好, 对每个目标赋予初始权重和满意度, 分别为 $w^0 = (0.7, 0.3)$ 和 $p = (0.5, 0.5)$.

Step 3: 根据定义 6, 将多目标决策转化为单目标决策, 有

$$\begin{aligned} &\max\ \ w^{\mathrm{T}}\mu. \\ &\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{16} x_i = 0,\ j = 1, 2, \cdots, n; \\ &\qquad x_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \cdots, n; \\ &\qquad \mu_i(f_i) > 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{3}$$

其中

$$w_i(x_1, x_2) = \frac{w_i^0 s_i(\mu_1, \mu_2)}{\sum_{j=1}^{3} w_j^0 s_j(\mu_1, \mu_2)},\ i = 1, 2;$$

$$s(\mu) = (\sin(2\pi\mu_1), \sin(2\pi\mu_2)).$$

Step 4: 求解单目标决策, 得出目标函数最优值

$$f(x^*) = (0.059, -0.029).$$

Step 5: 结束.

若取权重为 $w_0 = (0.5, 0.5)$, 则利用国内外比较成熟的线性加权和法、平方加权和方法等方法求解的结果分别为

$$(f_{11}^{**}, f_{12}^{**}) = (0.075\,1, -0.059\,8),$$
$$(f_{21}^{**}, f_{22}^{**}) = (0.075\,3, -0.060\,2).$$

本文结果与之相比, 具有较好的综合均衡性能,

不会出现为追求某一目标的最大化而大幅度牺牲另外一个目标的情况.

3 结 论

本文提出一种新的基于一般变权原理的求解多目标决策的方法. 利用一般变权原理提出了激励策略可行解, 激励策略可行解是对低于满意度的可行解进行惩罚, 对高于满意度的进行激励. 通过实际算例表明, 该方法正确有效, 且相对于线性加权和法、平方加权和法而言, 具有较好的均衡性, 因此具有良好的应用前景.

参考文献(References)

[1] Wang P Z. A factor space approach to knowledge Represention[J]. Fuzzy Sets and System, 1990, 36: 113-124.

[2] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架 (VIII)[J]. 模糊系统与数学, 1995, 9(3): 1-9.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge represention(VIII)[J]. Fuzzy Systems and Mathematical, 1995, 9(3): 1-9.)

[3] 李洪兴. 因素空间理论与知识表示的数学框架 (XI)[J]. 模糊系统与数学, 1996, 10(2): 12-19.
(Li H X. Factor spaces and mathematical frame of knowledge represention(XI)[J]. Fuzzy Systems and Mathematical, 1996, 10(2): 12-19.)

[4] 刘文奇. 均衡函数及其在变权综合中应用[J]. 系统理工程论与实践, 1997, 17(4): 59-65.
(Liu W Q. Balanced function and its Application for variable weighted synthesizing[J]. Systems Engineering - Theory Practice, 1997, 17(4): 59-65.)

[5] 刘文奇. 变权综合中的惩罚-激励效用[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(4): 41-47.
(Liu W Q. The penalty Incentive utility invariable weight synthesizing[J]. Systems Engineering - Theory Practice, 1998, 18(4): 41-47.)

[6] 刘文奇. 一般变权原理与多目标决策[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 3(3): 1-11.
(Liu W Q. The ordinary variable weight principle and multi objective decision making[J]. Systems Engineering - Theory Practice, 2000, 3(3): 1-11.)

[7] 成波, 刘三阳. 一个具有可调变权能力的变权向量[J]. 控制与决策, 2012, 27(1): 82-86.
(Cheng B, Liu S Y. A variable weights vector with adjustable capability to change weights[J]. Control and Decision, 2012, 27(1): 82-86.)

[8] 吴清烈, 徐南荣. 基于目标满意度多目标决策的改进交互式方法[J]. 管理工程学报, 1996, 10(4): 217-222.
(Wu Q L, Xu N R. An improved interactive method based on satisfaction degree of objectives for multiobjective decision making[J]. J of Industrial Engineering Engineering Management, 1996, 10(4): 217-222.)

[9] 蒋尚国, 徐南荣. 基于目标达成度和目标综合度的交互式多目标决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(1): 9-14.
(Jiang S G, Xu N R. Interactive multi-objective decision-making method based on objective achievement scale and objective comprehensive scale[J]. Systems Engineering - Theory Practice, 1999, 19(1): 9-14.)

[10] 徐泽水. 一种交互式多目标决策新方法[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(2): 104-108.
(Xu Z S. A new interactive method for multi-objective decision-making problems[J]. Systems Engineering - Theory Practice, 2002, 22(2): 104-108.)

[11] 徐泽水. 一种基于目标贴近度的多目标决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(9): 101-104.
(Xu Z S. A method based on objective similarity scale for multi-objective decision-making[J]. Systems Engineering - Theory Practice, 2001, 21(9): 101-104.)

[12] 柯宏发, 刘思峰, 陈永光, 等. 基于灰色关联度的多目标规划新求解算法[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 3(32): 544-547.
(Ke H F, Liu S F, Chen Y G, et al. New solution algorithm for multiple objective programing model based on grey relational degree[J]. Systems Engineering and Electronic, 2010, 3(32): 544-547).

[13] 卢子芳, 达庆利, 徐南荣. 一种基于权重修正的多目标决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 1996, 11(11): 44-50.
(Lu Z F, Da Q L, Xu N R. A method of weights improvement in multi-objective decision making[J]. Systems Engineering - Theory Practice, 1996, 11(11): 44-50.)

[14] 肖喻, 肖庆宪. 信用风险管理中的多目标决策方法[J]. 统计与决策, 2006, 2(3): 43-45.
(Xiao Y, Xiao Q X. Multi-objective of credit risk management[J]. Statistics and Decision, 2006, 2(3): 43-45.)