第 45 卷 第 5 期 力 学 学 报 Vol. 45，No. 5
2013 年 9 月 Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics Sep.，2013

研究论文

利用重正化群方法研究强旋转湍流的统计性质[1)]

王晓宏[2)] 周 全

(中国科学技术大学热科学和能源工程系，合肥 230026)

摘要 利用重正化群方法对强旋转湍流场统计性质予以研究，通过重正化微扰展开，对高波数速度分量进行逐阶平均. 计算结果显示当旋转角速度 $\Omega \to \infty$ 时，用以表征高波数速度分量对低波数速度分量影响的重正化黏性将趋于 0，这表明在强旋转条件下科氏力将抑制湍流速度分量之间的非线性相互作用，从而阻碍湍流的能量级串效应，当 $\Omega \to \infty$ 时湍流的能量级串效应消失，导致湍流脉动消失，流动将层流化. 理论计算结果还显示对于强旋转湍流，时域–空域联立 Fourier 的湍流速度分量存在二维化趋势，球面平均能谱函数有标度关系 $E(k) \propto k^{-3}$.

关键词 旋转湍流, 重正化群方法, 能量级串, 能谱函数

中图分类号：O357.5+1 **文献标识码：**A DOI：10.6052/0459-1879-13-047

引 言

旋转湍流在自然界与工程实际中广泛存在，在许多领域具有重要的研究价值，诸如地球物理中海洋和大气等受地球自转影响的大尺度流场以及旋转机械流场的研究等. 旋转效应会影响湍流的统计性质，湍流能量从大尺度向小尺度的传输过程被破坏，伴随着旋转角速度的增加，湍流涡黏性和能量耗散率均将减小 [1-3]. 旋转湍流能谱函数的标度律特性引起关注，Zeman[4] 基于拉格朗日观点分析旋转湍流雷诺应力 – 应变关系，认为旋转湍流能谱函数满足 $E(k) \propto k^{-11/5}$，随后 Zhou[5] 将旋转湍流和磁流体相类比，应用唯象分析认为旋转湍流能谱在强旋转条件下满足 $E(k) \propto k^{-2}$. 这一结果得到了一些数值模拟结果和理论结果的支持 [6-11]. 波湍流 (wave-turbulence) 理论在旋转湍流的研究中得到一系列的应用，基于波湍流理论的一些理论分析和数值模拟结果提出低 Rossby 数强旋转湍流的能谱函数满足 k^{-3} 标度律 [12-16]. 目前而言，对于强旋转湍流的能谱函数的标度律以及科氏力对旋转湍流中能量输运的影响机理还有待于进一步的深入研究.

重正化群方法被成功地应用于相变及临界现象的研究，随后在统计物理及相关的多个领域得到了广泛的应用. Forster，Nelson，Stephen (FNS) [17] 最先利用重正化群方法研究了 Gauss 分布随机力作用下的 Navier–Stokes (N–S) 方程的速度在大尺度，长时间的 $k \to 0, \omega \to 0$ 的红外渐进特性. Yakhot 等 [18] 在 FNS 等工作的基础上，系统地利用重正化群方法分析了湍流场. 并推导了剪切湍流的重正化群 K–ε 模型 [19-20]，目前该模型已被应用在 FLUENT 等计算流体软件中. Rubinstein 等利用 YO 湍流重正化群方法推导了剪切湍流非线性雷诺应力模型以及雷诺应力输运方程 [21-22].

一些特殊均匀湍流存在优先方向，流动并非各向同性，Rubinstein 等 [23] 利用重正化群方法分析了一种特定随机力作用下弱各向异性湍流场. 对于弱旋转湍流，可以发现重正化传播子与 Rubinstein 等文中的形式相同，并在此基础上研究了弱旋转湍流的统计性质 [24]. 上述工作中在数学上采用了近似处理，仅适用于弱旋转条件.

本文将利用重正化群方法分析强旋转湍流场，研究旋转角速度 $\Omega \to \infty$ 时湍流场的统计性质，之所以分析 $\Omega \to \infty$ 时的结果，是由于在此极限条件下，可以在数学上精确分析.

1 强旋转湍流的重正化群分析

1.1 动力学方程

近年来重正化群方法被广泛应用于处理各向同性湍流与剪切湍流 [17-27]. 重正化群方法假设不可压缩湍流速度满足随机力作用下的 N–S 方程

2013–02–08 收到第 1 稿，2013–03–14 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目 (10872192).

2) 王晓宏，教授，主要研究方向：湍流、渗流、计算流体力学. E-mail: xhwang@ustc.edu.cn

$$\frac{\partial u_l}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_l}{\partial x_j}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_l}+\nu_0\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j\partial x_j}+f_l \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0 \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{u}, p, \nu_0$ 分别代表速度，压力，密度和运动学黏度系数. 由于高斯型随机力 $\boldsymbol{f}$ 在实空间上的关联函数满足空间和时间上的平移不变性，对于不可压缩湍流，随机力 $\boldsymbol{f}$ 的时域–空域 Fourier 变换 $f_\alpha(\boldsymbol{k},\omega)$ 满足 $k_\alpha f_\alpha=0$，故其关联函数具有以下形式

$$\langle f_\alpha(\boldsymbol{k},\omega)f_\beta(\boldsymbol{k}',\omega')\rangle=2(2\pi)^{d+1}D(k)\cdot P_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})\delta(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')\delta(\omega+\omega') \tag{3}$$

其中, $P_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})=\delta_{\alpha\beta}-k_\alpha k_\beta/k^2$，$d$ 为空间维数，另外若将随机力谱 $D(k)$ 选取为 $D(k)=D_0k^{-y}$ ($y=d=3$)，可以得到湍流惯性子区域 Kolmogorov-5/3 律，这即为湍流重正化群理论中所谓的对应原理 (correspondence principle)[18].

对于旋转湍流，设其角速度为 $\varOmega$ 并平行于 x_3 方向，在旋转非惯性参照系下，含有随机力的 N–S 方程为

$$\frac{\partial u_l^*}{\partial t}+u_j^*\frac{\partial u_l^*}{\partial x_j^*}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x_l^*}+\nu_0\frac{\partial^2 u_\alpha^*}{\partial x_j^*\partial x_j^*}-2\varOmega\varepsilon_{l3j}u_j^*+f_l \tag{4}$$

式中, “*” 表示物理量为旋转参照系下的物理量. $p^*=p+\frac{1}{2}\rho\,\|\varOmega\times\boldsymbol{x}\|^2$ 为修正压力，为简单起见，后面将不再标注 “*”. 对速度 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ 在时间和空间上做 Fourier 变换

$$u_l(\boldsymbol{x},t)=\int_{k<\varLambda_0}u_l(\hat{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\frac{\mathrm{d}\hat{k}}{(2\pi)^{d+1}} \tag{5}$$

其中，$\hat{k}=(\boldsymbol{k},\omega)$; $\varLambda_0$ 是截断波数，为大于耗散波数的某个波数. 当波数大于耗散波数时，湍流能谱按指数衰减. 由此得到谱空间下的方程

$$u_l(\hat{k})=G_0(\hat{k})f_l(\hat{k})-2\varOmega\varepsilon_{\alpha3\beta}P_{l\alpha}(\boldsymbol{k})G_0(\hat{k})u_\beta(\hat{k})-\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda_0G_0(\hat{k})P_{lij}(\boldsymbol{k})\int_{q,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|<\varLambda_0}u_i(\hat{k}-\hat{q})u_j(\hat{q})\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \tag{6}$$

其中，$G_0(\hat{k})=(-\mathrm{i}\omega+\nu_0k^2)^{-1}$，$P_{lij}(\boldsymbol{k})=k_iP_{lj}(\boldsymbol{k})+k_jP_{li}(\boldsymbol{k})$，$P_{l\alpha}(\boldsymbol{k})=\delta_{l\alpha}-\frac{k_lk_\alpha}{k^2}$; λ_0 为微扰展开参数，设为 1. 由于旋转坐标系变换到笛卡尔坐标系的 Jacobian 矩阵是一个单位阵，因而所有的关联函数在惯性系与非惯性系下均具有同样的形式，式 (3) 中随机力的关联函数依然满足式 (6).

1.2 重正化群分析

对于重正化群方法，首先要逐步平均，以消去高波数对低波数的影响. 将速度 $\boldsymbol{u}$ 分为两部分：低波数部分 $\boldsymbol{u}^<(\boldsymbol{k},\omega)$，$k\in(0,\varLambda_0-\Delta\varLambda)$ 和高波数部分 $\boldsymbol{u}^>(\boldsymbol{k},\omega)$，$k\in(\varLambda_0-\Delta\varLambda,\varLambda_0)$，低波数和高波数速度分量分别满足方程

$$u_l^<(\hat{k})=G_0(\hat{k})f_j^<(\hat{k})-2\varOmega\varepsilon_{\alpha3\beta}P_{l\alpha}(\boldsymbol{k})G_0(\hat{k})u_\beta^<(\hat{k})-\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda_0G_0(\hat{k})P_{lij}(\boldsymbol{k})\int[u_i^>(\hat{k}-\hat{q})u_j^>(\hat{q})+2u_i^>(\hat{k}-\hat{q})u_j^<(\hat{q})+u_i^<(\hat{k}-\hat{q})u_j^<(\hat{q})]\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \tag{7}$$

$$u_l^>(\hat{k})=G_0(\hat{k})f_l^>(\hat{k})-2\varOmega\varepsilon_{\alpha3\beta}P_{l\alpha}(\boldsymbol{k})G_0(\hat{k})u_\beta^>(\hat{k})-\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda_0G_0(\hat{k})P_{lij}(\boldsymbol{k})\int[u_i^>(\hat{k}-\hat{q})u_j^>(\hat{q})+2u_i^>(\hat{k}-\hat{q})u_j^<(\hat{q})+u_i^<(\hat{k}-\hat{q})u_j^<(\hat{q})]\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}} \tag{8}$$

为消去高波数部分，将式 (7) 中所有的高波数速度 $\boldsymbol{u}^>$ 用式 (8) 代入，即对 λ_0 作微扰展开，保留到 $O(\lambda_0^2)$ 量阶，忽略 $u^>u^<u^<$ 以及 $u^>u^>u^>$ 项，可得

$$\left.\begin{aligned}&u_l^<(\hat{k})=G_0(\hat{k})f_j^<(\hat{k})-2\varOmega\varepsilon_{\alpha3\beta}P_{l\alpha}(\boldsymbol{k})G_0(\hat{k})u_\beta^<(\hat{k})-\\&\quad\frac{1}{2}\mathrm{i}\lambda_0G_0(\hat{k})P_{lij}(\boldsymbol{k})\int u_i^<(\hat{q})u_j^<(\hat{k}-\hat{q})\frac{\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{d+1}}-\\&\quad8\Big(\frac{\lambda_0}{2}\Big)^2P_{lij}(\boldsymbol{k})\iint_{\varLambda_0-\Delta\varLambda<q,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|<\varLambda_0}G_0(\hat{k}-\hat{q})P_{jmn}(\hat{k}-\hat{q})\\&u_i^>(\hat{q})u_m^>(\hat{p})u_n^<(\hat{k}-\hat{q}-\hat{p})\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}}+\lambda_0^2P_{lij}(\boldsymbol{k})\cdot\\&\quad\iint_{\varLambda_0-\Delta\varLambda<q,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|<\varLambda_0}\varOmega\varepsilon_{\alpha3\beta}P_{i\alpha}(\hat{q})G_0(\hat{q})P_{jmn}(\hat{k}-\hat{q})\cdot\\&\quad u_\beta^>(\hat{q})u_m^>(\hat{p})u_n^<(\hat{k}-\hat{q}-\hat{p})\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}}\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

为计算方便，将式 (9) 中的 $O(\lambda_0^2)$ 项分成 R_A 和 R_B 两项

$$R_A=-8\Big(\frac{\lambda_0}{2}\Big)^2P_{lij}(\boldsymbol{k})\iint_{\varLambda_0-\Delta\varLambda<q,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|<\varLambda_0}G_0(\hat{k}-\hat{q})\cdot P_{jmn}(\hat{k}-\hat{q})u_i^>(\hat{q})u_m^>(\hat{p})u_n^<(\hat{k}-\hat{q}-\hat{p})\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}} \tag{10}$$

$$R_B=\lambda_0^2\Omega P_{lij}(\boldsymbol{k})\iint_{\Lambda_0-\Delta\Lambda<q,|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|<\Lambda_0}\varepsilon_{\alpha 3\beta}\cdot$$
$$[G_0(\hat{k}-\hat{q})]^2P_{i\alpha}(\hat{k}-\hat{q})P_{\beta mn}\cdot$$
$$(\hat{k}-\hat{q})u_j^>(\hat{q})u_m^>(\hat{p})u_n^<(\hat{k}-\hat{q}-\hat{p})\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}}\qquad(11)$$

对式 (10) 和式 (11) 右边高波数速度 $\boldsymbol{u}^>$ 进行平均时，科氏力和非线性项之间出现耦合. 当旋转角速度 Ω 较小时，可以将科氏力项 $-2\Omega\varepsilon_{\alpha 3\beta}P_{l\alpha}(\boldsymbol{k})G_0(\hat{k})u_\beta^{(}\hat{k})$ 中的 $u_\beta(\hat{k})$ 用 $G(\hat{k})f_\beta(\hat{k})$ 予以近似，即 [23]

$$u_l^>(\hat{k})\approx G_0(\hat{k})f_l^>(\hat{k})-2G_0^2(\hat{k})\Omega\varepsilon_{a3b}P_{la}(\boldsymbol{k})f_b^>(\hat{k})+O(\lambda_0)\qquad(12)$$

将式 (12) 代入到式 (10) 和式 (11) 中，利用重正化群变换，对湍流高波数速度分量逐阶平均后再重新标度，然后进行重正化变换不动点分析，可以得到弱旋转下湍流能谱趋向 $k^{-11/5}$[24]. 而当旋转角速度 Ω 较大时，科氏力项中的速度项 $u_\beta(\hat{k})$ 不宜再用 $G(\hat{k})f_\beta(\hat{k})$ 予以近似. 联立求解方程组 (6) 可得

$$u_l(\hat{k})=\frac{G_0^{-1}(\hat{k})f_l(\hat{k})-2\Omega\varepsilon_{\alpha 3\beta}P_{la}(\boldsymbol{k})f_\beta(\hat{k})}{(G_0^{-1}(\hat{k}))^2+4\Omega^2\dfrac{k_3^2}{k^2}}+O(\lambda_0)\qquad(13)$$

上式将被用于计算高波数速度 $\boldsymbol{u}^>$ 平均的影响.

对高波数随机力分量 $\boldsymbol{f}^>$ 平均，利用关联函数 (3) 和方程 (13) 可得

$$R_A=-8(\frac{\lambda_0}{2})^2P_{lij}(\boldsymbol{k})\cdot$$
$$\iint\frac{G_0(\hat{k}-\hat{q})P_{jmn}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})u_n^<(\hat{k}-\hat{p}-\hat{q})}{\Big[(G_0^{-1}(\hat{q}))^2+4\Omega^2\dfrac{q_3^2}{q^2}\Big]\Big[(G_0^{-1}(\hat{p}))^2+4\Omega^2\dfrac{p_3^2}{p^2}\Big]}\cdot$$
$$\Big(G_0^{-1}(\hat{q})G_0^{-1}(\hat{p})\langle f_i^>(\hat{p})f_m^>(\hat{q})\rangle+$$
$$4\Omega^2\varepsilon_{\alpha 3\beta}\varepsilon_{\gamma 3\sigma}P_{i\alpha}(\boldsymbol{q})P_{m\gamma}(\boldsymbol{p})\cdot$$
$$\langle f_\beta^>(\hat{q})f_\sigma^>(\hat{p})\rangle-2\Omega G_0^{-1}(\hat{q})\varepsilon_{\gamma 3\sigma}P_{m\gamma}(\boldsymbol{p})\langle f_i^>(\hat{q})f_\sigma^>(\hat{p})\rangle-$$
$$2\Omega G_0^{-1}(\hat{p})\varepsilon_{\alpha 3\beta}P_{i\alpha}(\boldsymbol{q})\langle f_m^>(\hat{p})f_\beta^>(\hat{q})\rangle\Big)\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}}\qquad(14\mathrm{a})$$

$$R_B=-8(\frac{\lambda_0}{2})^2P_{lij}(\boldsymbol{k})\iint\varepsilon_{\alpha 3\beta}\cdot$$
$$\frac{[G_0(\hat{k}-\hat{q})]^2P_{i\alpha}(\hat{k}-\hat{q})P_{\beta mn}(\hat{k}-\hat{q})u_n^<(\hat{k}-\hat{p}-\hat{q})}{\Big[(G_0^{-1}(\hat{q}))^2+4\Omega^2\dfrac{q_3^2}{q^2}\Big]\Big[(G_0^{-1}(\hat{p}))^2+4\Omega^2\dfrac{p_3^2}{p^2}\Big]}\cdot$$
$$\Big[\Omega G_0^{-1}(\hat{q})G_0^{-1}(\hat{p})\langle f_j^>(\hat{p})f_m^>(\hat{q})\rangle+$$
$$4\Omega^3\varepsilon_{\gamma 3\sigma}\varepsilon_{\gamma' 3\sigma'}P_{m\gamma^*}(\boldsymbol{p})P_{j\gamma}(\boldsymbol{q})\langle f_\sigma^>(\hat{p})f_{\sigma'}^>(\hat{q})\rangle\Big]-$$
$$2\Omega^2G_0^{-1}(\hat{q})\varepsilon_{\gamma 3\sigma}P_{m\gamma}(\boldsymbol{p})\langle f_\sigma^>(\hat{p})f_j^>(\hat{q})\rangle-$$
$$2\Omega G_0^{-1}(\hat{p})\varepsilon_{\gamma 3\sigma}P_{j\gamma}(\boldsymbol{q})\langle f_m^>(\hat{p})f_\sigma^>(\hat{q})\rangle\Big]\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}}\qquad(14\mathrm{b})$$

由于计算相类似且较复杂，故本文仅给出 R_A 项的具体数学计算过程.

为计算方便，将 R_A 按式 (14a) 中右边被积函数分子中 Ω 的幂指数进行分类，分解成 $R_A^{(0)},R_A^{(1)},R_A^{(2)}$，分别对应于被积函数分子中的 $O(\Omega^0)$, $O(\Omega^1)$, $O(\Omega^2)$ 三部分. 利用关联函数式 (3)，对频率进行积分后，$R_A^{(0)}$ 为

$$R_A^{(0)}=-8(\frac{\lambda_0}{2})^2P_{lij}(\boldsymbol{k})\iint G_0(\hat{k}-\hat{q})\cdot$$
$$P_{jmn}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})u_n^<(\hat{k}-\hat{q}-\hat{p})\cdot$$
$$\frac{G_0^{-1}(\hat{q})G_0^{-1}(\hat{p})\langle f_m^>(\hat{p})f_i^>(\hat{q})\rangle}{\Big[(G_0^{-1}(\hat{q}))^2+4\Omega^2\dfrac{q_3^2}{q^2}\Big]\Big[(G_0^{-1}(\hat{p}))^2+4\Omega^2\dfrac{p_3^2}{p^2}\Big]}\frac{\mathrm{d}\hat{p}\mathrm{d}\hat{q}}{(2\pi)^{2d+2}}=$$
$$-\frac{8D_0}{(2\pi)^d}\lambda_0^2P_{lij}(\boldsymbol{k})u_n^<(\boldsymbol{k})\int_{\Lambda_0-\Delta\Lambda<|\boldsymbol{q}|<\Lambda_0}P_{im}(q)\cdot$$
$$P_{jmn}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q})q^{-y}\cdot$$
$$[2v_0^2q^4(vq^2+|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|^2)+4\Omega^2\frac{q_3^2}{q^2}v_0|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|^2]\Big/$$
$$\Big\{vq^2(v_0^2q^4+4\Omega^2\frac{q_3^2}{q^2})\Big[(v_0q^2+v_0|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|^2)^2+4\Omega^2\frac{q_3^2}{q^2}\Big]\Big\}\mathrm{d}q\qquad(15)$$

Yakhot–Orazag[18] 在处理上述积分时提出的方法是引入积分变换 $\boldsymbol{q}\to\boldsymbol{q}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{k}$，相应的积分区域由 $\{q\big|\Lambda_0-\Delta\Lambda<q<\Lambda_0,\Lambda_0-\Delta\Lambda<|\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}|<\Lambda_0\}$ 变为 $\{q\big|\Lambda_0-\Delta\Lambda<\Big|\boldsymbol{q}\pm\dfrac{1}{2}\boldsymbol{k}\Big|<\Lambda_0\}$，再利用 $\{q\,|\Lambda_0-\Delta\Lambda<q<\Lambda_0\}$ 取代上述积分区域. 注意到以上计算在数学上并不完备，因为这 2 组积分域并不等价，故本文中采用参考文献 [27] 中的做法，对被积函数在 $k=0$ 处作 Taylor 展开，展开到 k 的一阶项，利用连续性条件 $k_\alpha u_\alpha(k)=0$ 化简可得

$$R_A^{(0)}=-\frac{8D_0}{(2\pi)^d}\lambda_0^2P_{lij}(\boldsymbol{k})k_mu_n^<(\boldsymbol{k})\int_{\Lambda_0-\Delta\Lambda<q<\Lambda_0}\Big[P_{im}(\boldsymbol{q})\cdot$$
$$\Big(\delta_{jn}-2\frac{q_jq_n}{q^2}\Big)f_0(q,q_3)-\frac{1}{4}v^2q_mq_nq^2f_1(q,q_3)\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{q}\qquad(16)$$

从对称性可以得到 $R_A^{(1)}=0$. $R_A^{(2)}$ 的计算过程如下

$$R_A^{(2)}=-\frac{8D_0}{(2\pi)^d}\lambda_0^2\varOmega^2\varepsilon_{\alpha3\beta}\varepsilon_{\gamma3\sigma}P_{lij}(\boldsymbol{k})k_m u_n^<(\boldsymbol{k})\cdot \int_{\varLambda_0-\Delta\varLambda<q<\varLambda_0}\Big[\frac{3}{4}\Big(\delta_{jn}-2\frac{q_jq_n}{q^2}\Big)\Big(\delta_{i\alpha}\delta_{\beta\sigma}\delta_{m\gamma}-\delta_{i\alpha}\delta_{\beta\sigma}\cdot \frac{q_mq_\gamma}{q^2}-\delta_{m\gamma}\delta_{\beta\sigma}\frac{q_iq_\alpha}{q^2}-\delta_{i\alpha}\delta_{m\gamma}\frac{q_\beta q_\sigma}{q^2}+\delta_{\beta\sigma}\frac{q_iq_\alpha q_mq_\gamma}{q^4}\Big)\cdot f_1(q,q_3)-\frac{q_mq_n}{q^2}\Big(\delta_{jc}\delta_{i\alpha}\delta_{\beta\sigma}-\delta_{j\gamma}\delta_{i\alpha}\frac{q_\beta q_\sigma}{q^2}- \delta_{j\gamma}\delta_{\beta\sigma}\frac{q_iq_\alpha}{q^2}-\delta_{i\alpha}\delta_{\beta\sigma}\frac{q_jq_\gamma}{q^2}+\delta_{\beta\sigma}\frac{q_iq_\alpha q_jq_\gamma}{q^4}\Big)\cdot \Big(6f_2(q,q_3)-\frac{1}{2}f_1(q,q_3)\Big)\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{q} \tag{17}$$

其中 $f_0(q,q_3)$, $f_1(q,q_3)$ 和 $f_2(q,q_3)$ 分别为

$$f_0(q,q_3)=q^{-y}\Big/\Big(\nu_0^2q^4+4\varOmega^2\frac{q_3^2}{q^2}\Big)$$

$$f_1(q,q_3)=q^{-y}\Big/\Big[\Big(\nu_0^2q^4+4\varOmega^2\frac{q_3^2}{q^2}\Big)\Big(\nu_0^2q^4+\varOmega^2\frac{q_3^2}{q^2}\Big)\Big]$$

$$f_2(q,q_3)=\nu_0^2q^{4-y}\Big/\Big[\Big(\nu_0^2q^4+4\varOmega^2\frac{q_3^2}{q^2}\Big)\Big(\nu_0^2q^4+\varOmega^2\frac{q_3^2}{q^2}\Big)^2\Big]$$

对于 $\int f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}$, $\int\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}$ 以及 $\int\frac{q_\alpha q_\beta q_\gamma q_\delta}{q^4}f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}$ 形式的积分 ($i=0,1,2$), 通过球坐标变换，当 $\varOmega\to\infty$ 时有：

(1) $\int f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}\sim O(\varOmega^{-1})$；

(2) 而 $\int\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}$ 与 $\int\frac{q_\alpha q_\beta q_\gamma q_\delta}{q^4}f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}$ 形式的积分，仅当两两相等时才不为 0. 此时若下标出现 3，量阶为或低于 $O(\varOmega^{-3})$；而下标不出现 3 时，即 $\alpha,\beta,\gamma,\sigma\neq3$ 时，有

$$\lim_{\varOmega\to\infty}\int\frac{q_\alpha q_\beta}{q^2}f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\frac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\lim_{\varOmega\to\infty}\int f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q} \tag{18}$$

$$\lim_{\varOmega\to\infty}\int\frac{q_\alpha q_\beta q_\gamma q_\delta}{q^4}f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}=\frac{1}{8}\delta_{\alpha\beta\gamma\sigma}\lim_{\varOmega\to\infty}\int f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q} \tag{19}$$

其中 $\delta_{\alpha\beta\gamma\sigma}=\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\sigma}+\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\sigma}+\delta_{\alpha\sigma}\delta_{\beta\gamma}$ $(\alpha,\beta,\gamma,\sigma=1,2)$.

由式 (17) ~ 式 (19) 可得：当 $\varOmega\to\infty$ 时，$R_A^{(0)}\sim O(\varOmega^{-1})$, 即 $R_A^{(0)}\to0$. 在利用球形变换计算 $R_A^{(2)}$ 的过程中，$\varOmega^2\int\frac{q_aq_b}{q^2}f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}$ 与 $\varOmega^2\int\frac{q_aq_bq_cq_d}{q^4}f_i(q,q_3)\mathrm{d}\boldsymbol{q}$ 形式的积分，其下标中若出现 3 时，量阶为或低于 $O(\varOmega^{-1})$，可以忽略，而下标 a,b,c,d 仅取 1 或 2 时，量阶为 $O(\varOmega)$，通过一系列的计算可以发现，由于内在对称性，$R_A^{(2)}$ 中的 $O(\varOmega)$ 量阶项将相互抵消，即当 $\varOmega\to\infty$ 时，$R_A^{(2)}\to0$，故有

$$R_A\to0 \tag{20}$$

式 (14b) 中 R_B 的计算过程和上述对于 R_A 的计算相类似，本文予以忽略，同样可得

$$R_B\to0 \tag{21}$$

计算结果式 (20) 和式 (21) 表明，当旋转角速度 $\varOmega\to\infty$ 时，对高波数速度分量 $\boldsymbol{u}^>(\boldsymbol{q},\omega)$ $(q\in(\varLambda_0-\Delta\varLambda,\varLambda_0))$ 平均过程中将不产生附加黏性，即

$$\Delta\nu_0\to0 \tag{22}$$

这样对波数 $q>k$ 范围内的高波数速度分量逐阶平均时，高波数速度分量将不会低波数速度分量产生影响，即重正化黏度和流体的动力黏度相等

$$\nu(k)=\nu_0 \tag{23}$$

取 λ_0 的零次项近似，由式 (13) 和式 (23) 可得，湍流速度近似为

$$u_l(\hat{k})=\frac{G_0^{-1}(\hat{k})f_l(\hat{k})-2\varOmega\varepsilon_{\alpha3\beta}P_{l\alpha}(\boldsymbol{k})f_\beta(\hat{k})}{(G_0^{-1}(\hat{k}))^2+4\varOmega^2\frac{k_3^2}{k^2}} \tag{24}$$

1.3 强旋转湍流的物理特性

在上节的理论推导中，得到当 $\varOmega\to\infty$ 时重正化黏度和流体动力黏度相等，该数学结果的物理意义为：对于强旋转湍流，科氏力将对非线性能量输运起阻碍作用，当 $\varOmega\to\infty$ 时，湍流的能量级串效应消失. 在湍流重正化群方法中，引入满足关联函数 (3) 的高斯型随机力 $\boldsymbol{f}$，用以表征流场边界或大尺度涡通过能量级串向湍流小尺度涡输入能量，这样当 $\varOmega\to\infty$ 时，随机力 $\boldsymbol{f}$ 的强度将趋于 0，即 $\varOmega\to\infty$ 时，应有 $D_0\to0$，即湍流脉动消失，流动将层流化.

对于强旋转湍流，即旋转角速度 $\varOmega$ 较大时，由方程 (24) 可得：$k_3\neq0$ 时，$u_l(\hat{k})\to0$；$k_3=0$ 时，$u_l(\hat{k})\approx G_0(\hat{k})f_l(\hat{k})$，从而表明湍流时域 – 空域 Fourier 速度 $u_l(\hat{k})$ 将呈现二维化趋势.

湍流速度的关联函数为

$$V_{lj}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{\langle u_l(\boldsymbol{k},\omega)u_j(\tilde{\boldsymbol{k}},\tilde{\omega})\rangle}{(2\pi)^{d+1}\delta(\boldsymbol{k}+\tilde{\boldsymbol{k}})\delta(\omega+\tilde{\omega})} \tag{25}$$

这样对于关于时间和空间联立的能量密度函数 $E(\boldsymbol{k},\omega)$ 有

$$E(\boldsymbol{k},\omega)=V_{ll}(\boldsymbol{k},\omega)=$$
$$\frac{1}{\left[\left(G_0^{-1}(\hat{k})\right)^2+4\Omega^2\frac{k_3^2}{k^2}\right]\left[\left(G_0^{-1}(-\hat{k})\right)^2+4\Omega^2\frac{k_3^2}{k^2}\right]}\cdot$$
$$\left\langle\left[G_0^{-1}(\hat{k})f_l^{>}(\hat{k})-2\Omega\varepsilon_{\alpha3\beta}P_{l\alpha}(\boldsymbol{k})f_\beta^{>}(\hat{k})\right]\cdot\right.$$
$$\left.\left[G_0^{-1}(-\hat{k})f_l^{>}(-\hat{k})-2\Omega\varepsilon_{\gamma3\sigma}P_{l\gamma}(-\boldsymbol{k})f_\sigma^{>}(-\hat{k})\right]\right\rangle=$$
$$4D_0(2\pi)^{d+1}\frac{(\omega^2+\nu_0^2k^4)k^{-3}+4\Omega^2k_3^2k^{-5}}{\left(\nu_0^2k^4+4\Omega^2\frac{k_3^2}{k^2}-\omega^2\right)^2+4\omega^2\nu_0^2k^4} \tag{26}$$

从式 (26) 可以明显地看出，当 $k_3=0$ 时，$E(k_1,k_2,k_3,\omega)=4D_0(2\pi)^{d+1}k^{-3}/(\omega^2+\nu_0^2k^4)$，而当旋转角速度 $\Omega\to\infty$ 时，且 $k_3\neq0$ 时，能量密度 $E(k_1,k_2,k_3,\omega)\to O(D_0/\Omega^2)$，即能量密度在 $k_3\neq0$ 处将迅速下降，这同样意味着对于强旋转湍流，能量密度向 $k_3=0$ 集中，出现二维化趋势. 做球坐标变换：$k_1=k\cos\varphi\sin\theta$，$k_2=k\sin\varphi\sin\theta$，$k_3=k\cos\theta$ ($\varphi\in[0,2\pi]$，$\theta\in[0,\pi]$)，并对频率积分，由式 (44)，可以得到球面平均能谱函数为

$$E(k)=4D_0(2\pi)^{d+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\infty}^{\infty}\cdot$$
$$\frac{(\omega^2+\nu_0^2k^4)k^{-3}+4\Omega^2\cos^2\theta k^{-3}}{[G_0(k)^2+4\Omega^2\cos^2\theta][G_0(-k)^2+4\Omega^2\cos^2\theta]}\mathrm{d}\omega=$$
$$4D_0(2\pi)^{d+1}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-\infty}^{\infty}\cdot$$
$$\frac{(\omega^2+\nu_0^2k^4)k^{-3}+4\Omega^2k^{-3}\cos^2\theta}{(\nu_0^2k^4+4\Omega^2\cos^2\theta-\omega^2)^2+4\Omega^2\nu_0^2k^4}\mathrm{d}\omega=$$
$$(2\pi)^{d+1}\frac{8D_0}{\nu_0k^{-3}} \tag{27}$$

即对于强旋转湍流，球面平均能谱函数 $E(k)\propto k^{-3}$，该结果和参考文献 [12-16] 的理论分析及数值计算结果相一致.

2 结 论

本文利用重正化群方法对旋转角速度 $\Omega\to\infty$ 的极限情况下强旋转湍流场予以分析，理论分析结果可以总结为：

(1) 科氏力将抑制湍流速度分量之间的非线性相互作用，这一点和各向同性湍流完全不同. 它的表现为在对高波数速度分量平均过程中，将不产生重正化黏性，等价于湍流涡黏性趋于 0，这表明湍流的能量级串效应消失，从而导致湍流脉动消失，流动将层流化；

(2) 对于强旋转湍流，即旋转角速度 Ω 较大时，时域 - 空域联立 Fourier 速度分量存在二维化趋势，时域–空域联立能量密度向 $k_3=0$ 处集中；

(3) 旋转角速度 Ω 较大时，球面平均能谱函数有标度关系 $E(k)\propto k^{-3}$.

对于均匀各向同性湍流，Yakhot 等对随机力作用下的 N–S 方程进行直接数值模拟，验证重正化群分析结果的正确性 [28]，利用直接数值模拟验证强旋转时随机力作用下 NS 方程的重正化群分析结果，有待于进一步的研究. 本文仅分析了 $\Omega\to\infty$ 的极限情况下的强旋转湍流场统计性质，对于中等旋转角速度，由于科氏力的各向异性作用，理论计算非常复杂，如何利用重正化群方法分析旋转湍流的统计性质，有待于深入研究.

参 考 文 献

1 Speziale CG, Younis BA, Rubinstein R, et al. On consistency conditions for rotating turbulent flows. *Phys Fluids*, 1998, 22: 2108-2110

2 Greenspan HP. The Theory of Rotating Fluids, New York: Cambridge University Press, 1968

3 刘难生, 仲峰泉, 陆夕云等. 旋转圆管湍流的大涡模拟数值研究. 力学学报，2002, 34(6): 833-846 (Liu Nansheng, Zhong Fengquan, Lu Xiyun, et al. Large eddy simulation on turbulent flow in a pipe rorating about its axis. *Acta Mechanica Sinica*, 2002, 34(6): 833-846 (in Chinese))

4 Zeman O. A note on the spectra and decay of rotating homogeneous turbulence. *Phys Fluids*, 1994, 6(10): 3221-3223

5 Zhou Y. A phenomenological treatment of rotating turbulence. *Phys Fluids*, 1995, 7(8): 2092-2094

6 Mahalov A, Zhou Y. Analytical and phenomenological studies of rotating turbulence. *Phys Fluids*, 1996, 8(8): 2138-2152

7 Yeung PK, Zhou Y. Numerical study of rotating turbulence with external forcing. *Phys Fluids*, 1998, 10(11): 2895-2899

8 Baroudl CN, Plappl BB, She ZS, et al. Anomalous self-similarity in a turbulent rapidly rotating fluid. *Phy Rev Lett*, 2002, 88(11): 11450-11453

9 Thangam S, Wang XH, Zhou Y. Development of a turbulence model based on the energy spectrum for flows involving rotation. *Phys Fluids*, 1999, 11(8): 2225-2234

10 Canuto VM, Dubovikov MS. A dynamical model for turbulence. V. The effect of rotation. *Phys Fluids*, 1997, 9(7): 2132-2138

11 Rubinstein R, Zhou Y. The dissipation rate transport equation and subgrid-scale models in rotating turbulence. ICASE Report, 1997, 97-63: 1-11

12 Smith LM, Waleffe F. Transfer of energy to two-dimensional large scales in forced, rotating three-dimensional turbulence. *Phys Fluids*, 1999, 11(6): 1608-1622
13 Yang X, Domaradzki JA. Large eddy simulations of decaying rotating Turbulence. *Phys Fluids*, 2004, 16(11): 4088-4104
14 Smith LM, Lee Y. On near resonances and symmetry breaking in forced rotating flows at moderate Rossby number. *J Fluid Mech*, 2005, 535: 111-142
15 Bellet F, Godeferd FS, Scott JF. Wave turbulence in rapidly rotating flows. *J Fluid Mech*, 2006, 562(1): 83-121
16 Cambon C, Rubinstein R, Godeferd FS. Advances in wave turbulence rapidly rotating flows. *New J Phys*, 2004, 6(1): 73-101
17 Forster D, Nelson DR, Stephen MJ. Large-distance and long-time properties of a randomly stirred fluid. *Phys Rev A*, 1977, 16(2): 732-749
18 Yakhot V, Orszag SA. Renormalization-group analysis of turbulence. *Phys Rev Lett*, 1986, 57(14): 1722-1724
19 Yakhot V, Orszag SA, Thangum S, et al. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Phys Fluids A*, 1992, 4: 1510-1520
20 Yakhot V, Smith LM. The Renormalization group, the ε-expansion and derivation of turbulence models. *J Sci Comput*, 1992, 7: 35-61
21 Rubinstein R, Barton JM. Nonlinear Reynolds stress models and the renormalization group. *Phys Fluids A*, 1990, 2: 1472-1476
22 Rubinstein R, Barton JM. Renormalization group analysis of Reynolds stress transport equation. *Phys Fluids A*, 1992, 4: 1759-1766
23 Rubinstein R, Barton JM. Infrared properties of an anisotropically stirred fluid. *Phys Fluids*, 1987, 30(10): 2987-2992
24 Wang Xiao-Hong, Zhou Quan. The renormalization group analysis for weakly rotating turbulent flows. *Chin Phys Lett*, 2011, 28(12): 1247021-1247024
25 Carati D, Brenig L. Renormalization-group method for anisotropic turbulent transport. *Phys Rev A*, 1989, 40(9): 5193-5198
26 Zhou Y. Renormalization group theory for fluid and plasma turbulence. *Phys Rep*, 2010, 488(1): 1-49
27 Wang XH, Wu F. One modification to the Yakhot–Orszag calculation in the renormalization-group theory of turbulence. *Phys Rev E*, 1993, 48(1): R37-R38
28 Yakhot V, Orszag, SA, Panda R. Computational test of the renormalization group theory of turbulence. *J Sci Comput*, 1988, 3(2): 139-147

(责任编辑：周冬冬)

THE RENORMALIZATION-GROUP ANALYSIS FOR THE STATISTICAL PROPERTIES OF RAPIDLY ROTATING TURBULENCE [1)]

Wang Xiaohong[2)] Zhou Quan

(*Department of Thermal Science and Energy Engineering*，*University of Science and Technology of China*，*Hefei* 230026，*China*)

Abstract The statistical properties for rapidly rotating turbulence are investigated using the renormalization-group method. With the renormalized perturbation, the high wavenumber velocity components are taken to be average successively. The calculations show that the renormalized viscosity, which represents the influence of the high wavenumber velocity components upon the low wavenumber velocity components, tends to zero at the limit of the rotational angular velocity $\Omega \to \infty$. It indicates that the Coriolis force will impede the nonlinear interactions among different wavenumber velocity components. At the limit $\Omega \to \infty$, the turbulent energy cascade will diminish to zero. Consequently the flow tends towards laminarization as the turbulent fluctuations disappear. The calculations also show that the space-time Fourier velocity components tend to two-dimensionalization and the spherically averaged energy spectrum have the scaling behavior $E(k) \propto k^{-3}$ for rapidly rotating turbulence.

Key words rotating turbulence, the renormalization-group method, energy cascade, energy spectrum

Received 8 February 2013, revised 14 March 2013.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (10872192).

2) Wang Xiaohong, professor, research interests: turbulence, flows in porous media and computational fluid dynamics. E-mail: xhwang@ustc.edu.cn