

基于重要样本法的结构动力学系统的首次穿越¹⁾

任丽梅^{*,2)} 徐 伟^{*} 肖玉柱[†] 王文杰[†]

^{*}(西北工业大学理学院, 西安 710072) [†](长安大学理学院, 西安 710064)

摘要 基于 Girsanov 定理, 提出一种估计稳态高斯白噪声激励的结构动力学系统首穿失效概率的重要样本法. 文章重点是构造控制函数, 控制函数促使随机响应尽量集中在样本空间中最易导致首次穿越发生的部分. 利用设计点构造控制函数, 在线性系统场合, 结合时不变系统的结构可靠性理论, 通过解有约束的优化问题得到设计点; 在非线性系统场合, 利用 Heonsang Koo 提出的设计点激励, 通过镜像法得到设计点. 最后给出例子, 将所提方法与原始蒙特卡罗法相比较, 模拟结果显示方法的正确性与有效性.

关键词 首穿失效概率, 重要抽样法, 设计点激励, 镜像法

中图分类号: O324 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2012)03-0648-05

引 言

近年来, 在地震、桥梁工程等领域中动力学系统的结构可靠性一直是研究热点, 而受到诸如地震、风及海浪等随机激励的动力学系统的首次穿越失效更是研究的焦点之一. 首次穿越失效概率(简称: 首穿失效概率)是衡量结构安全性的重要指标, 是指在某个时间段内结构响应首次超过指定安全域边界的概率. 尽管这个问题已得到高度重视, 但仍是结构安全性分析中最具挑战性的问题之一, 因为直到现在即使是最简单的线性振子场合也无可利用的精确解. 研究者提出了许多近似方法: 随机平均法、累计量忽略法等^[1-5]. 近年来, 基于方差缩减技巧的蒙特卡罗法受到重视, 且重要抽样法^[6-18](importance sampling procedure, ISP)已被广泛应用, 但大部分研究都是在时不变系统场合; 对于时变系统, 1994年 Newton^[6]提出基于 Girsanov 定理^[7]的概率测度变换的重要样本法, Tanaka^[8]将此法成功地应用到了裂纹增长问题中, 自此该法成为研究首穿问题的重要手段之一. 基于 Girsanov 定理的重要样本法可以描述为一种控制样本路径的方法: 样本被集中在样本空间中最重要部分, 而非均匀分布在样本空间中. 然而选择怎样的控制函数达到这样的目的才是最关键的.

本文结合时不变系统的结构可靠性理论与 Koo

等^[9]提出的设计点激励, 利用设计点构造控制函数, 在稳态高斯白噪声激励的线性系统场合, 通过解有约束的优化问题得到设计点的解析表达式; 在非线性系统场合, 利用镜像法^[9]得到设计点激励. 模拟结果显示了方法的正确性与有效性.

1 问题描述

假设当 $s \leq t < T$, 结构动力学系统的响应是一个 p 维向量 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_p(t))^T$, 且满足 Itô 随机微分方程

$$dX_i(t) = m_i(t, \mathbf{X})dt + \sum_{j=1}^q \sigma_{ij}(t, \mathbf{X})dW_j(t) \quad (1)$$

初始条件 $X_i(s) = x_i$, $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_q(t))^T$ 是具有概率测度 P 的标准 Wiener 过程.

定义系统的安全域是 $D_s \in \mathbf{R}^p$, D_s 是给定集合, 本文讨论常数边界.

系统可靠性为

$$P_s(T) = P(E_s) \quad (2)$$

其中, $E_s = \{\omega : \mathbf{X}(t) \in D_s, \forall t, s \leq t \leq T\}$.

首穿失效概率为

$$P_f(T) = 1 - P_s(T) = 1 - \int_{E_s} dP = \int_{\Omega} I[g(\mathbf{X})]dP = E_P\{I[g(\mathbf{X})]\} \quad (3)$$

2011-10-19 收到第 1 稿, 2011-12-28 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10872165, 10932009, 11172233).

2) E-mail: renlm1014@126.com

其中 $I[g(\mathbf{X})]$ 是示性函数 $I[g(\mathbf{X}, \varpi)] = \begin{cases} 1, & x \notin D_s \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 在原始蒙特卡罗法 (crude M-C) 中, 首穿失效概率的估计是统计平均 $\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(x^i)]$, x^i 表示 $\mathbf{X}(t)$ 的第 i 个样本, N 是样本容量, 则估计的变异系数为 $e = \frac{\sqrt{\text{Var}(\hat{P}_f)}}{E\hat{P}_f} = \frac{1}{\sqrt{N\hat{P}_f}}$. 为了缩减样本方差, 据 Girsanov 定理, 引入 $\tilde{\mathbf{W}}(t)$, 满足 $\tilde{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{W}(t) - \int_s^t \mathbf{v}(\tau, \varpi) d\tau$, $s \leq t \leq T$, 其中 $\mathbf{v}(\tau, \varpi)$ 是实值非可料过程, 满足 Novikov 条件 $E\left[\exp\left(\frac{1}{2} \int_s^T \|\mathbf{v}(\tau, \varpi)\|^2 d\tau\right)\right] < \infty$. $\tilde{\mathbf{W}}(t)$ 的概率测度为 \tilde{P} 且关于 P 绝对连续. 则原 Itô 方程为

$$\left. \begin{aligned} d\tilde{X}_i(t) &= m_i(t, \tilde{\mathbf{X}})dt + \\ &\left. \begin{aligned} &\sum_{j=1}^q \sigma_{ij}(t, \tilde{\mathbf{X}})v_j(t, \varpi)dt + \\ &\sum_{j=1}^q \sigma_{ij}(t, \tilde{\mathbf{X}})d\tilde{W}_j \end{aligned} \right\} \quad (4) \\ \tilde{X}_i(s) &= x_i \end{aligned}$$

且 P 与 \tilde{P} 满足 Radon-Nikodym 导数

$$\frac{dP}{d\tilde{P}} = \exp\left[-\int_s^T \mathbf{v}^T(\tau, \tilde{\mathbf{X}})d\tilde{\mathbf{W}} - \frac{1}{2} \int_s^T \|\mathbf{v}(\tau, \varpi)\|^2 d\tau\right] \quad (5)$$

则在确定的初始条件下, 基于概率测度 \tilde{P} 的首穿失效概率的估计为: $\hat{P}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I[g(\tilde{x}^i)] \left(\frac{dP}{d\tilde{P}}\right)^i$, $\left(\frac{dP}{d\tilde{P}}\right)^i$ 表示第 i 个样本所产生的值.

据文献 [10-11], 当 $J = E_{\tilde{P}}\left\{I[g(\tilde{\mathbf{X}})]\frac{dP}{d\tilde{P}}\right\}^2$ 最小时, 最优控制为

$$v_j^*(t, \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{P_f} \sum_{i=1}^p \sigma_{ij}(t, \tilde{\mathbf{X}}) \frac{\partial P_f}{\partial \tilde{X}_i}$$

由于在最优控制中含有未知的首穿失效概率 P_f , 则最优控制其实是不可达到的.

2 构造次最优控制

将随机微分方程 (1) 离散化, 将 $[s, T]$ 分为 n 等份, $\Delta t = \frac{M-s}{n}$, 且 $t_k = s + k\Delta t$, $k = 0, 1, \dots, n$,

则

$$X_i(t_{k+1}) = X_i(t_k) + m_i(t_k, \mathbf{X})\Delta t + \sum_{j=1}^q \sigma_{ij}(t_k, \mathbf{X})\Delta W_j(t_k) \quad (6)$$

据文献 [12] 令 $\Delta W_j(t_k) = \sqrt{\Delta t}U_{jk}$, 其中 U_{jk}^* 是相互独立标准正态随机变量, $j = 1, 2, \dots, q$; $k = 0, 1, \dots, n-1$. 则式 (3) 为

$$P_f(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} I[g(\mathbf{X})]\varphi(z)dz \quad (7)$$

$\varphi(\cdot)$ 是 qn 维的标准正态随机变量的密度函数. 在 t_k 时刻, 假设极限状态面为 $G(t_k, X) = 0$, 据时不变结构可靠性理论, 求解设计点即是求解下式

$$\min \beta(t_k) = \left(\sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{n-1} U_{jk}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

设所得设计点为 U_{jk}^* , 则构造次最优控制函数 [12-13]

$$v_j^*(t_k, \tilde{\mathbf{X}}) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}U_{jk}^* \quad (9)$$

由方程 (4) 和 (9), 则方程 (7) 可为

$$P_f(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} I[g(\mathbf{X})] \frac{\varphi(\tilde{z})}{h(\tilde{z})} h(\tilde{z})d\tilde{z} \quad (10)$$

据文献 [14], 构造重要抽样密度函数

$$h(\tilde{z}) = \frac{\Phi(-\beta(t_k))}{\sum_{k=0}^{n-1} \Phi(-\beta(t_k))} h(\tilde{z}, t_k)$$

其中

$$h(\tilde{z}, t_k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{qn}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{n-1} (\tilde{z} - U_{jk}^*)^2\right]$$

且 Radon-Nikodym 导数的离散表示式为

$$\left(\frac{dP}{d\tilde{P}}\right)_{t_k} = \exp\left\{-\sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{n-1} v_j^*(t_k)\Delta W_j(t_k) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{n-1} (v_j^*(t_k))^2 \Delta t\right\} \quad (11)$$

3 算例及分析

3.1 线性系统

线性振子方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}(t) + 2\eta\dot{X}(t) + X(t) &= \sqrt{4\eta}W(t), \\ X(0) = \dot{X}(0) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq t \leq T$$

$W(t)$ 为零均值的高斯白噪声, η 为黏滞阻尼系数, $E[W(t)W(t+\tau)] = \delta(\tau)$, x_c 为临界阈值, 系统的安全域是 $D_s\{(x, \dot{x}) : |x| < x_c, \dot{x} \in R\}$.

系统 Itô 方程为

$$dX_1(t) = X_2(t)dt$$

$$dX_2(t) = [-X_1(t) - 2\eta X_2(t)]dt + \sqrt{4\eta}dW(t)$$

系统响应可为^[14]

$$X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{2\pi s_k \Delta t} U_k h(t - k\Delta t)$$

式中, s_k 为 $W(t)$ 的单边谱密度, 取常数 $s_k = 4\eta/2\pi$, $h(\cdot)$ 为单位脉冲响应函数(格林函数), $h(t) = \frac{1}{\varpi} \exp(-\eta t) \sin(\varpi t)$, $\varpi = \sqrt{1 - \eta^2}$. 解式(10)得设计点为

$$U_{n,k}^* = \frac{x_c \sqrt{2\pi s_k \Delta t}}{\sigma^2(t_n)} h(t_n - t_k)$$

其中 $\sigma^2(t_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 4\eta \Delta t h^2(t_n - t_k)$.

将本文方法与原始的蒙特卡罗模拟法相比较.

图1显示了 $\Delta t = 0.05$, 临界阈值为 4, $T = 50$ s 时的控制函数. 图2是 $\Delta t = 0.05$ 时的加控制函数时与不加控制函数时的系统响应比较图, 可看出在 15s 之前两者几乎没有明显的差别, 在 30s 之后由于控制函数的影响, 系统脱离了自己的固有频率, 在大概 41s 时首次超越临界阈值 4. 图3是本文方法(虚线 $N = 10^3$)与原始的蒙特卡罗模拟(实线 $N = 10^6$)比较图, 显示了两者的吻合, 说明本文方法对于线性系统的有效性.

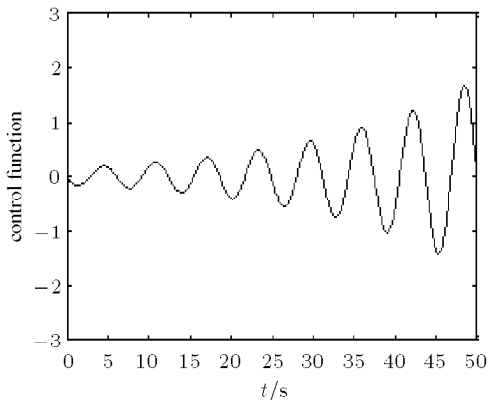


图1 线性系统在 $T = 50$ s, $\Delta t = 0.05$, $x_c = 4$ 时的控制函数

Fig.1 Control function of linear system at $T = 50$ s,

$$\Delta t = 0.05, x_c = 4$$

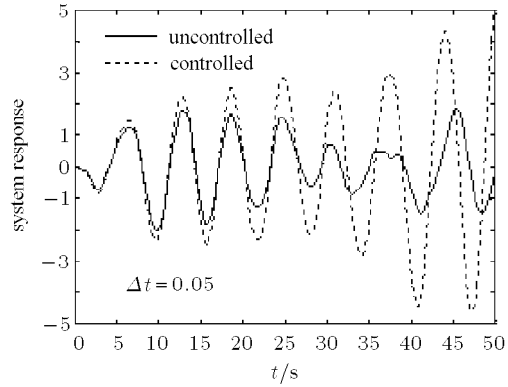


图2 系统响应的比较图

Fig.2 The response of the linear system comparison chart

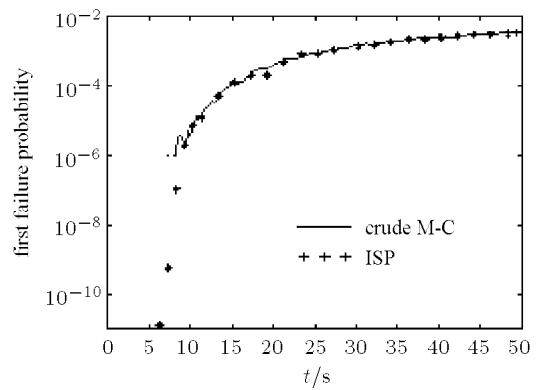


图3 首穿失效概率模拟比较图

Fig.3 The first r failure probability simulation comparison chart

3.2 非线性系统

非线性振子方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}(t) + 2\eta\dot{X}(t) + X(t) + \varepsilon X(t)^3 = \\ \sqrt{4\eta}W(t), \quad 0 \leq t \leq T \\ X(0) = \dot{X}(0) = 0, \end{aligned} \right\}$$

其中, $W(t)$ 为零均值的高斯白噪声, $E[W(t)W(t+\tau)] = \delta(\tau)$, η 为黏滞阻尼系数, 系统安全域 $D_s = \{(x, \dot{x}) : |x| < x_c, \dot{x} \in R\}$. 利用文献 [9] 中研究结果: 稳态高斯白噪声激励的非线性系统, 设计点激励是自由振动方程的镜像激励. 据文献 [9] 设计点激励为

$$f_1(t) = -4\eta \cdot \dot{X}_F(\tau - t), \quad 0 < \tau < 50$$

设计点为

$$U^* = f_1(t)/\sqrt{4\eta}$$

其中, $X_F(t)$ 是 $\ddot{X}_F(t) + 2\eta\dot{X}_F(t) + X_F(t) + \varepsilon X_F(t)^3 = 0$ 满足 $X_F(0) = x_c, \dot{X}_F(0) = 0$ 的解.

图 4 是非线性系统在 $\tau = 50\text{s}$, $\Delta t = 0.05$, $x_c = 2$ 时的控制函数, 实线是非线性参数 $\varepsilon = 1$, 虚线是 $\varepsilon = 3$. 图 5 是 $\Delta t = 0.05$ 时非线性系统加控 (虚线) 与未加控 (实线) 的系统响应比较图, 可看到在 25s

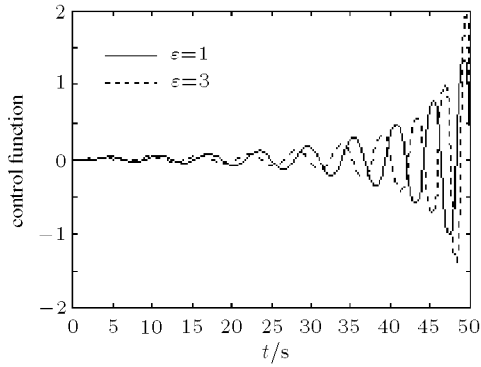


图 4 非线性系统的控制函数

Fig.4 Control function of nonlinear system

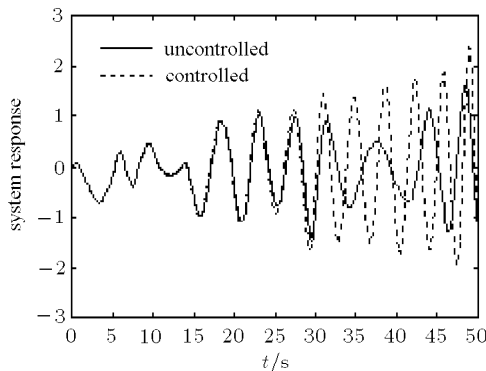


图 5 非线性系统加控 (虚线) 与未加控 (实线) 的系统响应的比较图 $\Delta t = 0.05$

Fig.5 The response of the nonlinear system comparison chart, step is $\Delta t = 0.05$

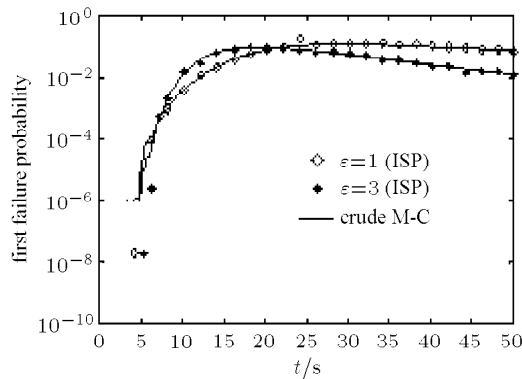


图 6 首穿失效概率模拟比较图

Fig.6 The first failure probability simulation comparison chart

之前两者没有明显的区别, 之后控制函数逐渐显示出其作用, 在 47s 时使系统响应首次超越了临界阈值 2. 图 6 是本文方法 ($N = 10^3$) 与原始蒙特卡罗模拟 (实线 $N = 10^6$) 比较图. 图 6 显示本文方法与原始的蒙特卡罗模拟很好的吻合.

4 总 结

本文基于 Girsanov 定理, 提出一种估计稳态高斯白噪声激励的结构动力学系统首穿失效概率的重要样本法. 本文结合了时不变系统的结构可靠性理论, 设计点激励, Girsanov 变换等技巧, 并且用 Itô 随机微分方程表示动力学方程以方便 Girsanov 变换. 在稳态高斯白噪声激励的线性系统场合, 系统响应表示成单位脉冲响应函数与系统输入的解析表达式, 方便求出设计点, 将系统离散化后, 不同离散时刻的各设计点占据矩阵的一行. 在稳态高斯白噪声激励的非线性系统场合, 利用镜像法得到设计点. 不论是线性还是非线性系统, 控制函数均是时间终点 T 的函数, 对于不同时间终点只需简单替换 T 值. 文章将本文方法与原始蒙特卡罗法相比较, 模拟结果显示了本文方法的正确性与有效性.

参 考 文 献

- 1 Sun JQ, Hus CS. Cumulant-neglect closure method for nonlinear systems under random excitation. *Journal of applied Mechanics*, 1987, 54: 649-655
- 2 Socha L, Soong TT. Linearization in analysis of nonlinear stochastic systems. *Applied Mechanics Reviews*, 1991, 44: 399-422
- 3 Li Wei, Xu Wei. Stochastic optimal control of first passage failure for coupled Duffing-Van der Pol system under Gaussian white noise excitations. *Chaos Solitons & Fractal*, 2005, 25(5): 1221-1228
- 4 Li Wei, Xu Wei. First passage problem for strong nonlinear stochastic dynamical system. *Chaos Solitons & Fractal*, 2006, 28(2): 414-421
- 5 Zhu WQ, Wu YJ. First-passage time of duffing oscillator under combined harmonic and white-noise excitations. *Nonlinear Dynamics*, 2003, 32: 291-305
- 6 Newton NJ. Variance reduction for simulated diffusions. *SIAM J Appl Math*, 1994, 54(6): 1780-1805
- 7 Girsanov IV. On transforming a certain class of stochastic processes by absolutely continuous substitution. *Theory Probab Appl*, 1960, 5: 285-301
- 8 Tanaka H. An importance sampling simulation for a stochastic fatigue crack growth model. In: Proceedings of the Eighth International Conference on Applications of statistics and Probability. Sydney, Australia, 1999

- 9 Koo H, Der Kiureghian A, Fujimura K. Design-point excitation for non-linear random vibrations. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2005, 20: 136-147
- 10 Oksendal B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Application*. 5th edn. Berlin: Springer, 1998
- 11 Krylov N. *Controlled Diffusion Processes*. New York: Springer, 1980
- 12 Macke M, Bucher C. Importance sampling for randomly excited dynamical systems. *J Sound Vibration*, 2003, 268: 269-290
- 13 Olsen AI, Naess A. An importance sampling procedure for estimating failure probabilities of non-linear dynamic systems subjected to random noise. *Int J Non-linear Mech*, 2007, 42: 848-863
- 14 Au SK, Beck JL. First excursion probabilities for linear systems by very efficient importance sampling. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2001, 16: 193-207
- 15 Tanaka H. An importance sampling simulation scheme for time-dependent system reliability analyses using the Girsanov transformation. In: Proc ICOSSAR'97, 1998, 1: 411-418
- 16 Olsen AI, Naess A. An importance sampling procedure for estimating failure probabilities of non-linear dynamic systems subjected to random noise. *Int J Non-linear Mech*, 2007, 42: 848-863
- 17 Pradlwarter HJ. Excursion probabilities of non-linear systems. *Int J Non-Linear Mech*, 2004, 39: 1447-1452
- 18 Ogawa J, Tanaka H. Importance sampling for stochastic systems under stationary noise having a specified power spectrum. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24: 537-544

CNKI 优先出版编码: lxxb2011-298-20120111

(责任编辑: 刘希国)

FIRST EXCURSION PROBABILITIES OF DYNAMICAL SYSTEMS BY IMPORTANCE SAMPLING¹⁾

Ren Limei^{*,2)} Xu Wei^{*} Xiao Yuzhu[†] Wang Wenjie[†]

^{*}(College of Science Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

[†](College of Science Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract Based on the Girsanov transformation, this paper develops a method for estimating the first excursion probability of dynamical systems with stationary gauss white noise. The focus is to construct control function that concentrates on the samples paths in the “most important part” of the sample space, to achieve the purpose of variance reduction. The paper uses design point to construct control function. For linear systems, the present approach combines with the time-invariant structure reliability theory to get design points by solving the problem of the optimization. For non-linear systems, the paper uses mirror-images method to get design points. Finally the paper gives two examples. The results show the method of this paper to be correct and effective by comparing with the primitive Monte Carlo method.

Key words first excursion probability, importance sampling, design-point excitation, mirror-image method

Received 19 October 2011, revised 28 December 2011.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (10872165,10932009,11172233).

2) E-mail: renlm1014@126.com