

基于局部插值的结构动力模型降阶方法¹⁾

邓佳东 程耿东²⁾

(大连理工大学工程力学系, 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 提出了一种基于局部插值对大型结构有限元模型的特征值问题进行降阶的方法. 该方法通过局部插值将复杂结构的有限元模型中节点的位移用凝聚点的位移插值来表示, 从而得到用插值函数表示的简化基向量, 实现对结构广义特征值问题的降阶. 为了提高降阶模型的精度, 采用非协调元的插值函数作为局部插值函数来弱化凝聚后的结构刚度, 并且在有限元模型上进行迭代, 对得到的降阶后的广义特征值问题的特征值和特征向量进行改善. 为了提高模型降阶的效率, 采用规整网格包围整个结构生成均匀的凝聚点, 高效地确定了有限元模型中节点所依附的凝聚点. 最后, 对 3 个机床部件的模式分析验证了提出的简化方法的高效性和可行性.

关键词 模型降阶, 局部插值, 非协调元, 迭代

中图分类号: O39 文献标识码: A 文章编号: 0459-1879(2012)02-0342-09

引言

随着计算机软硬件的发展和工程分析要求的提高, 大型复杂结构的有限元模型自由度越来越多. 在现有的计算环境下虽然能完成这样的模型的静力分析, 但其动力学分析的计算工作量和存贮量通常远大于静力分析, 因此如何基于此类大型复杂结构的精细有限元模型建立一个能够近似预测结构动力性能, 满足工程计算要求的简化计算模型, 实现复杂结构的快速动力分析和优化, 成为结构动力学、控制论、数值分析等领域面临的新问题.

在结构动力学理论中, 将复杂模型降阶的方法有凝聚法、模态综合法、Ritz 基向量法、局部刚体运动降阶方法等, 可以参考文献 [1-2]. 其中凝聚法包括静凝聚^[3]、动凝聚^[4]以及对此两种凝聚方法的多种改进算法^[5-8]. 例如, 为了克服静凝聚法中无法考虑惯性力影响的缺点, 文献 [7] 采用主副自由度关系式的 Neumann 级数展开来考虑一阶惯性量影响, 以提高计算精度; 文献 [6] 利用动力缩聚矩阵的精确表达式构造迭代格式, 通过迭代对其进行修正以提高降阶模型的精度; 文献 [8] 利用并行和凝聚来加速子空间法求解速度. 凝聚方法需要通过删除 K_{ii}/M_{ii} 大的自由度^[9]、保留 $u_e^T K_e u_e / u_e^T M_e u_e$ 小的单元的自由度^[10]等原则^[11-14]来确定主自由度, 然后通过求

解方程或求逆建立能近似反映结构主、辅自由度之间关系的动力缩聚矩阵, 在动力缩聚矩阵列向量所构成的子空间中, 寻找原高阶模态向量的近似解, 达到降低计算模型阶数的目的. 模态综合法^[2,15]分为固定界面模态综合法和自由界面模态综合法. 模态综合法需要将结构划分为子结构, 求解得到子结构在相应边界条件下的自振模态和约束模态阵, 并消除其中不独立部分后形成动力缩聚矩阵. Ritz 基向量法^[16]通过求解静力方程不断扩充基向量, 拟静力 Ritz 基向量法^[17]将移轴和 Ritz 基向量法相结合, 可以提高 Ritz 基向量法的收敛速度, 但求解新的基向量时需要将移轴后的刚度阵重新做三角分解. 局部刚体运动降阶方法^[18-19]基于部件的刚体运动同步性假设, 得到了刚体位移转化阵构成动力缩聚矩阵, 并通过最小化近似振型与真实振型间的误差对应的结构应变能, 借助广义逆阵进一步提高动力缩聚矩阵中基向量组合对真实振型的逼近程度.

所有这些方法的共同特点是在有限元模型的位移向量所在的高维空间中构造一个由动力缩聚矩阵的列向量组成的低维空间子空间, 通过 Ritz-Galerkin 条件在低维子空间中寻找原高维模态向量的近似解. 但是凝聚法中需要选取主自由度并凝聚掉辅自由度, 模态综合法中需要求解子结构的自振

2011-09-22 收到第 1 稿, 2011-11-13 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金资助项目(50878038, 90816025).

2) E-mail: chenggd@dlut.edu.cn

模态和一系列静力方程, Ritz 法在生成基向量时需要将刚度阵做三角分解, 局部刚体运动降阶方法在修正基向量时也需要将刚度阵做三角分解, 这些都需要花费很多时间. 另外, 凝聚法中如何合理地选取主自由度、模态综合法中如何合理地剖分子结构、局部刚体运动简化方法如何合理地划分刚体同步性区域, 都需要人工干预, 其好坏程度直接影响着分析结果的优劣.

控制理论中模型降阶是很基本的问题, 因此发展了大量数值方法. 数值方法中流行的求解特征值问题的子空间方法是一种降阶法, 它包括了 Krylov 子空间方法^[20]、Jacobi-Davidson 迭代法^[21]等. 子空间方法是在子空间中寻找逼近解的方法, 包括子空间提取和子空间扩充两个步骤. Krylov 子空间方法包括 Lanczos 法和 Arnoldi 法等, 其分别通过 Lanczos 过程和 Arnoldi 过程生成 Krylov 子空间的正交基, 在 Krylov 子空间中寻找原高阶问题的近似解, 来达到降阶的目的. 但 Krylov 子空间方法在求解结构低阶特征值时需要做移轴和迭代, 需要精确求解一系列高阶静力方程以保证求得的向量属于 Krylov 子空间, 这就限制了其在求解大型结构低阶特征值时的应用. Jacobi-Davidson 迭代法也需要求解一系列高阶静力方程来扩展子空间, 但因为这些高阶静力方程不需要精确求解, 只需要在满足精度范围内进行少量迭代, 其相对于 Krylov 子空间法具有明显优势. 这些方法是直接针对特征值或者广义特征值方程进行求解的方法, 具有严格的数学基础, 可以证明解的收敛性并控制收敛精度, 但其得到的子空间基向量不具备明确的力学意义.

另外, 无论是结构动力学理论中还是数值方法中的降阶法, 其基向量(即动力缩聚矩阵的列向量)的选择均与结构刚度阵有关, 在结构优化等问题中, 结构刚度阵是和设计变量相关, 随设计的修改结构刚度阵发生改变, 因此基向量也需要重新形成. 局部刚体运动降阶方法中基于局部刚体运动假设得到的基向量是与设计变量无关的, 但是其基于变形修正后的基向量就与设计变量相关了. 在优化过程中, 每一迭代步都会对设计变量进行更新, 如果用于降阶的基向量与设计变量相关, 则每一迭代步开始时都需要重新生成该迭代步用于降阶的基向量, 这无疑会增加计算机负担.

综上所述, 寻找一种高效地形成动力缩聚矩阵的降阶方法、同时得到与设计变量无关的基向量来降低结构动力特性优化的时间, 显得尤为必要.

值得一提的是, 文献[22]中将结构划分为粗细两层有限元网格, 先在粗网格上求解规模较小的特征值问题, 得到具有较高精度的特征值和特征向量, 然后将求得的特征向量映射到细网格, 在细网格上进行一次迭代来改善粗网格上得到的特征值和特征向量. 这种方法可以用来改善降阶模型的精度. 但是此方法需要生成两层网格, 需要生成粗网格上的刚度阵, 并且较难判断细网格上的节点在哪个粗网格之内, 因此这一方法的应用受到了一定限制.

本文考虑到结构低阶模态的整体特性, 将有限元模型节点的位移通过其所依附的凝聚点的位移插值得到, 这样就得到了用插值函数表示的与设计变量无关的基向量. 另外基于拓扑优化的启示, 凝聚点的选取可以不在结构上, 这样可以利用结构的几何尺寸生成均匀的凝聚点, 一定程度上避免了人工干预, 并且可以高效地判断有限元模型节点所依附的凝聚点, 使基向量的形成几乎不花费计算机时. 为了提高降阶模型的精度, 采用非协调元的插值函数作为局部插值函数来弱化凝聚后的结构刚度, 并在有限元模型上进行迭代对得到的降阶后的广义特征值问题的特征值和特征向量进行改善. 最后本文通过数值算例验证了该方法的高效性和可行性.

1 基于局部插值的降阶方法

结构无阻尼自由振动方程为

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{u} \quad (1)$$

其中, \mathbf{K} 和 \mathbf{M} 分别为有限元模型的刚度阵和质量阵, λ 和 \mathbf{u} 分别为结构的特征值和特征向量. 若已知动力缩聚矩阵 \mathbf{N} , 且

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U} \quad (2)$$

其中, \mathbf{U} 为降阶后结构的特征向量. 将式(2)带入式(1)得

$$\mathbf{K}_R\mathbf{U} = \lambda\mathbf{M}_R\mathbf{U} \quad (3)$$

其中

$$\mathbf{K}_R = \mathbf{N}^T\mathbf{K}\mathbf{N}, \quad \mathbf{M}_R = \mathbf{N}^T\mathbf{M}\mathbf{N} \quad (4)$$

\mathbf{K}_R 和 \mathbf{M}_R 分别为降阶后结构的刚度阵和质量阵.

从以上降阶过程可见模型降阶的关键是构造动力缩聚矩阵 \mathbf{N} . 为了利用局部插值函数构造动力缩聚矩阵 \mathbf{N} , 需要生成凝聚点、并将有限元模型节点的位移用其所依附的凝聚点的位移插值表示. 下面

讨论凝聚点的生成、动力缩聚矩阵 N 的构造和插值函数的选取.

1.1 凝聚点的生成

凝聚点的生成需满足两个条件: 一方面, 为了提高降阶模型对原有限元模型的近似程度, 凝聚点要均匀分布在结构上, 并且对于有关的结构模态, 变形大的地方凝聚点要密些; 另一方面, 为了提高模型降阶的效率, 必须能高效地确定有限元模型中的节点所依附的凝聚点. 可以直接从有限元模型的节点中挑选出凝聚点, 但如果原有的有限元网格很不规则, 这些凝聚点分布也很不规则, 无法高效地判断有限元模型的节点依附于哪些凝聚点. 下面说明如何利用拓扑优化中进行动力分析的模型来快速生成均匀的凝聚点.

在结构动力特性拓扑优化中, 将单元密度取下限的区域视为没有材料, 即没有结构, 但是在分析结构动力特性时, 并没有将这些地方的单元删除, 而是认为这些区域由弹性模量和密度都很小、但比刚度非常大的“弱材料”组成. 一方面, 由于弱材料的弹性模量和密度都很小, 其存在对结构动力特性造成的影响可以忽略不计, 这也避免了结构拓扑形式改变时的网格重划分; 另一方面, 由于弱材料的比刚度非常大, 其构成的区域不会产生局部振动. 图3所示为最大化结构基频拓扑优化的最优结果的一阶模态图, 其中空白区域为弱材料区域, 这部分区域的有限单元并没有从结构动力分析中删除. 这就意味着, 对任意结构, 总可以通过引入比刚度非常大的弱材料将其扩充为规整的结构, 并且这个规整结构的动力学特性与原结构等价. 这样就可以对这个规整的结构进行降阶, 在其上生成均匀的凝聚点. 所以凝聚点可以不必在结构上, 这和局部刚体运动降阶方法有点类似, 局部刚体运动降阶方法中刚体运动简化中心的选取也不需要结构上. 因此, 如果用简化方法对如图1所示的最优构型做动力学分析, 可以用如图2中的规则网格罩住整个结构, 网格上的节点即为凝聚点. 另外, 由于这些凝聚点组成的单元是规整的有限大单元, 这样就可以高效确定有限元模型中的节点所依附的凝聚点.

具体操作时, 可以先确定结构 X, Y, Z 方向的尺寸, 这个尺寸确定了一个刚好包围住整个结构的长方体, 然后可以按照给定的份数和刻度值, 将长方体自动划分为均匀的有限大单元, 大单元的节点即为凝聚点. 由于有限大单元规则, 可以方便地确定有限

元模型中的节点所依附的凝聚点. 当刚好围住整个结构的长方体中有大量的无材料区域时, 会有很多凝聚点不被有限元模型中的任何节点所依附, 生成这些凝聚点会增加不必要的自由度, 降低降阶模型的求解效率, 因此具体实施时, 删除了未被依附的凝聚点.

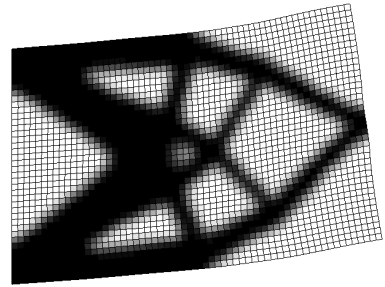


图1 悬臂梁基频最大化拓扑优化结果及其一阶模态^[23]

Fig. 1 Topology optimization result of maximizing fundamental eigen frequency of one cantilever beam and its first mode^[23]

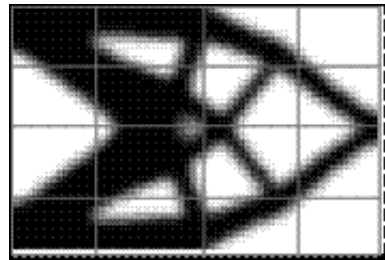


图2 凝聚点图示

Fig. 2 Schematic figure of condensation points

1.2 动力缩聚矩阵 N 的构造

生成凝聚点后, 需要通过凝聚点的位移插值得到有限元模型节点的位移, 进而由局部插值函数构造动力缩聚矩阵 N . 在选取插值函数时, 如果邻近的凝聚点可以方便地形成有限大单元, 可以采用该有限大单元的形函数作为插值函数; 也可以采用无网格法中的移动最小二乘近似生成的形函数^[24]作为插值函数, 这样就不必将凝聚点形成有限大单元. 还可研究其他插值函数. 考虑到本文生成的凝聚点已经形成规整的有限大单元, 采用其形函数作为局部插值函数, 这样邻近凝聚点形成的有限大单元中所有有限元模型节点的位移均可以由凝聚点的位移插值得到.

考虑如图3所示平面问题, 细线所示网格为有限元网格, 节点 a 为有限元模型上一节点, 1, 2, 3 和 4 为 4 个凝聚点. 此时的问题是如何将节点 a 的位移

用其周围的凝聚点的位移来表示. 考虑到结构前若干低阶模态具有整体性, 即不存在局部变形过大的情形, 本文假定节点 a 的位移仅依赖于 1, 2, 3 和 4 凝聚点, 即节点 a 的位移由 1, 2, 3 和 4 凝聚点的位移插值得到, 插值函数取为凝聚点 1, 2, 3 和 4 构成的四节点有限大单元 1234 的形函数, 则

$$\mathbf{u}_a = \mathbf{N}_a \{ \mathbf{U}_1^T, \mathbf{U}_2^T, \mathbf{U}_3^T, \mathbf{U}_4^T \}^T \quad (5)$$

其中, \mathbf{u}_a 为节点 a 的位移列向量, \mathbf{N}_a 为四节点有限大单元 1234 的形函数矩阵在节点 a 处的值矩阵, \mathbf{U}_1 , \mathbf{U}_2 , \mathbf{U}_3 和 \mathbf{U}_4 为凝聚点 1, 2, 3 和 4 的位移列向量, 上标 T 表示转置. 同理, 四节点有限大单元 1234 内其他有限元模型节点的位移均可通过凝聚点 1, 2, 3 和 4 的位移插值得到. 这样, 有限元模型中的所有节点的位移均可通过其所依附的凝聚点位移插值得到, 将它们集合起来, 就得到插值函数组成的动力缩聚矩阵 \mathbf{N} ,

$$\mathbf{N} = \sum_{i=1}^{nm} \mathbf{G}_i^T \mathbf{N}_i \mathbf{G}_i' \quad (6)$$

其中, nm 为有限元模型中节点的数目, \mathbf{G}_i 为第 i 号节点的波尔矩阵, \mathbf{G}_i' 为第 i 号节点所依附的凝聚点的波尔矩阵.

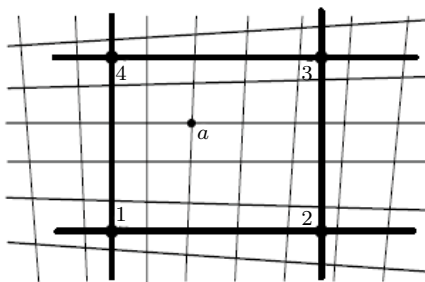


图 3 节点 a 所依附的凝聚点

Fig. 3 Condensation points to which node a attached

注意, 由于基向量是局部的且以显式给出, 降阶计算可以逐单元地进行, 内存和计算工作量都可大幅降低, 所以程序实现时并未采用式 (6) 显式地生成或存储动力缩聚矩阵 \mathbf{N} , 而是由叠加原理直接生成降阶后的刚度阵 \mathbf{K}_R 和质量阵 \mathbf{M}_R ,

$$\mathbf{K}_R = \sum_{e=1}^{ne} (\mathbf{G}_e')^T \mathbf{K}_R^e \mathbf{G}_e', \quad \mathbf{M}_R = \sum_{e=1}^{ne} (\mathbf{G}_e')^T \mathbf{M}_R^e \mathbf{G}_e' \quad (7)$$

其中, ne 为有限元模型中单元的数目, \mathbf{G}_e' 为第 e 号有限单元的所依附的所有凝聚点的波尔矩阵,

\mathbf{K}_R^e 和 \mathbf{M}_R^e 为降阶后的单元刚度阵和质量阵, 可分别表达为

$$\mathbf{K}_R^e = \mathbf{N}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{N}_e, \quad \mathbf{M}_R^e = \mathbf{N}_e^T \mathbf{m}_e \mathbf{N}_e \quad (8)$$

其中, \mathbf{k}_e 和 \mathbf{m}_e 为第 e 号单元的单元刚度阵和质量阵, \mathbf{N}_e 为第 e 号单元的所有节点位移与其所依附的所有凝聚点的位移转化矩阵. 从图 3 可见有限元模型中的同一单元的所有节点所依附的凝聚点可能不一样, 因此对图 3 所示的平面问题, \mathbf{N}_e 的维数不一定为 8 行 8 列. 这一特点使得本文的方法非常灵活.

1.3 插值函数的选取

由于本文采用凝聚点构成的有限大单元的形函数作为有限元模型中节点的插值函数, 这相当于强制了凝聚点构成的有限大单元中所有有限元模型中节点的位移模式, 必须按照该形函数所示的模式进行, 这无疑增加了降阶模型的刚度. 由于非协调元附加的位移项在单元交界面处不再满足协调条件, 所以采用非协调元的位移插值模式在一定程度上削弱了结构的刚度. 因此, 本文采用非协调元形函数作为局部插值的函数, 来达到弱化降阶模型刚度的目的.

如图 4 所示平面四节点四边形常规单元的位移插值模式为

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{u}_i, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^4 N_i \mathbf{v}_i \quad (9)$$

其中形函数

$$N_i = \frac{1}{4} (x + \xi_i \xi) (y + \eta_i \eta), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (10)$$

而平面四节点四边形非协调元的位移插值模式为^[25]

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_x & N_2 & -N_x & N_3 & N_x & N_4 & -N_x \\ N_y & N_1 & -N_y & N_2 & N_y & N_3 & -N_y & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

其中, N_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 同式 (10),

$$\left. \begin{aligned} N_x &= (1 - \xi^2) \nu \frac{a}{8b} + (1 - \eta^2) \frac{b}{8a} \\ N_y &= (1 - \xi^2) \frac{a}{8b} + (1 - \eta^2) \nu \frac{b}{8a} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

通过式 (11) 可知, 式 (5) 中的 \mathbf{N}_a 形式为

$N_a =$

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_x & N_2 & -N_x & N_3 & N_x & N_4 & -N_x \\ N_y & N_1 & -N_y & N_2 & N_y & N_3 & -N_y & N_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

式(13)给出了二维平面四节点四边形非协调元的位移插值形函数, 由于降阶模型主要针对大规模空间结构, 所以推导了三维八节点六面体非协调元的形函数, 并将其集成到程序中.

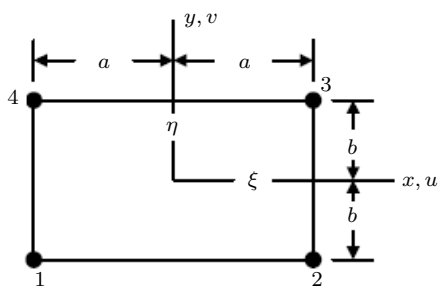


图4 平面四节点四边形单元

Fig. 4 Planar four-node quadrilateral element

1.4 迭代修正

由于模型降阶方法是一种近似方法, 这种近似必然带来误差. 因此, 在用式(3)得到降阶模型的特征值 λ 和特征向量 U 后, 如果需要进一步提高精度, 将 U 映射到有限元模型上变为 \bar{U} , 并利用

$$Ku = \lambda M\bar{U} \quad (14)$$

在有限元模型上迭代得到修正的特征向量 u . 然后采用瑞利商计算改善后的特征值 λ'

$$\lambda' = u^T Ku / u^T Mu \quad (15)$$

2 算法步骤

(1) 确定刚好包围结构的长方体, 按给定的份数及刻度剖分该长方体为有限大单元, 大单元的节点即为凝聚点.

(2) 对有限元模型的节点循环, 根据其所属的大单元判断其所依附的凝聚点, 根据其在所属有限大单元中的位置, 据式(13)形成每个节点处插值函数组成的位移转换阵.

(3) 删除未被任何节点依附的凝聚点, 凝聚点自由度重新编号.

(4) 对有限元模型中的单元循环, 对每个单元的所有节点循环, 生成该单元的位移转换阵, 据式(8)生成该单元降阶后的刚度阵和质量阵贡献.

(5) 据式(7)组装形成降阶的全局刚度阵和质量阵, 据式(3)求解降阶的广义特征值问题, 得到降阶模型的特征值和特征向量.

(6) 如果计算精度要求较高, 执行(7), 否则结束.

(7) 将降阶模型的特征向量映射回有限元模型, 据式(14)进行迭代得到改进的特征向量.

(8) 据有限元模型上的瑞利商——式(15), 得到改进的特征值.

3 数值算例与讨论

3.1 数值算例

3.1.1 整机模态分析

如图5(a)所示整机有限元模型, 在ANSYS中采用四节点四面体单元离散该模型, 模型共76309个节点. 材料属性为: 弹性模量为150 GPa, 泊松比为0.3, 材料密度7900 kg/m³. 模型沿X, Y, Z方向分别划分为20, 30, 40和10, 15, 20的不均匀规整粗网格, 粗网格节点为凝聚点, 删除未被依附的凝聚点后的凝聚点分布分别如图5(b)和图5(c)所示, 其分别有10037和1702个凝聚点, 约为有限元模型节点数的1/7.6和1/44.8. 降阶模型计算结果及其与ANSYS求解结果的比较见表1.

3.1.2 床鞍模态分析

如图6(a)所示床鞍模型, 在ANSYS中采用四节点四面体单元离散该模型, 模型共49012个节点. 材料属性: 弹性模量为210 GPa, 泊松比为0.3, 材料密度7900 kg/m³. 沿X, Y, Z方向分别划分为10, 6, 12和8, 6, 10的不均匀规整粗网格, 粗网格节点为凝聚点, 删除未被依附的凝聚点后的凝聚点分布分别如图6(b)和图6(c)所示, 其分别有641和427个凝聚点, 约为有限元模型节点数的1/76.5和1/114.8. 降阶模型计算结果及其与ANSYS求解结果的比较见表2.

3.1.3 主轴箱模态分析

如图7(a)所示主轴箱模型, 在ANSYS中离散为39726个节点. 材料属性: 弹性模量为150 GPa, 泊松比为0.3, 材料密度7900 kg/m³. 沿X, Y, Z方向分别划分为15, 17, 20和10, 12, 15的不均匀规整粗网格, 粗网格节点为凝聚点, 删除未被依附的凝聚点后的凝聚点分布分别如图7(b)和图7(c)所示, 其分别有3208和1477个凝聚点, 约为有限元模型节点数的1/12.4和1/26.9. 降阶模型计算结果及其与ANSYS求解结果的比较见表3.

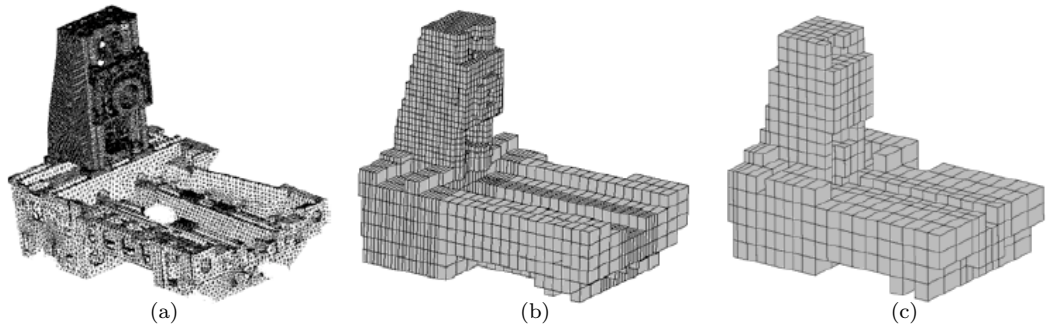


图 5 (a), (b) 和 (c) 分别为整机有限元模型, 沿 X, Y, Z 方向分别划分为 20, 30, 40 和 10, 15, 20 时凝聚点分布图
 Fig. 5 (a), (b) and (c) are, respectively, the finite element model of the entire machine tool, distribution of condensation points when the model are divided into 20, 30, 40 and 10, 15, 20 divisions along X, Y, Z axis

表 1 整机降阶模型频率结果

Table 1 Eigen frequencies of the condensation model of the entire machine tool

Eigen frequencies order	ANSYS	20, 30, 40 divisions along X, Y, Z axis		10, 15, 20 divisions along X, Y, Z axis	
		Condensation model	Error/%	Condensation model	Error/%
1	72.17	72.18	0.01	72.19	0.03
2	75.69	75.69	0.00	75.69	0.00
3	161.34	167.01	3.51	158.10	-2.01
4	165.25	163.09	-1.31	171.87	4.01
5	188.27	173.29	-7.96	187.20	-0.57

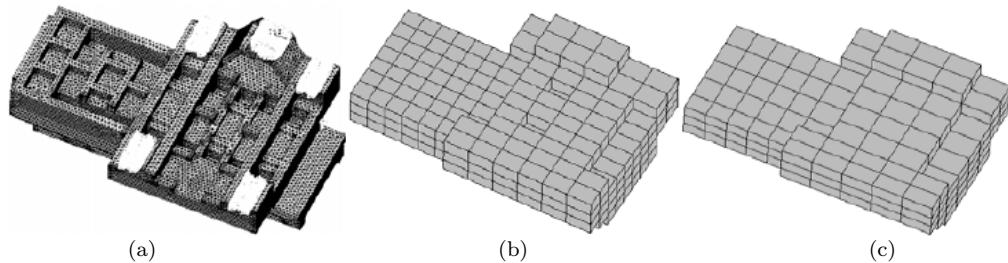


图 6 (a), (b) 和 (c) 分别为床鞍有限元模型, 沿 X, Y, Z 方向分别划分为 10, 6, 12 和 8, 6, 10 时凝聚点分布图
 Fig. 6 (a), (b) and (c) are, respectively, the finite element model of the saddle, distribution of condensation points when the model are divided into 10, 6, 12 and 8, 6, 10 divisions along X, Y, Z axis

表 2 床鞍降阶模型频率结果

Table 2 Eigen frequencies of the condensation model of the saddle

Eigen frequencies order	ANSYS	10, 6, 12 divisions along X, Y, Z axis		8, 6, 10 divisions along X, Y, Z axis	
		Condensation model	Error/%	Condensation model	Error/%
1	378.29	378.20	-0.02	378.22	-0.02
2	594.52	595.69	0.20	595.97	0.24
3	830.87	828.45	-0.29	828.27	-0.31
4	1064.10	1005.73	-5.49	990.51	-6.92
5	1397.60	1381.25	-1.17	1367.47	-2.16

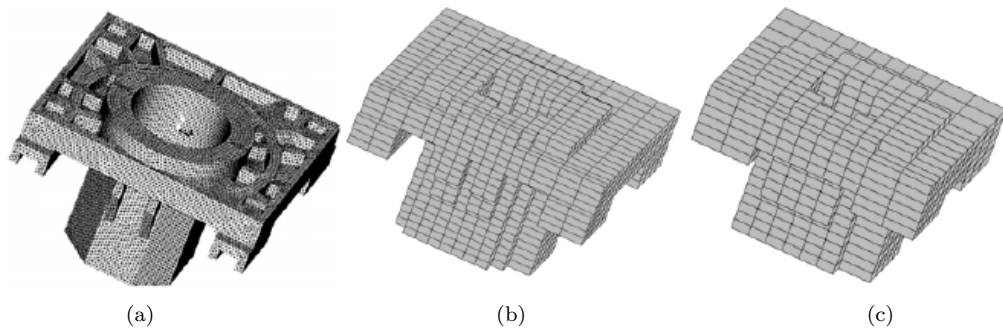


图 7 (a), (b) 和 (c) 分别为主轴箱有限元模型, 沿 X, Y, Z 方向分别划分为 15, 17, 20 和 10, 12, 15 时凝聚点分布图

Fig. 7 (a), (b) and (c) are, respectively, the finite element model of the headstock, distribution of condensation points when the model are divided into 15, 17, 20 and 10, 12, 15 divisions along X, Y, Z axis

表 3 主轴箱降阶模型频率结果

Table 3 Eigen frequencies of the condensation model of the headstock

Eigen frequencies order	ANSYS	15, 17, 20 divisions along X, Y, Z axis		10, 12, 15 divisions along X, Y, Z axis	
		Condensation model	Error/%	Condensation model	Error/%
1	697.65	683.57	-2.02	683.79	-1.99
2	774.77	751.50	-3.00	751.79	-2.97
3	992.69	957.05	-3.59	958.91	-3.40
4	1 130.91	1 128.70	-0.20	1 120.98	-0.88
5	1 162.26	1 114.99	-4.07	1 114.17	-4.14

3.2 讨论

对比有限元模型和凝聚点组成的模型可知, 凝聚点组成的模型从形态上较好地近似了有限元模型, 并且凝聚点可以均匀分布, 这在一定程度上避免了人工干预. 另外, 可以通过控制 X, Y, Z 向划分份数及其刻度值, 这样在凝聚点数目一定的情况下, 可以加密变形较明显、能量较大的区域的凝聚点, 同时疏化变形不明显的区域的凝聚点, 进一步提高简化模型的精度和效率, 例如在机床的立柱处、床鞍伸出的部位以及主轴箱的套筒处, 使用了较密的规整网格.

从 3 个算例可见, 凝聚点的数量可以比有限元模型中节点的数量少一个量级, 甚至更少, 这意味着本文提出的降阶法具有较高的降阶效率, 可以高效地降低原高阶广义特征值问题的规模.

从表 1, 2, 3 可见, 即使在凝聚点的数量比有限元模型中节点的数目少很多的情况下, 用本文提出的方法求得的结构前 5 阶特征值与 ANSYS 中精确求解有限元模型得到的前 5 阶特征值的误差基本均在 5% 以内, 因此算例 1, 2, 3 验证了本文提出的降阶法的高效性和正确性.

4 结论

本文的方法从物理上提供了复杂动力学模型降阶的手段, 将原来的高阶结构动力广义特征值问题转化为降阶后的广义特征值问题和与一系列与原高阶广义特征值问题同阶的静力问题, 这些静力问题的数目与所关心的结构特征值数目相同. 这个模型的优点是显而易见的:

(1) 由于结构广义特征值问题求解耗费时间通常为静力问题的几倍甚至十几倍, 本文方法在降阶过程中几乎不花费时间, 因此本文的方法可以在一定程度上降低计算结构广义特征值问题的求解时间.

(2) 基向量与结构拓扑优化设计变量无关. 这样可以在拓扑优化过程中只生成一次简化基向量, 节省结构动力拓扑优化时间. 另外, 基向量通过凝聚点的局部插值函数得到, 得到的简化模型具有明确物理意义.

(3) 计算机自动确定刚好包围结构的长方体, 并按给定的份数及刻度剖分该长方体为有限大单元, 大单元的节点即为凝聚点, 通过程序自动删除未被任何有限元模型节点所依附的凝聚点, 形成了近乎均匀的可以反映结构特征的凝聚点, 一定程度上避

免了人工干预.

(4) 由于凝聚点组成的有限大单元为规整的, 可以高效判断有限元模型中的节点所依附的凝聚点, 降阶过程几乎不占用计算机时.

本方法很容易和精细有限元法、无网格法等结合, 充分利用这些领域研究的成果, 提高求解精度.

参 考 文 献

- 1 Qu ZQ. Model Order Reduction Techniques: with Applications in Finite Element Analysis. New York: Springer, 2004
- 2 张亚辉, 林家浩. 结构动力学基础. 大连: 大连理工大学出版社, 2007 (Zhang Yahui, Lin Jiahao. Fundamentals of Structure Dynamics. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2007 (in Chinese))
- 3 Guyan R.J. Reduction of stiffness and mass matrices. *AIAA Journal*, 1965, 3(2): 380
- 4 Kuhar EJ, Stahle CV. Dynamic transformation method for modal synthesis. *AIAA Journal*, 1974, 12(5): 672-678
- 5 O'Callahan J. A procedure for an improved reduced system (IRS) model. In: Proceedings of the 7th International Modal Analysis Conference, Bethel, CT, Society for Experimental Mechanics, 1989
- 6 瞿祖庆, 傅志方. 一种高精度动力缩聚法. 机械强度, 1998, 20(3): 230-232 (Qu Zuqing, Fu Zhifang. A high accurate method for dynamic condensation. *Journal of Mechanical Strength*, 1998, 20(3): 230-232 (in Chinese))
- 7 杨秋伟, 刘济科. 一种改进的模型缩聚方法. 力学与实践, 2006, 28(2): 71-72 (Yang Qiwei, Liu Jike. An improved method for structural finite element modal reduction. *Mechanics in Engineering*, 2006, 28(2): 71-72 (in Chinese))
- 8 胡宁, 张汝清. 一种大型结构特征值问题的并行解法. 力学学报, 1992, 24(2): 239-242 (Hu Ning, Zhang Ruqing. A parallel algorithm for eigenvalue problems of large-scale structures. *Acta Mechanica Sinica*, 1992, 24(2): 239-242 (in Chinese))
- 9 Ong JH. Improved automatic masters for eigenvalue economization. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1987, 3(2): 149-160
- 10 Cho M, Kim H. Element-based node selection method for reduction of Eigenvalue problems. *AIAA Journal*, 2004, 42(8): 1677-1684
- 11 Bouhaddi N, Fillod R. A method for selecting master DOF in dynamic substructuring using the Guyan Condensation Method. *Computers & Structures*, 1992, 45(5-6): 941-946
- 12 Kim KO, Choi YJ. Energy method for selection of degrees of freedom in condensation. *AIAA Journal*, 2000, 38(7): 1253-1259
- 13 包学海, 池茂儒, 杨飞. 子结构分析中主自由度选取方法研究. 设计与研究, 2009, 36(4): 18-20 (Bao Xuehai, Chi Maoru, Yang Fei. Research on the selection method of master degree of freedom in substructure analysis. *Machine Design & Research*, 2009, 36(4): 18-20 (in Chinese))
- 14 梁乃刚, 陈其业. 求解有限元分析中大型方程组的择要并缩方法. 力学学报, 1987, 19(3): 259-268 (Liang Naigang, Chen Qiye. Extracting-condensation method for solving large sets of equations in FE analysis. *Acta Mechanica Sinica*, 1987, 19(3): 259-268 (in Chinese))
- 15 向树红, 邱吉宝, 王大钧. 模态分析与动态子结构方法新进展. 力学进展, 2004, 34(3): 289-303 (Xiang Shuhong, Qiu Jibao, Wang Dajun. The recent progresses on modal analysis and dynamic sub-structure methods. *Advances in Mechanics*, 2004, 34(3): 289-303 (in Chinese))
- 16 Wilson EL, Yuan MW, Dickens JM. Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1982, 10(6): 813-821
- 17 Gu JM, Ma ZD, Hulbert GM. A new load-dependent Ritz vector method for structural dynamics analyses: quasi-static Ritz vectors. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2000, 36(3-4): 261-278
- 18 刘斌, 丁桦, 时忠民. 基于柔度修正的局部刚体化结构动力模型简化方法. 工程力学, 2007, 24(10): 25-31 (Liu Bin, Ding Hua, Shi Zhongmin. A model reduction method for dynamic analysis based on deformation modification and local rigid body mode. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(10): 25-31 (in Chinese))
- 19 郑淑飞, 丁桦. 基于变形修正的局部刚体化动力模型简化方法. 力学与实践, 2008, 30(6): 31-34 (Zheng Shufei, Ding Hua. A model reduction method for dynamic analysis based on deformation modification and local rigid body mode. *Mechanics in Engineering*, 2008, 30(6): 31-34 (in Chinese))
- 20 Saad Y. Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. Manchester: Manchester University Press, 1992
- 21 Sleijpen GLG, van der Vorst HA. A Jacobi-Davidson iteration method for linear eigenvalue problems. *SIAM Review*, 2000, 42(2): 267-293
- 22 Xu JC, Zhou AH. A two-grid discretization scheme for eigenvalue problems. *Mathematics of Computation*, 2001, 70(233): 17-25
- 23 王斌. 结构多性能优化设计及其在航天结构设计中的应用. [博士论文]. 大连: 大连理工大学, 2010 (Wang Bin. Multi-performance optimization of structures and its application in aerospace structural design. [PhD Thesis]. Dalian: Dalian University of Technology, 2010 (in Chinese))
- 24 张雄, 刘岩, 马上. 无网格法的理论及应用. 力学进展, 2009, 39(1): 1-36 (Zhang Xiong, Liu Yan, Ma Shang. Meshfree methods and their applications. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 1-36 (in Chinese))
- 25 Cook RD, Malkus DS, Plesha ME. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. New York: John Wiley & Sons., 1989

(责任编辑: 刘希国)

STRUCTURE DYNAMIC MODEL REDUCTION TECHNIQUE BASED ON LOCAL INTERPOLATION¹⁾

Deng Jiadong Cheng Gengdong²⁾

*(State Key Lab of Structural Analysis for Industrial Equipment and Department of Engineering Mechanics,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)*

Abstract Based on complex structural finite element model, a new reduction method of structural dynamic model using local interpolation is proposed in this paper. The displacement of a node in the finite element model is obtained through interpolation of the displacements of the condensation nodes it attaches to. Every entry of the dynamic condensation matrix is formed by interpolation functions. To improve accuracy of the reduction method, the shape function of the non-conforming element is adopted as the interpolation function to lower the reduced structural stiffness after condensation, and the eigenvalues and eigenvectors are ameliorated through inverse iteration on the finite element model. To enhance efficiency of the reduced method, regular grids which just encompass the structure are employed to generate the condensation points. Due to the regularity of the grids, we can easily determine the condensation points to which a node in the finite element model attaches. Finally, mode analyses of three machine tool components demonstrate the effectiveness and the feasibility of the reduction method proposed in this article.

Key words model reduction, local interpolation, non-conforming element, inverse iteration

Received 22 September 2011, revised 13 November 2011.

1) The project was supported by the National Natural Science Foundation of China (50878038, 90816025).

2) E-mail: chenggd@dlut.edu.cn