

利用 FFT 高效求解二维瑞利-贝纳德热对流

徐 炜 包 芸¹⁾

(中山大学力学系, 广州 510275)

摘要 研究提高二维方腔瑞利-贝纳德对流直接数值模拟求解方法的计算效率问题. 对于非定常湍流热对流, 压力泊松方程的求解是影响整个计算效率的关键. 利用快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT) 解耦并结合追赶法, 可实现压力泊松方程的直接求解. 通过与跳点超松弛迭代法在求解精度和计算速度对比, 可以看到, 利用 FFT 压力泊松方程直接方法计算热对流问题是高效的. 还给出了典型状态的热对流初始羽流和大尺度环境温度场, 以及系列瑞利数 (Ra) 计算结果的宏观传热努塞数 (Nu) 变化.

关键词 瑞利-贝纳德对流, 快速傅里叶变换, 泊松方程直接求解, 直接数值模拟

中图分类号: O357.5 文献标识码: A DOI: 10.6052/0459-1879-12-334

引言

热对流现象广泛地存在于日常生活和自然界中. 平常的锅炉烧水, 发电厂的冷凝装置, 引起天气、气候变化的大气环流、海洋环流, 引起大陆板块漂移的地幔对流, 引起磁场变化的外地核对流, 以及太阳表面太阳风的运动都与其相关^[1]. 热对流现象的研究不仅可以解决工程中的传热问题, 还可以深化人类对自然界中热对流现象的认识, 最终改善人们的生产和生活. 一个从自然现象中抽象出来的理想热对流模型, 瑞利-贝纳德对流 (Rayleigh-Bénard convection, RBC), 成为过去几十年许多科学工作者研究的热点问题, 近十年来在高瑞利数情况下产生的湍流热对流问题研究发展迅速^[2].

基于布西内斯克 (Boussinesq) 假设的热对流问题属于不可压黏性流问题. 研究方法有实验研究、理论研究和数值模拟研究. 在过去的许多年中, 经过多年的大量实验观测, 得出许多热对流的基本物理现象^[3-6], 并有相应的理论研究研究成果^[7-8]. 计算机和计算技术的发展使得数值模拟研究也迅速发展^[9-10]. 近十年来, 热对流的数值计算问题主要集中在高瑞利数的模拟上, 仍有大量的数值计算问题存在. 当瑞利数越高, 热对流场中的羽流越小, 流动脉动越强烈, 流动呈现湍流运动特性. 直接数值模拟计算热对流需要大量的计算网格捕捉细小的羽流, 且需要长时间的计算来描述热对流的平均状态, 计算工作量极大. 有效提高计算效率是热对流数

值模拟工作中的一项重要任务.

在不可压黏性流体的计算中, 压力泊松方程的求解往往是计算最费时的地方. 常用的数值方法有直接法和迭代法. 迭代法算法在程序上容易实现, 占用存储空间少等优点, 但是达到收敛需要进行反复的迭代, 耗费大量的计算时间. 本文在二维热对流的计算中, 将使用快速傅里叶变换 (fast Fourier transform, FFT) 解耦压力泊松方程, 将其化解为线联立的三对角方程, 再用追赶法求解的直接方法, 并与跳点超松弛迭代法的计算精度和计算效率进行了对比.

1 物理模型与控制方程

作为一种典型的热对流运动, 瑞利-贝纳德对流是一种由底部水平平板加热流体后所形成的位于两个平行平板之间流体自然对流过程. 由于实验和分析的简便性, 使得瑞利-贝纳德对流成为热对流研究领域中最为典型的流动现象. 在热对流中, 浮力和重力作为关键因素主导了对流产生和发展过程. 在底部被加热后的热流体密度降低, 浮力作用导致流体向上运动, 同时在顶部的流体将热量传给上部冷却平板, 冷却后的流体密度增加, 形成向下运动的流体团, 这种流体向上和向下运动最终形成了有组织的运动模式, 见图 1. 下板附近阴影区域表示热流体、上板阴影区域表示冷流体, 箭头给出了流动方向. 示意图给出了不同流动结构共同构成了对流流动系统的整体运动过程. 羽流 (plumes) 在形成运动过程和

2012-11-26 收到第 1 稿, 2013-04-12 收到修改稿.

1) 包芸, 教授, 主要研究方向: 计算流体力学. E-mail: stsby@mail.sysu.edu.cn

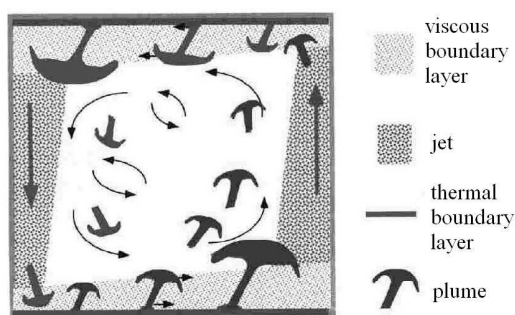


图 1 热对流的物理模型^[11]

Fig. 1 Model of thermal convection^[11]

热驱动方面起到了重要的作用。

基于布西内斯克假设的热对流方程，引入特征长度 $L_0 = H$ ，特征速度 $V_0 = \sqrt{RaPr} \frac{\kappa}{H}$ ，特征温度 $\theta_0 = \Delta\theta$ ，特征时间 $t_0 = \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \frac{H^2}{\nu}$ ，特征压力 $p_0 = RaPr \frac{\rho\kappa^2}{H^2}$ ，对方程进行无量纲化。经过无量纲化，热对流方程为

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\nabla p + \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \nabla^2 \mathbf{V} + \theta \mathbf{j} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \theta &= \frac{1}{\sqrt{RaPr}} \nabla^2 \theta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中， \mathbf{V} 为速度， p 为压力， θ 为温度。

无量纲参数 $Ra = \frac{g\alpha\Delta\theta H^3}{\nu\kappa}$ 为瑞利数，是浮力驱动力与阻碍运动的力两者相对大小， $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ 为普朗特数，决定系统中黏性边界层和温度边界层的尺度比例。 α 为热膨胀系数， g 为重力加速度， $\Delta\theta$ 为上下壁面温差， H 为上下壁面距离， ν 为运动黏性系数， κ 为热扩散率。气体的 Pr 在 1 附近 (略小于 1)，大多数液体的 Pr 大于 1，如水在室温下 Pr 约为 6。

计算边界条件

$$\left. \begin{aligned} x = 0, x = 1: \mathbf{V} &= \mathbf{0}, \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ y = 0: \mathbf{V} &= \mathbf{0}, \theta = \theta_1 \\ y = 1: \mathbf{V} &= \mathbf{0}, \theta = \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

2 数值计算方法

本文采用直接数值模拟计算二维热对流。热对流的求解过程采用不可压流动的投影法。

2.1 投影法基本思路

本文基于投影法^[12]的思路求解热对流方程。投影法是一种分步法，对于方程 (1)，显式投影法由以下步骤组成：

(1) 第 1 步：预估速度。

(2) 第 2 步：修正压力。通过下式对预估速度进行修正。

$$\frac{\mathbf{V}^{n+1} - \mathbf{V}^*}{\Delta t} + \nabla p^{n+1} = \mathbf{0} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0 \quad (4)$$

在修正步中，要求修正后的速度 \mathbf{V}^{n+1} 的散度为零。对式 (3) 取散度后得到如下压力泊松方程

$$\nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{V}^* \quad (5)$$

其边界条件为法向压力梯度等于零。该泊松方程的源项由预估步给出，可求出压力 p^{n+1} 。

(3) 第 3 步：校正速度。

(4) 第 4 步：求解温度。与一般不可压黏性流动计算不同，热对流需要耦合求解热对流扩散方程。利用所求得的 \mathbf{V}^{n+1} 求解 θ^{n+1} 。

2.2 离散格式和网格布置

投影法在时间方向的离散精度是一阶的，空间离散精度依赖于空间导数的离散精度。选用不同的网格，空间导数采用不同的离散形式，则可得到不同类型的投影法^[12]。本文使用交错网格系统消除棋盘误差，使用二阶精度中心差分离散空间导数。内部和边界的网格布置如图 2 所示。叉号表示 u ，三角形表示 v ，空心圆圈表示 p 和 t 。

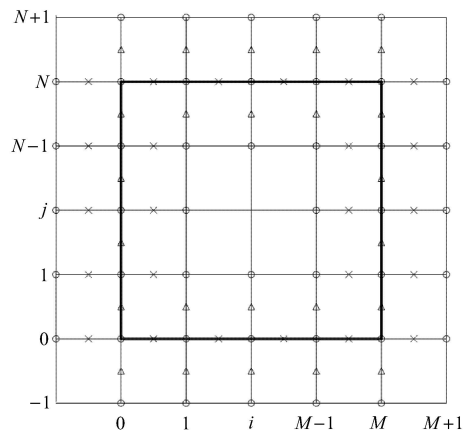


图 2 计算网格

Fig. 2 Computational grid

2.3 压力泊松方程的数值解法

投影法中的压力泊松方程求解需要全场联立, 所以往往是整个计算中最费时的部分, 合理的设计压力泊松求解方法是提高不可压流动计算效率的关键之一. 压力泊松方程为

$$\nabla^2 p = d \quad (6)$$

在二阶精度中心差分离散下得到的离散压力泊松方程一般形式如下

$$\begin{aligned} a_{1j}p_{i-1,j} + b_{1j}p_{i,j} + c_{1j}p_{i+1,j} + \\ a_{2j}p_{i,j-1} + b_{2j}p_{i,j} + c_{2j}p_{i,j+1} = d_{i,j} \end{aligned} \quad (7)$$

本文考虑到在热对流中, 上下恒温板的近壁面存在温度边界层, 故在计算中, 水平方向使用等距网格, 竖直方向使用变距网格, 为了简明起见, 结合式 (7) 与式 (8), 改写成如下形式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^2} (p_{i-1,j} + p_{i+1,j}) + a_j p_{i,j-1} + \\ \left(b_j - \frac{2}{\Delta x^2} \right) p_{i,j} + c_j p_{i,j+1} = d_{i,j} \end{aligned} \quad (8)$$

2.3.1 跳点超松弛迭代法

利用奇、偶跳点法, 可以半隐式迭代计算, 以达到加快收敛的效果.

(1) i 和 j 同时为奇偶数时

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{b_j - \frac{2}{\Delta x^2}} \left[d_{i,j} - \frac{1}{\Delta x^2} (p_{i-1,j}^k + p_{i+1,j}^k) - \right. \\ \left. (a_j p_{i,j-1}^k + c_j p_{i,j+1}^k) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

(2) i 和 j 分别为奇偶数时

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{b_j - \frac{2}{\Delta x^2}} \left[d_{i,j} - \frac{1}{\Delta x^2} (p_{i-1,j}^{k+1} + p_{i+1,j}^{k+1}) - \right. \\ \left. (a_j p_{i,j-1}^{k+1} + c_j p_{i,j+1}^{k+1}) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

再经过超松弛加速收敛, 通过反复迭代, 直至满足精度, 可完成压力泊松方程的求解.

2.3.2 快速傅里叶变换直接求解

当 x 方向上采用等网格时, 使用 FFT 方法可将全场联立的泊松方程在 x 方向上解耦, 以便于求解.

使用一维离散余弦傅里叶变换^[13]

$$\left. \begin{aligned} \hat{p}_{k,j} &= \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_{i=0}^M \alpha_i p_{i,j} \cos \frac{\pi i k}{M} \\ p_{i,j} &= \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_{k=0}^M \alpha_k \hat{p}_{k,j} \cos \frac{\pi i k}{M} \\ \alpha_k &= \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 0, M \\ 1, & 1 \leq k \leq M-1 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

以上正、逆变换式在图 2 的边界网格布置下能自动满足压力边界条件. 令展开式两边对应系数相等, 可以得到 $M+1$ 个三对角方程. 对固定的 k , $0 \leq k \leq M$, 有三对角方程

$$\left. \begin{aligned} \left(b_1 - \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2M} \right) \hat{p}_{k,0} + (a_1 + c_1) \hat{p}_{k,1} &= \hat{d}_{k,0} \\ a_j \hat{p}_{k,j-1} + \left(b_j - \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2M} \right) \hat{p}_{k,j} + c_j \hat{p}_{k,j+1} &= \hat{d}_{k,j} \\ (a_N + c_N) \hat{p}_{k,N-1} + \left(b_N - \frac{4}{\Delta x^2} \sin^2 \frac{\pi k}{2M} \right) \hat{p}_{k,N} &= \hat{d}_{k,N} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

利用 FFTW 软件包^[14] 进行离散余弦正变换, 使用追赶法求解三对角方程, 再用逆变换可完成压力泊松方程的直接求解.

3 算例分析

本文选取较为典型的 $Ra = 1.0 \times 10^9$, $Pr = 4.3$. 热对流系统在这个条件下, 初期会形成明显的热羽流. 计算中, 水平方向使用等距网格, 竖直方向使用变距网格, 网格数 512×560 , 时间步长 $\Delta t = 2.0 \times 10^{-4}$.

完成压力泊松方程求解后, 速度散度越小, 连续方程满足情况越好. 得到尽可能小的速度散度, 也是求解非定常不可压问题的基本目标. 本文分别使用跳点超松弛迭代法和 FFT 直接解法作为泊松方程的求解器, 进行计算时间效率和速度散度计算精度的对比测试.

3.1 计算时间对比

在热对流方程组的求解中, 压力泊松方程的跳点超松弛迭代在每一个时间步需要一定的迭代步数才能达到收敛, 因此每完成一个时间步所需要的时间与当时的流场有关, FFT 法每完成一个时间步所需要的时间是基本确定的. 因此, 对计算时间的比较需要较长的时间才较合理. 热对流方程组完成 20 万个时间步计算, 在微机上所需要的总时间见表 1.

表 1 20 万个时间步长所用时间对比

Table 1 Comparison between the computation time of 2×10^5 time steps

Method	Leapfrog overrelaxation iteration	Direct solution using FFT
time/min	418	376

可以看到，这 2 种方法求解热对流方程组中压力泊松方程，在整个计算二维方腔热对流问题中，FFT 直接求解方法要比跳点超松弛迭代方法高效。

3.2 速度散度计算精度对比

压力泊松方程求解直接反应了不可压连续方程速度散度为 0 的性质。本文对比 2 种方法求解压力泊松方程的压力在速度校正后的速度散度。

从表 2 可以看出，采用跳点迭代求解方法，在压力迭代收敛精度下 (1.0×10^{-6})，最大速度散度值较大，但平均散度值小于收敛精度，这说明除个别点外在整个流场中的散度满足计算精度要求。FFT 直接求解方法得到的速度散度则达到了双精度的极限，在连续方程的计算上精度远远高于迭代法。

表 2 计算速度散度值对比

Table 2 Comparison between the velocity divergences

Method	Leapfrog overrelaxation iteration		Direct solution using FFT
	maximum	mean	
	velocity divergence	3.3×10^{-4}	

3.3 热对流宏观传热努塞数

热对流平均场的计算参数努塞数是反映热对流传热特性的重要参数，2 种计算压力泊松方程方法的计算结果应该得到一致的努塞数。热对流中热量传递方式有 2 种，分别是热传导传递和对流传递。假如流体静止仅靠热传导传递热量，则传递的热通量为热传导的热通量，但在热对流的过程中，流体对流会增加热量的传递，使热量传递效率增加。努塞数为通过对流的实际热通量与热传导的热通量的比值，它反映了热对流中对流传热的效率。无量纲化后的努塞数计算公式为

$$Nu = \sqrt{RaPr} \langle v\theta \rangle_x - \frac{\partial \langle \theta \rangle_x}{\partial y} \quad (13)$$

表 3 给出了在同样的时间计算步长条件下，计

算 100 万个时间步 2 种计算方法得到的热对流平均场的努塞数。可见 2 种求解压力泊松方程方法计算热对流问题得到的宏观状态是一致的。

表 3 计算平均场努塞数对比

Table 3 Comparison between the Nu of mean fields

Method	Leapfrog overrelaxation iteration	Direct solution using FFT
Nu	51.33	51.49

3.4 热对流流动特性

湍流研究中的一个重要课题便是拟序结构，羽流是湍流热对流中的重要拟序结构，羽流对湍流传热和其他动力学过程中起到了决定性的作用，因此热对流系统中羽流的研究有着重要的意义^[2]。

图 3 给出了 $Pr = 4.3$ 时努塞数随瑞利数的变化，瑞利数从 $1 \times 10^5 \sim 2 \times 10^{10}$ 共 17 个。从计算热对流流场特性和努塞数与瑞利数的关系可见，整个计算可以分成 3 个典型区域：2 个羽流交替运动的混沌区，有大尺度环流和固定角涡的软湍流区和角涡脱落并卷入大尺度环流的硬湍流区。在软湍流区和硬湍流区努塞数的变化有着不同的标度率，混沌区没有标度特征。

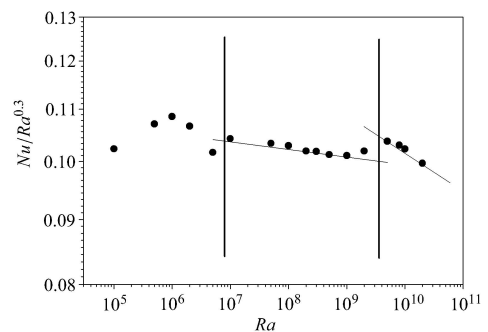


图 3 努塞数随瑞利数的变化

Fig.3 Nu number versus Ra number

图 4(a) 给出了热对流中羽流的形成。可以明显看出，羽流形成于上下恒温板附近的边界层，受到热浮力作用，羽流或被拉伸或被压缩，形成条带状热流。图 4(b) 给出了热对流形成大尺度环流后的瞬时温度场。由于上下板羽流的不断涌现，形成强烈的非定常过程，在瞬时温度场中，可以明显的看到在大尺度环流和角涡流动的作用下羽流的运动，流场中流动是脉动的，热对流的流态进入软湍流状态。图 4(c) 给出了 100 万计算时间步的平均温度场。在平均

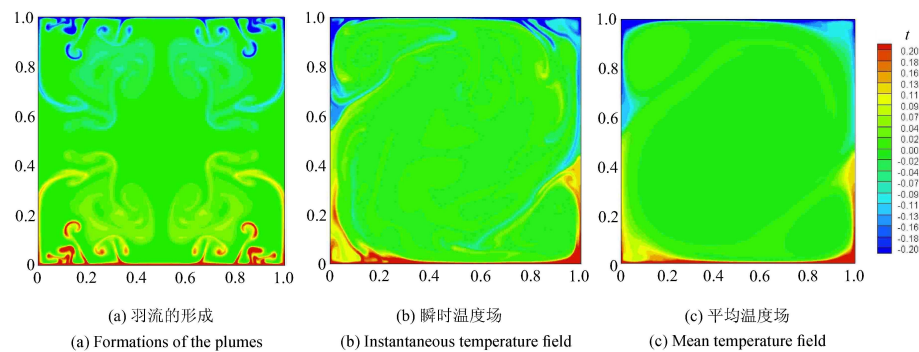


图 4 热对流的流动过程中羽流的形成和相互作用

Fig. 4 Formations and interactions of the plumes in RBC

温度场中能反映出大尺度环流和角涡流动的形态，可以用于分析热对流整体传热效率等宏观物理特性。

3.5 多联通域热对流

当热对流的计算区域不是单连通域，例如图 5 中所示. 在对流室中加入隔板的热对流情况，或计算

需要研究热对流侧壁边界层特性而在水平方向上采用不等距网格时，压力泊松方程的 FFT 变换出现问题，不能采用 FFT 直接方法求解压力泊松方程. 而跳点超松弛迭代方法求解压力泊松方程不受网格划分等问题的限制，在热对流的数值计算中有着更广阔的应用空间。

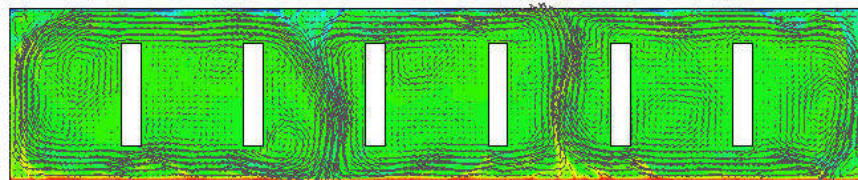


图 5 有隔板热对流速度和温度场

Fig. 5 Velocity and temperature fields in a RBC cell with partition plates

4 结 论

本文采用直接数值模拟计算二维非定常热对流及其湍流平均场特性. 对于不可压黏性流动的热对流问题，湍流平均场特性问题的研究需要长时间的迭代计算数据进行统计平均，如何提高不可压黏性流动中压力泊松方程的求解效率是整个计算研究的关键问题之一. 在二维方腔热对流计算中水平方向等距网格的条件下，利用 FFT 解耦压力泊松方程并结合追赶法，本文建立了能够快速而精确的求解压力泊松方程的 FFT 直接求解方法，同时讨论了压力泊松方程的跳点超松弛迭代求解方法. 计算过程和结果对比表明，FFT 直接求解压力泊松方程在二维热对流的直接数值模拟中具有较高的计算效率和很好的连续方程计算精度，而 2 种求解方法得到的热对流问题平均场特性的宏观状态统计结果是一致的。

当计算不是在一个单连通域中进行，或在水平方向上采用非等距网格时，压力泊松方程的 FFT 直

接求解不再可用. 跳点超松弛迭代方法在热对流的数值计算中仍是一种有效的方法。

参 考 文 献

- 1 郗恒东, 孙超, 夏克青. 湍流热对流中的动力学和传热研究. 物理, 2006, 35(4), 265-268 (Xi Hengdong, Sun Chao, Xia Keqing. Flow dynamics and heat transport in turbulent thermal convection. *Physics*, 2006, 35(4): 265-268 (in Chinese))
- 2 周全, 夏克青. Rayleigh-Bénard 湍流热对流研究的进展、现状及展望. 力学进展, 2012, 42(3): 231-251 (Zhou Quan, Xia Keqing. Advances and outlook in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Advances in Mechanics*, 2012, 42(3): 231-251 (in Chinese))
- 3 Zhou Q, Stevens RJAM, Sugiyama K, et al. Prandtl-Blasius temperature and velocity boundary-layer profiles in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J Fluid Mech*, 2010, 664: 297-312
- 4 Sun C, Cheung YH, Xia KQ. Experimental studies of the viscous boundary layer properties in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *J Fluid Mech*, 2008, 605: 79-113
- 5 Zhou Q, Xia KQ. Measured instantaneous viscous boundary layer in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Phys Rev Lett*, 2010, 104: 104301
- 6 Puits RD, Resagk C, Thess A. Thickness of the diffusive sublayer in

- turbulent convection. *Phys Rev E*, 2010, 81: 016307
- 7 Ahlers G, Grossmann S, Lohse D. Heat transfer and large scale dynamics in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Rev Mod Phys*, 2009, 81: 503-537
- 8 Grossmann S, Lohse D. Fluctuations in turbulent Rayleigh-Bénard convection: The role of plumes. *Phys Fluids*, 2004, 16(12): 4462-4472
- 9 Shishkina O, Wagner C. Local heat fluxes in turbulent Rayleigh-Bénard Convection. *Phys Fluids*, 2007, 19(8): 085107
- 10 Stevens RJA, Verzicco R, Lohse D. Radial boundary layer structure and Nusselt number in Rayleigh-Bénard convection. *J Fluid Mech*, 2010, 643: 495-507
- 11 Kadanoff LP. Turbulent heat flow: Structure and scaling. *Physics Today*, 2001, 54(8): 34-39
- 12 江春波, 张永良, 丁则平. 计算流体力学. 北京: 中国电力出版社, 2007 (Jiang Chunbo, Zhang Yongliang, Ding Zeping. Computational Fluid Dynamics. Beijing: China Electric Power Press, 2007 (in Chinese))
- 13 吕涛, 石济民, 林振宝. 区域分解算法——偏微分方程数值解新技术. 北京: 科学出版社, 1999 (Lü Tao, Shi Jimin, Lin Zhenbao. Region Solving Method—New Simulation Technology for Partial Differential Equations. Beijing: Science Press, 1999 (in Chinese))
- 14 Matteo F, Steven GJ. The design and implementation of FFTW3. *Proceedings of the IEEE*, 2005, 93(2): 216-231

(责任编辑: 刘希国)

AN EFFICIENT SOLUTION FOR 2D RAYLEIGH-BÉNARD CONVECTION USING FFT

Xu Wei Bao Yun¹⁾

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract The computation efficiency of direct numerical simulation (DNS) for Rayleigh-Bénard (RB) convection in rectangular containers is studied. For unsteady flow of RB convection, the solution of pressure Poisson's equation is a key issue affecting the computation efficiency in the whole solving process. Combined with fast Fourier transform (FFT) and chase method, a direct solution of pressure Poisson's equation is presented. Comparing the precision and speed with hopscotch overrelaxation iteration, it is found that the direct solution of pressure poisson equation for RB convection using FFT is efficient. The results of temperature fields for the plume and the large scale circulation, and the change of Nu number for series Ra numbers are given.

Key words Rayleigh-Bénard convection, FFT, direct solution of Poisson's equation, DNS